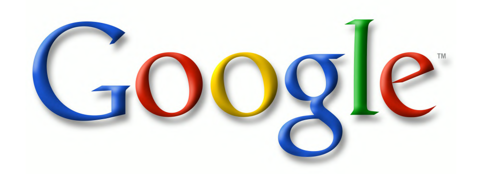
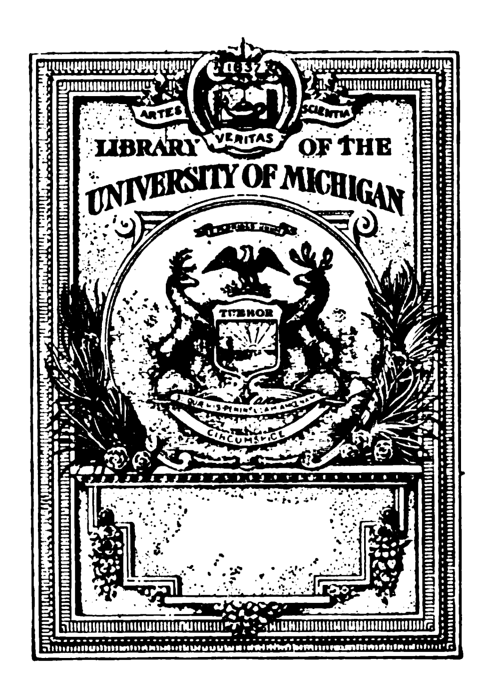



ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXX,2

ANALYTISCHE GEOMETRIE
DES PUNKTEPAARES, DES KEGELSCHNITTES UND DER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG

VON

DR. OTTO STAUDE
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

ZWEITER TEILBAND

MIT 47 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

INHALTSVERZEICHNIS.

(Fortsetzung von Teilband I, S. X.)

II. Kapitel: **Die Amiot-MacCullaghschen und Jacobischen Fokaleigenschaften.**

III. Kapitel: **Die Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen.**

VI. Abschnitt: **Flächen zweiter Ordnung in Tetraederkoordinaten.**

I. Kapitel: **Allgemeine Koordinatentetraeder.**

II. Kapitel: **Polartetraeder, Polarberührungstetraeder und Schmiegungstetraeder.**

III. Kapitel.

Einteilung der Flächen zweiter Klasse.

§ 101. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang und dem Mittelpunkt.

1. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang. Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogen, sei die Gleichung der *Fläche zweiter Klasse* (§ 75, (1)):

$$(1)\quad \begin{aligned} F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu \\ + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante der Fläche ist (§ 75, 3):

$$(2)\qquad B = |b_{kl}|,$$

und es werde zur Abkürzung gesetzt (§ 79, (5)):

$$(3)\qquad \begin{cases} B' = B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}, \\ B'' = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}, \\ B''' = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}. \end{cases}$$

In Rücksicht auf die Anzahl ihrer Doppelebenen, bezüglich ihres Ranges, zerfallen die Flächen (1) *nach* § 81, 8 *in folgende Gruppen:*

(4)
- I. $B \neq 0$: Eigentliche Flächen zweiter Klasse;
- II. $B = 0$, $B' \neq 0$ ($B = 0$, nicht alle $B_{kl} = 0$): Eigentliche Kurven zweiter Klasse;
- III. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' \neq 0$ (alle $B_{kl} = 0$, nicht alle $\beta_{kl} = 0$): Getrennte Punktepaare;
- IV. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$ (alle $\beta_{kl} = 0$): Doppelpunkte.

2. Einteilung in bezug auf die unendlich ferne Ebene. Die unendlich ferne Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$ genügt der Gleichung (1) immer dann und nur dann, wenn $b_{44} = 0$. Sie genügt ferner den vier Bedingungen der Doppelebene § 76, (16) immer dann und nur dann, wenn $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$, $b_{44} = 0$.

In bezug auf die unendlich ferne Ebene E_∞ *zerfallen daher die Flächen* (1) *in die drei Gruppen:*

$$(5)\begin{cases} 1.\ b_{44} \neq 0\text{: } \mathsf{E}_\infty \text{ gehört der Fläche (1) nicht an (ist keine Tangentialebene, § 75, 1);} \\ 2.\ b_{44} = 0;\ b_{14}, b_{24}, b_{34} \text{ nicht alle 0: } \mathsf{E}_\infty \text{ gehört der Fläche als einfache Ebene an;} \\ 3.\ b_{44} = 0;\ b_{14} = 0,\ b_{24} = 0,\ b_{34} = 0\text{: } \mathsf{E}_\infty \text{ ist Doppelebene der Fläche.} \end{cases}$$

3. Andere Form der Bedingungen (5). Setzt man zur Abkürzung:

$$(6) \qquad \mathsf{B}_0 = \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66},$$

so ist *für* $b_{44} = 0$ (I Anm. 1, III, (4)):

$$(7) \qquad \mathsf{B}_0 = -(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2).$$

Daher sind die Bedingungen (5) auch ersetzbar durch die folgenden:

$$(8) \quad 1.\ b_{44} \neq 0; \qquad 2.\ b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0; \qquad 3.\ b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0.$$

4. Der Mittelpunkt der Flächen zweiter Klasse. Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues *rechtwinkliges* Koordinatensystem $O'x'y'z'$, so werden nach § 75, (15); (11) die in u', v', w' linearen Glieder der transformierten Gleichung immer dann und nur dann fehlen, wenn:

$$(9) \quad \begin{cases} b_{14}' = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1 + b_{44}x_0' = 0, \\ b_{24}' = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2 + b_{44}y_0' = 0, \\ b_{34}' = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3 + b_{44}z_0' = 0, \end{cases}$$

oder mit Benutzung von § 75, (8); (11):

$$(10) \quad \begin{cases} b_{44}(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0) = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1, \\ b_{44}(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0) = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2, \\ b_{44}(\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0) = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und Addition (§ 88, (7); (8)):

$$(11) \qquad b_{44}x_0 = b_{14}, \quad b_{44}y_0 = b_{24}, \quad b_{44}z_0 = b_{34},$$

woraus auch umgekehrt wieder die Gleichungen (10) oder (9) hervorgehen.

Die auf das neue Koordinatensystem $O'x'y'z'$ transformierte Gleichung (1) *erhält, unabhängig von der Richtung der Achsen x', y', z', immer dann und nur dann die Form:*

$$(12) \quad \begin{aligned} F(u, v, w, s) = {} & b_{11}'u'^2 + b_{22}'v'^2 + b_{33}'w'^2 \\ & + 2b_{23}'v'w' + 2b_{31}'w'u' + 2b_{12}'u'v' + b_{44}'s'^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn der Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ den Bedingungen (11) *genügt.*

Er ist dann nach § 77, (7) *der Pol der unendlich fernen Ebene* $u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ s = 1$, *der Mittelpunkt der Fläche zweiter Klasse*

5. Einteilung der Flächen nach dem Mittelpunkt. Ist nun $b_{44} \neq 0$, so gibt es nach (11) *einen bestimmten endlichen Mittelpunkt:*

$$(13) \qquad x_0 = \frac{b_{14}}{b_{44}}, \quad y_0 = \frac{b_{24}}{b_{44}}, \quad z_0 = \frac{b_{34}}{b_{44}}.$$

Die Fläche (1) ist eine *Mittelpunktsfläche* und die Gleichung (12) ihre *Mittelpunktsgleichung.* Die Ebene E_∞ ist, da sie nicht mit ihrem Pol vereinigt liegt, wie in (5), keine Tangentialebene (§ 77, 4, I).

Ist $b_{44} = 0$, aber b_{14}, b_{24}, b_{34} nicht alle Null, so gibt es nach (11) *einen unendlich fernen Mittelpunkt.* Die Ebene E_∞ liegt mit ihrem Pol vereinigt und ist, wie in (5), einfache Tangentialebene.

Ist endlich $b_{44} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$, so ist nach (11) *der Mittelpunkt unbestimmt* und nach (9) $b'_{14} = 0$, $b'_{24} = 0$, $b'_{34} = 0$, sowie nach § 75, (16) $b'_{44} = 0$. Die Fläche (1) hat dann in jedem Koordinatensystem eine Gleichung von der Form:

$$(14) \quad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0.$$

Sie ist *eine in der unendlich fernen Ebene liegende Kurve zweiter Klasse* (§ 80, (19')).

In den Fällen (5) 1., 2. und 3. hat daher die Fläche einen bestimmten endlichen, einen bestimmten unendlich fernen oder einen unbestimmten Mittelpunkt.

6. Vorläufige Einteilung der Flächen zweiter Klasse. Hiernach zerfallen die Flächen zweiter Klasse nach ihrem Range einerseits und nach ihrem Mittelpunkt, bezüglich ihrem Verhalten gegen die Ebene E_∞ andererseits in folgende Gruppen[96]):

(16)

		$B \neq 0$: Eigentl. Fl. 2. Klasse	$B = 0, B' \neq 0$: Eigentl. Kurv. 2. Klasse	$B = 0, B' = 0$ $B'' \neq 0$: Punktepaare	$B = 0, B' = 0$ $B'' = 0$: Doppelpunkt.
$b_{44} \neq 0$	best. endl. Mittelpunkt; E_∞ keine Tang.-Ebene	I, 1	II, 1	III, 1	IV, 1
$b_{44} = 0$, $B_0 \neq 0$	best. ∞ f. Mittelpunkt; E_∞ einf. Tang.-E.	I, 2	II, 2	III, 2	0
$b_{44} = 0$, $B_0 = 0$	unbest. Mittelp.; E_∞ Doppeltang.-Ebene	0	II, 3	III, 3	IV, 3

Der Fall I, 3 ist unmöglich, da mit $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 = 0$ oder $b_{44} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$ stets $B = 0$; der Fall IV, 2 ist unmöglich, da mit allen β_{kl} nach (6) auch $\mathsf{B}_0 = 0$ (§ 27, 5).

§ 102. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten der Mittelpunktsflächen.

1. Hauptachsen der Mittelpunktsflächen. Hat die Fläche zweiter Klasse § 101, (1) einen bestimmten Mittelpunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ in § 101, (13), so hat ihre Gleichung in jedem von diesem ausgehenden rechtwinkligen System $O'x'y'z'$ die Form § 101, (12). Die neuen Koeffizienten sind dann nach § 75, (13); (14); (11) infolge der Bedingungen § 101, (9):

$$(1)\quad \begin{cases} b'_{11} = F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_1 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_1, \\ b'_{22} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_2 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_2, \\ b'_{33} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_3 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_3; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} b'_{23} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3, \\ b'_{31} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_1 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_1, \\ b'_{12} = F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_2 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_2. \end{cases}$$

Wir nennen nun die vom Mittelpunkt O' ausgehenden Achsen x', y', z' die *Hauptachsen der Fläche*, wenn die Bedingungen:

$$(3)\qquad b'_{23} = 0, \qquad b'_{31} = 0, \qquad b'_{12} = 0$$

erfüllt sind. Die Koeffizienten $b'_{11}, b'_{22}, b'_{33}$ heißen alsdann *Hauptachsenkoeffizienten*.

Wie in § 88, 3 handelt es sich nunmehr um die Bestimmung der zwölf Unbekannten $b'_{11}, b'_{22}, b'_{33}$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ aus den sechs Gleichungen (1) und (3) und den sechs Gleichungen § 88, (3); (4), aus denen außerdem die sechs Gleichungen § 88, (7), (8) folgen. Wir fügen dazu noch drei weitere Unbekannte x_0', y_0', z_0' mit drei weiteren Gleichungen § 101, (9), so daß wir *fünfzehn Unbekannte* und *fünfzehn Gleichungen* haben.

2. Notwendige Bedingungen. Die erste Gleichung (1) und die beiden letzten (3):

$$(4)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_1 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_1 = b'_{11}, \\ F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_2 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_2 = 0, \\ F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_3 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

geben, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ multipliziert und

addiert mit Hinblick auf § 88, (7); (8) und mit Hinzufügung je einer Gleichung von § 101, (9) und § 88, (3):

$$(5)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\alpha_1, \\ F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\beta_1, \\ F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\gamma_1, \\ F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \end{cases}$$

Man hat daher für die fünf Unbekannten b_{11}', α_1, β_1, γ_1, x_0' *die Gleichungen* (5) *und ebenso für die beiden anderen Gruppen von je fünf Unbekannten die Gleichungen:*

$$(6)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\alpha_2, \\ F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\beta_2, \\ F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\gamma_2, \\ F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\alpha_3, \\ F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\beta_3, \\ F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\gamma_3, \\ F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = 0, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{cases}$$

3. Hinreichende Bedingungen. Umgekehrt folgt aus den drei ersten Gleichungen (5) durch Multiplikation mit α_1, β_1, γ_1 und Addition mit Rücksicht auf die fünfte Gleichung (5) wieder die erste Gleichung (1) und ebenso aus (6) und (7) die anderen Gleichungen (1).

Multipliziert man ferner die drei ersten Gleichungen (6) mit α_3, β_3, γ_3 und (7) mit α_2, β_2, γ_2 und addiert, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2):

$$(8)\quad \begin{cases} b_{23}' = b_{22}'(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3), \\ b_{23}' = b_{33}'(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3). \end{cases}$$

Hieraus folgt aber unter der Voraussetzung $b_{22}' \neq b_{33}'$, daß:

$$(9)\quad b_{23}' = 0 \qquad \text{und} \qquad (10)\quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Ist dagegen $b_{22}' = b_{33}'$, so muß zu (8) noch die Gleichung (10) hinzugefügt werden, um die Gleichung (9) zu folgern. Somit ergibt sich wie in § 88, 6:

Die fünfzehn Gleichungen (5), (6), (7) *sind hinreichende Bedingungen für die drei Gruppen der Unbekannten* $b_{11}', \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x_0'$; $b_{22}', \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, y_0'$; $b_{33}', \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z_0'$, *falls die drei Hauptachsenkoeffizienten* $b_{11}', b_{22}', b_{33}'$ *alle verschieden sind. Ist dagegen* $b_{22}' = b_{33}'$, *so muß noch die Gleichung* (10), *und sind* $b_{11}' = b_{22}' = b_{33}'$, *so müssen noch die drei Gleichungen* § 88, (4) *hinzugefügt werden.*

4. Die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten. Ausführlich geschrieben, lauten die Gleichungen (5):

$$(11)\quad \begin{cases} (b_{11}-b'_{11})\alpha_1 + b_{12}\beta_1 + b_{13}\gamma_1 + b_{14}x_0' = 0, \\ b_{21}\alpha_1 + (b_{22}-b'_{11})\beta_1 + b_{23}\gamma_1 + b_{24}x_0' = 0, \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\beta_1 + (b_{33}-b'_{11})\gamma_1 + b_{34}x_0' = 0, \\ b_{41}\alpha_1 + b_{42}\beta_1 + b_{43}\gamma_1 \qquad + b_{44}x_0' = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \end{cases}$$

und entsprechend die Gleichungen (6) und (7). Damit folgt, wie in § 88, 7:

Jeder der drei Hauptachsenkoeffizienten b'_{11}, b'_{22}, b'_{33} muß der in μ kubischen Gleichung genügen:

$$(12)\quad \mathsf{E}(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie heißt *die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems* der Fläche zweiter Klasse § 101, (1).[89])

5. Andere Form der kubischen Gleichung. Die Elimination von α_1, β_1, γ_1, x_0', die von (11) zu (12) führt, kann auch auf andere Weise ausgeführt werden. Eliminiert man nämlich mit Rücksicht auf die Voraussetzung:

$$(13)\quad b_{44} \neq 0$$

x_0' aus der ersten und vierten Gleichung (11), so ergibt sich:

$$(14)\quad \{(b_{11}-b'_{11})b_{44} - b_{14}^2\}\alpha_1 + (b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42})\beta_1 \\ + (b_{13}b_{44} - b_{14}b_{43})\gamma_1 = 0,$$

oder mit Hinzufügung der entsprechenden Gleichungen (§ 75, 3):

$$(15)\quad \begin{cases} (\beta_{44} - b_{44}b'_{11})\alpha_1 + \beta_{45}\beta_1 + \beta_{46}\gamma_1 = 0, \\ \beta_{54}\alpha_1 + (\beta_{55} - b_{44}b'_{11})\beta_1 + \beta_{56}\gamma_1 = 0, \\ \beta_{64}\alpha_1 + \beta_{65}\beta_1 + (\beta_{66} - b_{44}b'_{11})\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichung (14) und der vierten Gleichung (11) unter der Voraussetzung (13) auch wieder die erste Gleichung (11). Die Gleichungen (11) sind daher ersetzbar durch die Gleichungen (15), wenn man zu diesen noch die vierte Gleichung (11) hinzubehält.

Die Bestimmung der zwölf Unbekannten: $b'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $b'_{22}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $b'_{33}, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *kann daher auch mittels der Gleichungen* (15) *und der acht entsprechenden geschehen.*

Die kubische Gleichung für b'_{11}, b'_{22}, b'_{33} ergibt sich aber dann in der Form:

$$(16)\qquad b_{44}^2\,\mathsf{E}(\mu) = \begin{vmatrix} \beta_{44} - b_{44}\mu & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{54} & \beta_{55} - b_{44}\mu & \beta_{56} \\ \beta_{64} & \beta_{65} & \beta_{66} - b_{44}\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Sie unterscheidet sich (vgl. nachher unter **6**) nur um den Faktor b_{44}^2 von der Gleichung (12).

Damit ist aber das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Klasse $b_{44} \neq 0$ auf die Form § 88, (15); (17) zurückgeführt. Es ergibt sich also wie dort in § 89, **3**:

Die kubische Gleichung $\mathsf{E}(\mu) = 0$ *in* (12) *oder* (16) *hat stets drei reelle Wurzeln* μ_1, μ_2, μ_3; und weiter wie in § 90, **7**:

Die Fläche zweiter Klasse $b_{44} \neq 0$ *hat stets drei vom Mittelpunkt ausgehende Hauptachsen, in bezug auf welche die Gleichung der Fläche die Form erhält:*

$$(17)\qquad F(u, v, w, s) = \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2.$$

Die Hauptachsen sind eindeutig bestimmt, wenn die Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 *alle drei verschieden sind, dagegen einfach unbestimmt für zwei gleiche und dreifach unbestimmt für drei gleiche Wurzeln.*

6. Entwicklung der kubischen Gleichung. Die Differentialquotienten der Determinante (12) sind:

$$\mathsf{E}'(\mu) = -\begin{vmatrix} b_{22} - \mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} - \mu & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \cdot \cdot - \cdot \cdot;$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}''(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu & b_{14} \\ b_{41} & b_{44} \end{vmatrix} + \cdot \cdot + \cdot \cdot; \quad \tfrac{1}{6}\,\mathsf{E}'''(\mu) = -b_{44}.$$

Es folgt daher:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\mu) &= \mathsf{E}(0) + \mathsf{E}'(0)\cdot\mu + \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}''(0)\cdot\mu^2 + \tfrac{1}{6}\,\mathsf{E}'''(0)\cdot\mu^3 \\ &= B - (B_{11} + B_{22} + B_{33})\mu + (\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66})\mu^2 - b_{44}\mu^3 \end{aligned}$$

oder:

$$(18)\qquad \mathsf{E}(\mu) = -\,b_{44}\mu^3 + \mathsf{B}_0\mu^2 - \mathsf{B}_0'\mu + B,$$

wo zur Abkürzung neben § 101, (6) gesetzt ist:

$$(19)\qquad \mathsf{B}_0' = B_{11} + B_{22} + B_{33}.$$

Aus (16) folgt dieselbe Entwicklung, da (§ 89, (7)):

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{54} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{64} & \beta_{65} & \beta_{66} \end{vmatrix} = Bb_{44}^2;$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{65} & \beta_{66} \end{vmatrix} = B_{11}b_{44}; \quad \begin{vmatrix} \beta_{66} & \beta_{64} \\ \beta_{46} & \beta_{44} \end{vmatrix} = B_{22}b_{44}; \quad \begin{vmatrix} \beta_{44} & \beta_{45} \\ \beta_{54} & \beta_{55} \end{vmatrix} = B_{33}b_{44}.$$

Es ist nämlich (I Anm. 1, III, (8)):

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} = B^2 b_{44}$$

und, wenn die Unterdeterminanten zweiten Grades der B_{kl} mit B_{kl} bezeichnet werden (§ 66, 6), wiederum (I Anm. 1, II, (4)):

$$\begin{vmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} & \mathsf{B}_{13} \\ \mathsf{B}_{21} & \mathsf{B}_{22} & \mathsf{B}_{23} \\ \mathsf{B}_{31} & \mathsf{B}_{32} & \mathsf{B}_{33} \end{vmatrix} = (B^2 b_{44})^2,$$

woraus alsdann (I Anm. 1, III, (11)) die erste Formel (20) folgt (die andern nach I Anm. 1, II, (5), auf B_{11}, B_{22}, B_{33} angewendet).

7. Hauptachsengleichungen der Mittelpunktsflächen. Da nun für die drei Wurzeln der Gleichung $\mathsf{E}(\mu) = 0$ nach (18):

$$(21)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{\mathsf{B}_0}{b_{44}}, \quad \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2 = \frac{\mathsf{B}_0'}{b_{44}}, \quad \mu_1\mu_2\mu_3 = \frac{B}{b_{44}},$$

so ergibt sich:

Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse mit einem Mittelpunkt ($b_{44} \neq 0$) *kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

$$(22)\qquad \begin{cases} B \neq 0: \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' \neq 0: \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0: \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0,\ b_{44} \neq 0: b_{44} s'^2 = 0. \end{cases}$$

Sie ist daher entsprechend ein *Ellipsoid* oder *Hyperboloid* (§ 70, (10)); eine *Ellipse* oder *Hyperbel* (§ 53, (35)); ein *endliches Punktepaar* (I § 72, (20')); ein *endlicher Doppelpunkt* (I § 47, (10)).

8. Andere Form der Bedingungen (22). Wenn $B = 0$ und $B' = 0$, so verschwinden (§ 79, (11)) alle Unterdeterminanten B_{kl} und damit auch B_0' in (19).

Ist umgekehrt: $B = 0$, $\mathsf{B}_0' = 0$, so ist zunächst nach § 101, (3) und nach (19):

$$B' = B_{44}.$$

Nach § 79, (8) ist nun für $B = 0$:

$$\mathsf{B}_0' B_{44} = B_{14}^2 + B_{24}^2 + B_{34}^2$$

und daher für $\mathsf{B}_0' = 0$ auch $B_{14} = 0$, $B_{24} = 0$, $B_{34} = 0$ und damit infolge der für $B = 0$ gültigen Gleichungen ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$b_{1k} B_{14} + b_{2k} B_{24} + b_{3k} B_{34} + b_{4k} B_{44} = 0$$

auch $b_{4k} B_{44} = 0$, also wenn nicht alle b_{4k} verschwinden, $B_{44} = 0$ oder $B' = 0$.

Falls b_{14}, b_{24}, b_{34}, b_{44} nicht alle verschwinden, sind die Bedingungen:

(23) $$B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0$$

in (22) *ersetzbar durch:*

(24) $$B = 0,\ B' = 0.$$

Überdies haben für $B = 0$ nach § 79, (9) B' und B_0', wenn sie nicht Null sind, dasselbe Vorzeichen.

Wenn $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, so verschwinden (§ 81, (18)) alle Unterdeterminanten β_{kl} und damit auch B_0 in § 101, (6).

Sei dagegen vorausgesetzt:

$$b_{44} \neq 0,\ B = 0,\ B' = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0,$$

so wird zuerst nach § 101, (3) und (6):

$$B'' = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}.$$

Da nun mit $B = 0$, $B' = 0$ alle B_{kl} und damit alle Unterdeterminanten zweiten Grades der β_{kl} verschwinden (I Anm. 1, III, (22)), so ist:

(25) $$(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33})(\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}) = \beta_{14}^2 + \beta_{15}^2 + \beta_{16}^2 + \beta_{24}^2 + \beta_{25}^2 + \beta_{26}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{35}^2 + \beta_{36}^2,$$

also mit $\mathsf{B}_0 = 0$:

$$\beta_{14} = 0,\ \beta_{15} = 0,\ \beta_{16} = 0,\ \beta_{24} = 0,\ \beta_{25} = 0,\ \beta_{26} = 0,\ \beta_{34} = 0,\ \beta_{35} = 0,\ \beta_{36} = 0.$$

Damit folgt aber aus den unbedingt gültigen Gleichungen:

$$B_{11} = b_{42}\beta_{16} - b_{43}\beta_{15} + b_{44}\beta_{11},\ B_{22} = b_{43}\beta_{24} - b_{41}\beta_{26} + b_{44}\beta_{22},\ B_{33} = b_{41}\beta_{35} - b_{42}\beta_{34} + b_{44}\beta_{33}$$

zunächst:

$$b_{44}\beta_{11} = 0,\ b_{44}\beta_{22} = 0,\ b_{44}\beta_{33} = 0,$$

und da $b_{44} \neq 0$ ist:

$$\beta_{11} = 0,\ \beta_{22} = 0,\ \beta_{33} = 0;\ \text{also: } B'' = 0.$$

Die Bedingungen:

(26) $$b_{44} \neq 0,\ B = 0,\ B' = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0$$

sind ersetzbar durch:

(27) $$b_{44} \neq 0,\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' = 0.$$

Da überdies für $B = 0$, $B' = 0$ nach (25):

(28) $$B'' \mathsf{B}_0 = \beta_{14}^2 + \beta_{24}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{15}^2 + \beta_{25}^2 + \beta_{35}^2 + \beta_{16}^2 + \beta_{26}^2 + \beta_{36}^2 + \mathsf{B}_0^2,$$

so haben alsdann B'' und B_0, wenn sie nicht Null sind, dasselbe Vorzeichen.

Die Tabelle (22) *kann nach* (23), (24); (26), (27) *auch durch die folgende ersetzt werden* ($b_{44} \neq 0$):

(29) $$\begin{cases} B \neq 0 : \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' \neq 0 : \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0 : \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' = 0 : b_{44} s'^2 = 0. \end{cases}$$

9. Die zu einer verschwindenden Wurzel gehörige Hauptachse. Im zweiten Fall (29) gibt die Auflösung der Gleichungen (11) mit $b_{11}' = \mu_1 = 0$:

(29') $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : x_0' = B_{k1} : B_{k2} : B_{k3} : B_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4 (I Anm. 2, III, (12)).

Die Ebene $x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + x_0' = 0$ des neuen Koordinatensystems (I § 37, (19)) ist daher die Doppelebene der Fläche, deren Koordinaten u_0, v_0, w_0, s_0 nach § 79, (4') sich ebenfalls wie die Größen der rechten Seite (29') verhalten.

10. Die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems der Fläche zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Die Gleichungen (11) können für $B \neq 0$ in der Form geschrieben werden (I Anm. 2, III, (1); (2)):

(30) $$\begin{cases} B\alpha_1 = (B_{11}\alpha_1 + B_{21}\beta_1 + B_{31}\gamma_1) b_{11}', \\ B\beta_1 = (B_{12}\alpha_1 + B_{22}\beta_1 + B_{32}\gamma_1) b_{11}', \\ B\gamma_1 = (B_{13}\alpha_1 + B_{23}\beta_1 + B_{33}\gamma_1) b_{11}', \\ Bx_0' = (B_{14}\alpha_1 + B_{24}\beta_1 + B_{34}\gamma_1) b_{11}', \end{cases}$$

oder mit Weglassung der letzten Gleichung:

(31) $$\begin{cases} \left(B_{11} - \frac{B}{b_{11}'}\right) \alpha_1 + B_{12}\beta_1 + B_{13}\gamma_1 = 0, \\ B_{21}\alpha_1 + \left(B_{22} - \frac{B}{b_{11}'}\right) \beta_1 + B_{23}\gamma_1 = 0, \\ B_{31}\alpha_1 + B_{32}\beta_1 + \left(B_{33} - \frac{B}{b_{11}'}\right) \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Die Hauptachsenkoeffizienten $\mu = b_{11}', b_{22}', b_{33}'$ genügen daher auch der Gleichung:

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} B_{11}-\frac{B}{\mu} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22}-\frac{B}{\mu} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33}-\frac{B}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist für $B \neq 0$ nach § 78, (7') die Gleichung der Fläche § 101, (1) in Punktkoordinaten:

$$(33)\qquad B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{23}yz + \cdots + B_{44} = 0.$$

Die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten $\lambda = a'_{11}$, a'_{22}, a'_{33} der Fläche (33) ist aber nach § 88, (17) ebenfalls die Gleichung (32) nur mit λ für $\frac{B}{\mu}$. In diesem Sinne sind also die kubischen Gleichungen § 88, (17) und § 102, (12) nicht wesentlich verschieden.

§ 103. Die Flächen zweiter Klasse ohne Mittelpunkt.

1. Bestimmung der Achsenrichtung x'. Die Flächen ohne endlichen Mittelpunkt § 101, (16) zweite Zeile sind durch die Voraussetzungen:

$$(1)\qquad b_{44} = 0,\quad \mathsf{B}_0 = -(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2) \neq 0$$

bezeichnet. Bei der Transformation der Gleichung § 101, (1) auf ein neues System $O'x'y'z'$ werden die Koeffizienten § 101, (9) nach (1):

$$(2)\qquad \begin{cases} b'_{14} = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1x_0') = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1, \\ b'_{24} = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2, \\ b'_{34} = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3. \end{cases}$$

Sie können nach (1) *nicht alle drei* verschwinden (I Anm. 2, II, (9)). Sollen jedoch *zwei* von ihnen verschwinden, etwa:

$$(3)\qquad \begin{cases} b'_{24} = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2 = 0, \\ b'_{34} = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3 = 0, \end{cases}$$

so folgt daraus unbedingt, daß:

$$b_{14} : b_{24} : b_{34} = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 : \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$$

(I § 37, (12)) oder:

$$(4)\qquad \varrho\alpha_1 = b_{14},\quad \varrho\beta_1 = b_{24},\quad \varrho\gamma_1 = b_{34},$$

wo wir willkürlich das positive Vorzeichen der Wurzel:

$$(5)\qquad \varrho = \sqrt{b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2} = \sqrt{-\mathsf{B}_0}$$

wählen. Danach wird dann:

$$(6)\qquad b'_{14} = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1x_0') = \frac{1}{\varrho}(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2) = \varrho.$$

Den Bedingungen (3) *wird durch die Bestimmung* (4) *der Richtung der x'-Achse genügt, worauf der Koeffizient b'_{14} den Wert* (6) *erhält.*

2. **Die Koeffizienten der quadratischen Glieder.** Infolge von (1), (3) und (6) wird nach § 75, (13); (14); (15); (11):

(7)
$$\begin{cases} b'_{11} = F(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = H(\alpha_1\beta_1\gamma_1) + 2b'_{14}x_0' = H(\alpha_1\beta_1\gamma_1) + 2\varrho x_0', \\ b'_{22} = F(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = H(\alpha_2\beta_2\gamma_2) + 2b'_{24}y_0' = H(\alpha_2\beta_2\gamma_2), \\ b'_{33} = F(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = H(\alpha_3\beta_3\gamma_3) + 2b'_{34}z_0' = H(\alpha_3\beta_3\gamma_3), \\ b'_{23} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3 \\ \quad = H_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + H_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + H_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3, \\ b'_{31} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_1 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_1 \\ \quad = H_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\alpha_1 + H_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\beta_1 + H_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\gamma_1 + \varrho z_0', \\ b'_{12} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_1 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_1 \\ \quad = H_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_1 + H_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_1 + H_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_1 + \varrho y_0'. \end{cases}$$

3. **Der Scheitelpunkt der Fläche.** Wir bestimmen nunmehr den Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$, für den nach § 75, (9) die Gleichungen:

(8)
$$\begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x_0' - \alpha_2 y_0' - \alpha_3 z_0', \\ y_0 = -\beta_1 x_0' - \beta_2 y_0' - \beta_3 z_0', \\ z_0 = -\gamma_1 x_0' - \gamma_2 y_0' - \gamma_3 z_0' \end{cases}$$

gelten, aus den drei Bedingungen:

(9)
$$b'_{11} = 0, \quad b'_{12} = 0, \quad b'_{31} = 0,$$

die nach (7) geschrieben werden können (§ 66, (12)):

$$\begin{aligned} -\varrho x_0' &= H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1 - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \\ -\varrho y_0' &= H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2, \\ -\varrho z_0' &= H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und addiert, so folgt nach (8):

(10)
$$\begin{cases} \varrho x_0 = H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1, \\ \varrho y_0 = H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1, \\ \varrho z_0 = H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1, \end{cases}$$

wo ϱ den nicht verschwindenden Wert (5) und α_1, β_1, γ_1 die Werte (4) haben (§ 29, (11)).[94])

Der hierdurch bestimmte Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ soll der *Scheitelpunkt der Fläche* genannt werden.

4. **Bestimmung der Achsenrichtungen y' und z' und der Koeffizienten b'_{22} und b'_{33}.** Wir fügen nun zu den Forderungen (3) und (9) die weitere hinzu:

(11)
$$b'_{23} = 0,$$

um aus ihr die Richtung der Achsen y' und z' zu bestimmen, zugleich aber die davon abhängigen Koeffizienten b'_{22} und b'_{33} in (7).

Die Gleichungen $b'_{12} = 0$, $b'_{22} = F(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')$, $b'_{23} = 0$ können nun nach (7) und (3) in der Form geschrieben werden:

$$(12)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_1 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_1 = 0, \\ F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_2 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_2 = b'_{22}, \\ F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen aber mit Rücksicht auf (3) wieder die Gleichungen § 102, (6) und entsprechend die Gleichungen § 102, (7). Auch gehen umgekehrt, wie § 102, **3**, wieder die Gleichungen § 102, (9) und (10) hervor, falls $b'_{22} \neq b'_{33}$, während für $b'_{22} = b'_{33}$ die Gleichung § 102, (10) hinzuzufügen ist.

Die Gleichungen § 102, (6) lauten nun im Falle (1) ausführlich:

$$(13)\quad \begin{cases} (b_{11} - b'_{22})\alpha_2 + b_{12}\beta_2 + b_{13}\gamma_2 + b_{14}y_0' = 0, \\ b_{21}\alpha_2 + (b_{22} - b'_{22})\beta_2 + b_{23}\gamma_2 + b_{24}y_0' = 0, \\ b_{31}\alpha_2 + b_{32}\beta_2 + (b_{33} - b'_{22})\gamma_2 + b_{34}y_0' = 0, \\ b_{41}\alpha_2 + b_{42}\beta_2 + b_{43}\gamma_2 = 0, \\ \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \end{cases}$$

und entsprechend die Gleichungen § 102, (7).

Die Koeffizienten b'_{22}, b'_{33} sind daher die Wurzeln der in μ quadratischen Gleichung[89]*:*

$$(14)\qquad \mathsf{E}_0(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die aus § 102, (12) mit $b_{44} = 0$ hervorgeht, so daß nach § 102, (18):

$$(15)\qquad \mathsf{E}_0(\mu) = \mathsf{B}_0\mu^2 - \mathsf{B}_0'\mu + B.$$

Daß diese Gleichung stets zwei *reelle* Wurzeln hat, und daß es stets zwei ihnen entsprechende Hauptachsenrichtungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gibt, wird in § 109, **5**; § 110, **3**; **4** bewiesen werden (vgl. auch § 51, (18)).

5. Kanonische Gleichungen der Flächen zweiter Klasse ohne Mittelpunkt. Da nun für die Wurzeln μ_2 und μ_3 nach (15):

$$(16)\qquad \mu_2 + \mu_3 = \frac{\mathsf{B}_0'}{\mathsf{B}_0}, \quad \mu_2\mu_3 = \frac{B}{\mathsf{B}_0},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (9), (11), (6) und (3):

Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse ohne endlichen Mittelpunkt ($b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 \neq 0$) *kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

$$(17)\quad \begin{cases} B \neq 0\colon\ \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0;\\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' \neq 0\colon\ \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0;\\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0\colon\ 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen der beiden letzten Fälle (17) sind nach § 102, (23); (24) auch ersetzbar durch:

$$(18)\qquad B = 0,\ B' \neq 0 \text{ und } B = 0,\ B' = 0.$$

Dabei liegt der Anfangspunkt O' des Koordinatensystems im Scheitelpunkt (10); *hat die x'-Achse die Richtungskosinus* (4), (5); *sind $\mu_2 = b'_{22}$ und $\mu_3 = b'_{33}$ die Wurzeln der Gleichung* (14) *und bestimmen sich alsdann die y'- und z'-Achse aus den Gleichungen* (13) *und den entsprechenden. Sie sind für $\mu_2 \neq \mu_3$ eindeutig bestimmt, für $\mu_2 = \mu_3$ in der yz-Ebene drehbar.*

6. Die Kurven in der unendlich fernen Ebene. Der noch übrige Fall § 101, (16) dritte Zeile ist durch die Voraussetzungen:

$$(19)\qquad b_{14} = 0,\quad b_{24} = 0,\quad b_{34} = 0,\quad b_{44} = 0\quad (b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0)$$

bezeichnet. Er ist schon in § 93, 2 erledigt. Danach ergibt sich:

Die Fläche zweiter Klasse:

$$(20)\qquad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0$$

kann bei unverändertem Anfangspunkt O des Systems $Oxyz$ durch Einführung neuer Achsen x', y', z' stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:

$$(21)\quad \begin{cases} B_{44} \neq 0\colon\ \nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0;\\ B_{44} = 0,\ B'_{44} \neq 0\colon\ \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0;\\ B_{44} = 0,\ B'_{44} = 0,\ B''_{44} \neq 0\colon\ \nu_3 w'^2 = 0. \end{cases}$$

Hier ist:

$$(22)\qquad B'_{44} = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33},\quad B''_{44} = b_{11} + b_{22} + b_{33},$$

und sind ν_1, ν_2, ν_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung § 93, (7'):

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \nu & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} - \nu & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \nu \end{vmatrix} = -\nu^3 + B''_{44}\nu^2 - B'_{44}\nu + B_{44} = 0,$$

also:

$$(24)\qquad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = B''_{44},\quad \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 + \nu_1\nu_2 = B'_{44},\quad \nu_1\nu_2\nu_3 = B_{44}.$$

Mit (19) ist auch $B_{11} = 0$, $B_{22} = 0$, $B_{33} = 0$, also (§ 101, (3)):

$$(25)\qquad B' = B_{44},$$

und $\beta_{44} = 0$, $\beta_{55} = 0$, $\beta_{66} = 0$, also:

$$(26)\qquad B'' = B'_{44},$$

endlich:

(27) $$B''' = B''_{44}.$$

Daher können die Bedingungen der drei Zeilen (21) auch in der Form:

(28) $B' \neq 0$; $B' = 0$, $B'' \neq 0$; $B' = 0$, $B'' = 0$, $B''' \neq 0$

gegeben werden.

§ 104. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

1. Kanonische Gleichungen. Das Ergebnis der vorstehenden Entwicklung ist dies, daß die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogene Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

(1) $$\begin{aligned} F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu \\ + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0 \end{aligned}$$

durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems $O'x'y'z'$ auf eine kanonische Form gebracht werden kann.

Nach ihrem *Range* einerseits und nach ihrer *Beziehung zur unendlich fernen Ebene* E_∞ andererseits gehört jede Fläche (1) in ein (ausgefülltes) Feld der folgenden Tabelle (§ 101, (16)) und hat dann die dort angegebene kanonische Gleichungsform (§ 102, (29); § 103, (17), (18); (21), (28)). *Die Tabelle muß also alle Flächen zweiter Klasse enthalten.*

(2)

	I. $B \neq 0$: Eigentl. Fläch. 2. Klasse	II. $B = 0$, $B' \neq 0$: Eigentl. Kurven 2. Klasse	III. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' \neq 0$: Eigentl. Punktep.	IV. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, $B''' \neq 0$: Doppelpunkte
1. $b_{44} \neq 0$: E_∞ nicht Tang.-Ebene	$\mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44}s'^2 = 0$	$\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44}s'^2 = 0$	$\mu_3 w'^2 + b_{44}s'^2 = 0$	$b_{44}s'^2 = 0$
2. $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 \neq 0$: E_∞ einf. Tang.-Ebene	$\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0$	$\mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0$	$2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0$	0
3. $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 = 0$: E_∞ Doppel-tang.-Ebene	0	$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$	$\nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$	$\nu_3 w'^2 = 0$

Innerhalb eines Teils der kanonischen Gleichungen sind nun weiter noch die *Vorzeichen* der Koeffizienten zu unterscheiden.

2. Die eigentlichen Flächen mit Mittelpunkt. Die Gleichung I, 1 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

$$(3) \qquad \alpha = \frac{\mu_1}{b_{44}}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{b_{44}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{b_{44}}$$

und $s' = 1$ in der Form:

$$(4) \qquad \alpha u'^2 + \beta v'^2 + \gamma w'^2 + 1 = 0$$

geschrieben werden. Da alsdann nach § 102, (21):

$$(5) \qquad \alpha\beta\gamma = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{b_{44}^3} = \frac{B}{b_{44}^4},$$

so sind die Vorzeichen der Koeffizienten α, β, γ:

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{für } B > 0: + + + \quad \text{oder} \quad - - + \\ \phantom{\text{für }} B < 0: - + + \quad \text{oder} \quad - - -. \end{cases}$$

Andererseits sind wie in § 89, (41) die Koeffizienten α, β, γ, bezüglich μ_1, μ_2, μ_3 alle von einerlei Vorzeichen, wenn gleichzeitig:

$$(7) \qquad \mathsf{B}_0' b_{44} > 0, \quad B\mathsf{B}_0 > 0.$$

Die Verbindung beider Angaben (6) und (7) gibt für die Vorzeichen von α, β, γ (§ 89, (42)):

(8)	$B > 0$	$B < 0$
$\mathsf{B}_0' b_{44} > 0, \quad B\mathsf{B}_0 > 0$	$+ + +$	$- - -$
$\mathsf{B}_0' b_{44}, \quad B\mathsf{B}_0$ nicht beide > 0	$- - +$	$- + +$

Nun folgt aus der nach § 81, (23) unbedingt gültigen Gleichung:

$$B''' b_{44} = b_{41}^2 + b_{42}^2 + b_{43}^2 + b_{44}^2 + \mathsf{B}_0,$$

daß unter der Bedingung $B > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$ stets B''' und b_{44} gleiches Vorzeichen haben. Man kann daher die Tabelle (8) in folgende Form bringen, wobei wir zugleich die Größen α, β, γ je nach ihrem Vorzeichen als positive oder negative Quadrate bezeichnen:

(9)		$B > 0$		$B < 0$
		$\mathsf{B}_0' B''' > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$	$\mathsf{B}_0' B'''$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide > 0	
$b_{44} \neq 0$	$\mathsf{B}_0' b_{44} > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$	$\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipsoid	0	$\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Reelles Ellipsoid
	$\mathsf{B}_0' b_{44}$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide > 0	0	$\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Einschal. Hyperbol.	$\alpha^2 u'^2 - \beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Zweischal. Hyperbol.

Die eingefügten Namen der Flächen ergeben sich aus § 70, (10).

3. Die eigentlichen Flächen ohne Mittelpunkt. Die Gleichung I, 2 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

(10) $$\beta = \frac{\mu_2}{\sqrt{-\mathsf{B}_0}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{\sqrt{-\mathsf{B}_0}}$$

in der Form ($s' = 1$):

(11) $$\beta v'^2 + \gamma w'^2 + 2u' = 0$$

geschrieben werden. Da alsdann nach § 103, (16):

(12) $$\mu_2 \mu_3 = \frac{B}{\mathsf{B}_0}, \qquad \alpha\beta = -\frac{B}{\mathsf{B}_0^{\,2}},$$

so sind die Vorzeichen der Koeffizienten α und β:

(13) $$\begin{cases} \text{für } B > 0 \quad \text{oder} \quad B\mathsf{B}_0 < 0 : \mp \pm \\ \phantom{\text{für }} B < 0 \quad \text{oder} \quad B\mathsf{B}_0 > 0 : \pm \pm . \end{cases}$$

Nach § 103, (1) ist nämlich hier stets $\mathsf{B}_0 < 0$. Demnach ist im Anschluß an die Tabelle (9):

(14)

		$B > 0$		$B < 0$
		$\mathsf{B}_0' B''' > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$	$\mathsf{B}_0' B'''$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide > 0	
$b_{44} = 0$	$B\mathsf{B}_0 > 0$	0	0	$\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 2u' = 0$ Ellipt. Paraboloid
	$B\mathsf{B}_0 < 0$	0	$\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 + 2u' = 0$ Hyperb. Paraboloid	0

Die eingefügten Namen gehen aus § 70, (32) hervor.

4. Eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Wenn allgemein ($A \neq 0$):

(15) $$b_{kl} = A_{kl}$$

genommen wird, so wird die Fläche zweiter Klasse (1) mit der Fläche zweiter Ordnung § 99, (1) identisch. Gleichzeitig ist (§ 78, 8):

(16) $$\begin{cases} B = A^3, \quad b_{44} = A_{44}, \quad \mathsf{B}_0' = B_{11} + B_{22} + B_{33} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = A^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = A^2 A''_{44}, \\ \mathsf{B}_0 = \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66} = A\,(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = A A'_{44}, \\ \qquad B''' = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = A' \end{cases}$$

und damit:

(17) $$\mathsf{B}_0' B''' = A^2 A' A''_{44}, \quad B\mathsf{B}_0 = A^4 A'_{44}, \quad \mathsf{B}_0' b_{44} = A^2 A_{44} A''_{44}.$$

Die Bedingungen der Tabelle (9) und (14) kommen daher mit denen der Tabelle § 99, (8) und (14) überein.

5. Eigentliche Kurven zweiter Klasse im Endlichen. Die Gleichung II, 1 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

(18) $$\beta = \frac{\mu_2}{b_{44}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{b_{44}}$$

und $s' = 1$ in der Form:

(19) $$\beta v'^2 + \gamma w'^2 + 1 = 0$$

geschrieben werden. Da hier nach § 102, (21) mit $\mu_1 = 0$:

(20) $$\beta + \gamma = \frac{B_0}{b_{44}^2} \quad \beta\gamma = \frac{B_0'}{b_{44}^3},$$

so ergibt sich für die Vorzeichen von β und γ:

(21) $$\begin{cases} b_{44}B_0' > 0, & B_0 > 0 : + + \\ b_{44}B_0' > 0, & B_0 < 0 : - - \\ b_{44}B_0' < 0 & \quad\;\, : \pm \mp. \end{cases}$$

In diesen drei Fällen ist die Fläche (19) nach § 53, (35) eine *imaginäre Ellipse* oder eine *reelle Ellipse* oder eine *Hyperbel*.[96])

Die Bedingungen der zweiten Zeile (21) sind aber auch gleichwertig mit:

(22) $$b_{44}B_0' > 0, \; b_{44}B_0' \text{ und } B_0 \text{ nicht beide } > 0.$$

Denn die Bedingungen (22) lassen nur die Möglichkeiten $B_0 < 0$ oder $B_0 = 0$ zu. Da aber nach § 81, (3) unbedingt:

(23) $$B_0^2 = (\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66})^2 = \beta_{44}^2 + \beta_{55}^2 + \beta_{66}^2 + 2(\beta_{56}^2 + \beta_{64}^2 + \beta_{45}^2 + b_{44}B_0'),$$

so ist $B_0 = 0$ nicht mit $b_{44}B_0' > 0$ verträglich.

Wir können daher die Bedingungen (21) in folgende Tabelle bringen, der wir noch den Fall II, 2 aus (2) anfügen:

(24)

		$B = 0, \; B' \neq 0$	
		$B_0 > 0, \; b_{44}B_0' > 0$	$B_0, \; b_{44}B_0'$ nicht beide > 0
$b_{44} \neq 0$	$b_{44}B_0' > 0$	$\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Reelle Ellipse
	$b_{44}B_0' < 0$	0	$\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Hyperbel
$b_{44} = 0$	$B_0 \neq 0$	0	$\frac{B_0'}{\sqrt{-B_0^3}} w'^2 + 2u' = 0$ Parabel

Bei der Parabel ist nach § 103, (17) $B_0 < 0, \; B_0' \neq 0$.

6. Unendlich ferne eigentliche Kurven zweiter Klasse. Für die Gleichung II, 3 der Tabelle (2) ist nur zu unterscheiden, ob ν_1, ν_2, ν_3 alle drei gleiches Vorzeichen haben oder nicht. Es folgt daher, wie in § 93, (8):

Die eigentliche unendlich ferne Kurve:

(25) $$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$$

ist ein imaginärer oder reeller Kegelschnitt, je nachdem:

(26) $$B_{44}B''_{44} > 0,\ B'_{44} > 0 \quad \text{oder} \quad B_{44}B''_{44},\ B'_{44} \ \text{nicht beide} > 0$$

oder nach § 103, (25); (26); (27), je nachdem:

(27) $$B'B''' > 0,\ B'' > 0 \quad \text{oder} \quad B'B''',\ B'' \ \text{nicht beide} > 0.$$

7. Punktepaare. Das *Punktepaar* III, 1 ist im *Endlichen* gelegen und ist, da nach § 102, (21) $\mu_3 = \mathsf{B}_0 : b_{44}$ ist, *imaginär* oder *reell*, je nachdem:

(28) $$\mathsf{B}_0 > 0 \quad \text{oder} \quad \mathsf{B}_0 < 0$$

oder nach § 102, (28), je nachdem:

(29) $$B'' > 0 \quad \text{oder} \quad B'' < 0.$$

Das Punktepaar III, 2 besteht aus einem endlichen und einem unendlich fernen Punkte. Es ist $\mathsf{B}_0 < 0$ und daher $B'' < 0$.

Das aus zwei unendlich fernen Punkten bestehende Punktepaar III, 3 ist nach § 103, (24); (26) imaginär oder reell, je nachdem:

(30) $$\nu_2\nu_3 = B'_{44} = B'' > 0 \quad \text{oder} \quad < 0.$$

Man hat daher die folgende Tabelle:

(31)

	$B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0$	
	$B'' > 0$	$B'' < 0$
$b_{44} \neq 0$	$\gamma^2 w'^2 + 1 = 0$ Imag. endl. Punktepaar	$\gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Reell. endl. Punktepaar
$b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0$	0	$u's' = 0$ Ein endl. u. ein ∞ f. Punkt
$b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0$	$\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 = 0$ Imag. ∞ f. Punktepaar	$\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 = 0$ Reell. ∞ f. Punktepaar

§ 105. Invarianten der Fläche zweiter Klasse.

1. Die Determinante als Invariante. Erhält die auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ bezogene Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

$$(1)\quad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0$$

durch die Substitution § 75, (7) in bezug auf ein schiefwinkliges System $O'x'y'z'$ die Form:

$$(2)\quad S^2 F(u, v, w, s) = b'_{11}u'^2 + b'_{22}v'^2 + b'_{33}w'^2 + 2b'_{23}v'w' + 2b'_{31}w'u' + 2b'_{12}u'v' + 2b'_{14}u's' + 2b'_{24}v's' + 2b'_{34}w's' + b'_{44}s'^2 = 0,$$

so haben die neuen Koeffizienten die Werte § 75, (13)—(16). Zugleich gelten neben § 75, (10) die Formeln § 91, (11) für die Achsenwinkel von $O'x'y'z'$, sowie neben § 91, (5) die Gleichung (I Anm. 1, III, (7)):

$$(3)\quad S^3 = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 & Sx_0' \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 & Sy_0' \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 & Sz_0' \\ 0 & 0 & 0 & S \end{vmatrix}.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3) wird nun mit dem Werte (3) und mit Rücksicht auf § 75, (13)—(16):

$$S^3 \cdot S^3 \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$= S^3 \cdot \begin{vmatrix} F_1(\mathsf{A}_1\, \mathsf{B}_1\, \Gamma_1\, Sx_0') & F_1(\mathsf{A}_2\, \mathsf{B}_2\, \Gamma_2\, Sy_0') & F_1(\mathsf{A}_3\, \mathsf{B}_3\, \Gamma_3\, Sz_0') & b_{14}S \\ F_2(\mathsf{A}_1\, \mathsf{B}_1\, \Gamma_1\, Sx_0') & F_2(\mathsf{A}_2\, \mathsf{B}_2\, \Gamma_2\, Sy_0') & F_2(\mathsf{A}_3\, \mathsf{B}_3\, \Gamma_3\, Sz_0') & b_{24}S \\ F_3(\mathsf{A}_1\, \mathsf{B}_1\, \Gamma_1\, Sx_0') & F_3(\mathsf{A}_2\, \mathsf{B}_2\, \Gamma_2\, Sy_0') & F_3(\mathsf{A}_3\, \mathsf{B}_3\, \Gamma_3\, Sz_0') & b_{34}S \\ F_4(\mathsf{A}_1\, \mathsf{B}_1\, \Gamma_1\, Sx_0') & F_4(\mathsf{A}_2\, \mathsf{B}_2\, \Gamma_2\, Sy_0') & F_4(\mathsf{A}_3\, \mathsf{B}_3\, \Gamma_3\, Sz_0') & b_{44}S \end{vmatrix}$$

und wiederum nach dem Multiplikationstheorem:

$$(4)\quad S^6 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} & b'_{14} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} & b'_{24} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} & b'_{34} \\ b'_{41} & b'_{42} & b'_{43} & b'_{44} \end{vmatrix}.$$

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ besteht zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (2) *die Beziehung* (4).

2. Der Kugelkreis im recht- und schiefwinkligen System. Durch die Substitution § 75, (7) verwandelt sich die Gleichung des Kugelkreises § 84, (9') in der Weise:

(5) $$S^2(u^2+v^2+w^2)=lu'^2+mv'^2+nw'^2+2pv'w'+2qw'u'+2ru'v',$$

wo:

(6) $$\begin{cases} l = \mathsf{A}_1^2+\mathsf{B}_1^2+\Gamma_1^2, \\ m = \mathsf{A}_2^2+\mathsf{B}_2^2+\Gamma_2^2, \\ n = \mathsf{A}_3^2+\mathsf{B}_3^2+\Gamma_3^2, \end{cases}$$ (7) $$\begin{cases} p = \mathsf{A}_2\mathsf{A}_3+\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3+\Gamma_2\Gamma_3, \\ q = \mathsf{A}_3\mathsf{A}_1+\mathsf{B}_3\mathsf{B}_1+\Gamma_3\Gamma_1, \\ r = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2+\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2+\Gamma_1\Gamma_2. \end{cases}$$

Nach der Bedeutung der Größen $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \ldots, \Gamma_3$ (§ 75, zu (10)) ist neben:

(8) $$S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad S^2 = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

mit Rücksicht auf das Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 2):

(9) $$\begin{vmatrix} l & r & q \\ r & m & p \\ q & p & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}^2 = S^4.$$

Ferner drücken sich die Größen (6) und (7) durch die *Achsenwinkelkosinus* § 91, (11) in der Weise aus (I § 35, (2)):

(10) $$\begin{cases} l = 1-\alpha^2, \quad m = 1-\beta^2, \quad n = 1-\gamma^2, \\ p = \beta\gamma-\alpha, \quad q = \gamma\alpha-\beta, \quad r = \alpha\beta-\gamma. \end{cases}$$

Zugleich wird auch (I § 37, (8)):

(11) $$\begin{cases} mn-p^2 = nl-q^2 = lm-r^2 = 1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma = S^2; \\ qr-lp = S^2\alpha, \quad rp-mq = S^2\beta, \quad pq-nr = S^2\gamma. \end{cases}$$

Ist das neue System $O'x'y'z'$ ebenfalls rechtwinklig, so wird:

(12) $$u^2+v^2+w^2 = u'^2+v'^2+w'^2.$$

Der imaginäre Kugelkreis hat in jedem rechtwinkligen System dieselbe Gleichung (bleibt bei jeder Euklidschen Bewegung des Raumes fest).[91])

3. Kugelkreis und Fläche zweiter Klasse. Da vermöge der Substitution § 75, (7) nach (2) und (5) die Gleichung:

(13) $$F(u, v, w, s) - \mu(u^2+v^2+w^2) = 0$$

übergeht in:

(14) $$S^2\{F-\mu(u^2+v^2+w^2)\} = b'_{11}u'^2+\cdots+b'_{44}s'^2 \\ -\mu(lu'^2+\cdots+2ru'v') = 0,$$

so gibt die Anwendung des Satzes (4) identisch in μ:

$$(15)\quad S^6 \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11}-l\mu & b'_{12}-r\mu & b'_{13}-q\mu & b'_{14} \\ b'_{21}-r\mu & b'_{22}-m\mu & b'_{23}-p\mu & b'_{24} \\ b'_{31}-q\mu & b'_{32}-p\mu & b'_{33}-n\mu & b'_{34} \\ b'_{41} & b'_{42} & b'_{43} & b'_{44} \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung der Determinante *rechts* gibt, wenn B', B'_{kl}, β'_{kl} die Determinanten vierten, dritten, zweiten Grades aus den b'_{kl} bedeuten (§ 66, 6):

$$\begin{aligned} &B' - \{B'_{11}l + B'_{22}m + B'_{33}n + 2B'_{23}p + 2B'_{31}q + 2B'_{12}r\}\mu \\ &\quad + \{\beta'_{44}(mn-p^2) + \beta'_{55}(nl-q^2) + \beta'_{66}(lm-r^2) + 2\beta'_{56}(qr-lp) \\ &\qquad + 2\beta'_{64}(rp-mq) + 2\beta'_{45}(pq-nr)\}\mu^2 \\ &\quad - b'_{44}S^4\mu^3 \text{ (nach (9))}; \end{aligned}$$

die Determinante links wurde bereits § 102, (18) entwickelt.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der beiderseitigen Potenzen von μ ergibt sich dann unter Benutzung von (10) und (11):

$$(16)\quad \begin{cases} S^6(B_{11}+B_{22}+B_{33}) = B'_{11}(1-\alpha^2) + B'_{22}(1-\beta^2) + B'_{33}(1-\gamma^2) \\ \qquad + 2B'_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2B'_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2B'_{12}(\alpha\beta-\gamma), \\ S^4(\beta_{44}+\beta_{55}+\beta_{66}) = \beta'_{44}+\beta'_{55}+\beta'_{66}+2\beta'_{56}\alpha+2\beta'_{64}\beta+2\beta'_{45}\gamma, \\ S^2 b_{44} = b'_{44}. \end{cases}$$

Aus (15) folgt zugleich die Form der *kubischen Gleichung des Hauptachsenproblems in schiefwinkligen Koordinaten* (§ 102, (12)).

4. Invarianten des gemeinen Koordinatensystems. Unter Weglassung der Akzente in (2) kann man dann die Sätze (4); (16) auch so aussprechen (§ 91, 4):

Die Koeffizientenverbindungen[90]):

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{B}{S^6}, \quad \dfrac{b_{44}}{S^2}, \\ \dfrac{B_{11}(1-\alpha^2)+B_{22}(1-\beta^2)+B_{33}(1-\gamma^2)+2B_{23}(\beta\gamma-\alpha)+2B_{31}(\gamma\alpha-\beta)+2B_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^6}, \\ \dfrac{\beta_{44}+\beta_{55}+\beta_{66}+2\beta_{56}\alpha+2\beta_{64}\beta+2\beta_{45}\gamma}{S^4} \end{cases}$$

der Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

$$(18)\qquad F(u,v,w,s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + \cdots + b_{44}s^2 = 0$$

haben in jedem schief- und rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ denselben Wert, falls α, β, γ die jedesmaligen Achsenwinkelkosinus (beim rechtwinkligen $\alpha=\beta=\gamma=0$, $S=1$) bedeuten.

Wird die Fläche zweiter *Klasse* (18) durch die Voraussetzung (§ 78, (8); (9); $A \neq 0$):

$$b_{kl} = A_{kl}, \quad B_{kl} = A^2 a_{kl}, \quad \beta_{kl} = A\alpha_{\overline{kl}}, \quad B = A^3$$

mit der Fläche zweiter *Ordnung* § 91, (18) zusammengelegt, so ist die erste Invariante (17) hier die dritte Potenz der ersten (17) dort, die zweite hier direkt die zweite dort, die dritte und vierte hier gleich der mit dem invarianten Faktor $A^2 : S^4$, bezüglich $A : S^2$ multiplizierten dritten und vierten dort. Bei den eigentlichen Flächen sind also die Invarianten (17) von denen in § 91, (17) nicht verschieden.

5. Invarianten der unendlich fernen Kurve. Ist in (1) $b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{44} = 0$, so wird auch in (2) nach § 75, (15); (16) $b'_{14} = b'_{24} = b'_{34} = b'_{44} = 0$. Danach folgt aber mit den reduzierten Werten § 75, (13); (14) durch zweimalige Multiplikation mit der Determinante S^2 in (8), ebenso wie in § 91, (8):

$$(19)\qquad S^4\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung dieses Satzes auf die unendlich ferne Kurve zweiter Klasse:

$$(20)\ b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv - \mu(u^2+v^2+w^2) = 0$$

ergibt sich dann wie in (15):

$$(21)\ S^4\begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11}-l\mu & b'_{12}-r\mu & b'_{13}-q\mu \\ b'_{21}-r\mu & b'_{22}-m\mu & b'_{23}-p\mu \\ b'_{31}-q\mu & b'_{32}-p\mu & b'_{33}-n\mu \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung der Determinante rechts gibt wie bei (15):

$$\begin{aligned} B'_{44} &- \{\beta'_{11}l + \beta'_{22}m + \beta'_{33}n + 2\beta'_{23}p + 2\beta'_{31}q + 2\beta'_{12}r\}\mu \\ &+ \{b'_{11}(mn-p^2) + b'_{22}(nl-q^2) + b'_{33}(lm-r^2) + 2b'_{23}(qr-lp) \\ &\qquad + 2b'_{31}(rp-mq) + 2b'_{12}(pq-nr)\}\mu^2 \\ &- S^4\mu^3. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten ergibt sich daher unter Benutzung von (10) und (11):

$$(22)\ \begin{cases} S^4(\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33}) = \beta'_{11}(1-\alpha^2) + \beta'_{22}(1-\beta^2) + \beta'_{33}(1-\gamma^2) \\ \qquad\qquad + 2\beta'_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2\beta'_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2\beta'_{12}(\alpha\beta-\gamma), \\ S^2(b_{11}+b_{22}+b_{33}) = b'_{11} + b'_{22} + b'_{33} + 2b'_{23}\alpha + 2b'_{31}\beta + 2b'_{12}\gamma. \end{cases}$$

Unter Weglassung der Akzente in der mit $b'_{14} = b'_{24} = b'_{34} = b'_{44} = 0$ reduzierten Gleichung (2) folgt daher:

Die Koeffizientenverbindungen:

$$(23)\ \begin{cases} \dfrac{\beta_{11}(1-\alpha^2) + \beta_{22}(1-\beta^2) + \beta_{33}(1-\gamma^2) + 2\beta_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2\beta_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2\beta_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^4}, \\ \dfrac{b_{11}+b_{22}+b_{33}+2b_{23}\alpha+2\beta_{31}\beta+2\beta_{12}\gamma}{S^2},\quad \dfrac{B_{44}}{S^4} \end{cases}$$

der Gleichung der unendlich fernen Kurve zweiter Klasse:

(24) $b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0$

haben in jedem schief- oder rechtwinkligem Koordinatensystem Oxyz denselben Wert, falls α, β, γ die jedesmaligen Achsenwinkelkosinus (beim rechtwinkligen $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $S = 1$) bedeuten.

6. Gleichung einer Rotationsfläche in Ebenenkoordinaten. Für den Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem parallelen $O'x'y'z'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ wird aus § 75, (7):

(25) $u = u', \quad v = v', \quad w = w', \quad s = -x_0u' - y_0v' - z_0w' + s'.$

Dadurch wird allgemein:

(26) $Au + Bv + Cw + Ds = (A - Dx_0)u' + (B - Dy_0)v' + (C - Dz_0)w' + Ds'.$

Sind nun:

(27) $\begin{cases} U_1 = A_1u + B_1v + C_1w + D_1s = 0, \\ U_2 = A_2u + B_2v + C_2w + D_2s = 0 \end{cases}$

die Gleichungen zweier Punkte, von denen wenigstens der erste endlich ist ($D_1 \neq 0$), und nimmt man für O' diesen ersten Punkt:

(28) $x_0 = A_1 : D_1, \quad y_0 = B_1 : D_1, \quad z_0 = C_1 : D_1,$

so wird nach (26):

(29) $U_1 = D_1s', \quad D_1U_2 = 2au' + 2bv' + 2cw' - es',$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(30) $2a = D_1A_2 - D_2A_1, \quad 2b = D_1B_2 - D_2B_1, \quad 2c = D_1C_2 - D_2C_1, \quad -e = D_1D_2.$

Die Fläche zweiter Klasse[97]):

(31) $F(u, v, w, s) = (u^2 + v^2 + w^2) - U_1U_2 = 0$

wird dadurch transformiert in:

(32) $F(u, v, w, s) = (u'^2 + v'^2 + w'^2) - (2au' + 2bv' + 2cw' - es')s' = 0$

oder mit:

(33) $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - e:$

(34) $F(u, v, w, s) = (u' - as')^2 + (v' - bs')^2 + (w' - cs')^2 - r^2s'^2 = 0.$

Dies ist aber nach § 82, (45) eine Rotationsfläche mit dem Brennpunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ oder $U_1 = 0$. In der Tat zeigt schon die Form der Gleichung (31), daß jede gemeinsame Tangentialebene u, v, w, s der Fläche $F = 0$ und des Kugelkreises auch durch einen der Punkte (27) geht, oder der von einem solchen Punkte an die Fläche gelegte Berührungskegel ein Kugelkegel ist (§ 70, 5).

Die Gleichung (31) *stellt also eine Rotationsfläche mit den Brennpunkten* (27), *die auch konjugiert komplex sein können, dar.*

IV. Abschnitt.

Die ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeine Theorie der ebenen Schnitte.

§ 106. Beziehung des ebenen Schnittes zu einer Geraden.

1. Allgemeine Darstellung der Schnittkurve. Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene wird in gemeinen Koordinaten x, y, z *durch die beiden Gleichungen:*

(1) $g(x, y, z) = 0,$ (2) $ux + vy + wz + s = 0$

und in homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z, t durch die beiden Gleichungen:

(3) $f(x, y, z, t) = 0,$ (4) $ux + vy + wz + st = 0$

dargestellt. Hier haben g und f die Bedeutung § 66, (1) und (3) und sind u, v, w, s die homogenen Koordinaten der schneidenden Ebene.

2. Schnittpunkte der Schnittkurve mit einer Geraden. Liegt eine gerade Linie in der schneidenden Ebene, so sind ihre Schnittpunkte mit der Fläche zugleich auch ihre Schnittpunkte mit der Schnittkurve der Fläche und der Ebene.

Ist nun die Gerade in der Form (§ 67, (2)):

(5) $x = x_0 + \alpha\sigma, \quad y = y_0 + \beta\sigma, \quad z = z_0 + \gamma\sigma$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (2), wenn:

(6) $ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0,$ (7) $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$

Ihre Schnittpunkte mit der Kurve (1), (2) sind dann, wie § 67, (4), durch die quadratische Gleichung:

(8) $h(\alpha, \beta, \gamma)\sigma^2 + 2(g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3^0\gamma)\sigma + g^0 = 0$

bestimmt.

Ist die Gerade dagegen in der Parameterstellung (§ 67, (6)):

(9) $x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2, \quad t = t_1 + \lambda t_2$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (4), wenn:

(10) $ux_1 + vy_1 + wz_1 + st_1 = 0,$ (11) $ux_2 + vy_2 + wz_2 + st_2 = 0,$

und ihre Schnittpunkte mit der Kurve (3), (4) sind, wie § 67, (7), durch die Gleichung:

(12) $$f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22} = 0$$

bestimmt.

3. Tangente in einem Punkte der Schnittkurve. Wenn der Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ in (5) nicht nur der Gleichung (6), sondern auch der Gleichung (§ 66, (9)):

(13) $$g^0 = g_1{}^0 x_0 + g_2{}^0 y_0 + g_3{}^0 z_0 + g_4{}^0 = 0$$

entspricht, so liegt er auf der Schnittkurve (1), (2) selbst. Ist dann außerdem in (8):

(14) $$g_1{}^0 \alpha + g_2{}^0 \beta + g_3{}^0 \gamma = 0,$$

so fallen die beiden Schnittpunkte der Geraden (5) mit der Kurve (1), (2) im Punkte P_0 zusammen.

Eine durch den Punkt x_0, y_0, z_0 der Schnittkurve (1), (2) *in der Richtung α, β, γ laufende Gerade ist Tangente der Kurve in ihm, wenn neben* (6) *und* (13) *die Bedingungen* (7) *und* (14) *erfüllt sind.*

Liegt der Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$, indem neben (10) auch:

(15) $$f_{11} = f_1{}^{(1)} x_1 + f_2{}^{(1)} y_1 + f_3{}^{(1)} z_1 + f_4{}^{(1)} t_1$$

ist, auf der Kurve (3), (4) selbst und ist neben (11) noch:

(16) $$f_{12} = f_1{}^{(1)} x_2 + f_2{}^{(1)} y_2 + f_3{}^{(1)} z_2 + f_4{}^{(1)} t_2 = 0,$$

so fallen die beiden Schnittpunkte der Geraden (9) mit der Kurve (3), (4) im Punkte P_1 zusammen.

Eine den Punkt x_1, y_1, z_1, t_1 der Schnittkurve (3), (4) *mit dem Punkte x_2, y_2, z_2, t_2 verbindende Gerade ist Tangente der Kurve in x_1, y_1, z_1, t_1, wenn neben* (10) *und* (15) *die Bedingungen* (11) *und* (16) *erfüllt sind.*

4. Normale der Schnittkurve. Für die Richtungskosinus α, β, γ der Tangente der Kurve (1), (2) im Punkte x_0, y_0, z_0 gelten die Gleichungen (7) und (14). *Für die Richtungskosinus α', β', γ' der Normale der Kurve in diesem Punkte* ist dann:

$$\alpha'\alpha + \beta'\beta + \gamma'\gamma = 0,$$
$$u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0,$$

oder wenn man mittels (7) und (14) α, β, γ eliminiert:

(17) $$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ u & v & w \\ g_1{}^0 & g_2{}^0 & g_3{}^0 \end{vmatrix} = 0, \quad u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0.$$

5. Doppelpunkte der Schnittkurve. Die Bedingung (14) ist für alle in der Ebene (2) durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehenden Richtungen α, β, γ erfüllt, wenn sie eine Folge der Bedingung (7) ist, also:

(18) $$g_1{}^0 : g_2{}^0 : g_3{}^0 = u : v : w$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

(19) $$g_1{}^0 + \varrho u = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho v = 0, \quad g_3{}^0 + \varrho w = 0.$$

Ein solcher Punkt der Schnittkurve (1), (2), *der die Eigenschaft hat, daß alle durch ihn gehenden Geraden der Ebene* (2) *Tangenten der Kurve in ihm sind, ist ein Doppelpunkt der Schnittkurve.*

Die Gleichung (13) wird infolge von (19):

$$-\varrho(x_0 u + y_0 v + z_0 w) + g_4{}^0 = 0$$

oder nach (6):

$$g_4{}^0 + \varrho s = 0.$$

Ein Doppelpunkt x_0, y_0, z_0 der Schnittkurve (1), (2) *ist daher durch die Gleichungen:*

(20) $$\begin{cases} g_1{}^0 + \varrho u = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho v = 0, \quad g_3{}^0 + \varrho w = 0, \quad g_4{}^0 + \varrho s = 0, \\ u x_0 + v y_0 + w z_0 + s = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet, welche die Gleichung (13) schon zur Folge haben.

Die Bedingung (16) ist für alle der Gleichung (11) entsprechenden Punkte x_2, y_2, z_2, t_2 erfüllt, wenn (I § 51, (3)):

(21) $$f_1^{(1)} : f_2^{(1)} : f_3^{(1)} : f_4^{(1)} = u : v : w : s$$

oder:

Ein Doppelpunkt x_1, y_1, z_1, t_1 der Schnittkurve (3), (4) *ist durch die Gleichungen:*

(22) $$\begin{cases} f_1^{(1)} + \varrho u = 0, \quad f_2^{(1)} + \varrho v = 0, \quad f_3^{(1)} + \varrho w = 0, \quad f_4^{(1)} + \varrho s = 0, \\ u x_1 + v y_1 + w z_1 + s t_1 = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet, welche die Gleichung (15) zur Folge haben.[49])

6. Tangentialebene als schneidende Ebene. Wenn zwischen den Koordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 eines Punktes und den Koordinaten u, v, w, s einer Ebene die Gleichungen (22) bestehen, so liegt der Punkt nach (15) auf der Fläche (3) und kann die Gleichung (4) der Ebene in der Form:

(23) $$f_1^{(1)} x + f_2^{(1)} y + f_3^{(1)} z + f_4^{(1)} t = 0$$

geschrieben werden. Sie ist nach § 67, (17) die Tangentialebene der Fläche im Punkte x_1, y_1, z_1, t_1.

Ist umgekehrt x_1, y_1, z_1, t_1 ein Punkt der Fläche, so sind für die Koordinaten u, v, w, s seiner Tangentialebene (23) die Bedingungen (22) erfüllt.

Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene hat daher immer dann und nur dann einen Doppelpunkt, wenn die Ebene Tangentialebene der Fläche ist. Der Doppelpunkt der Schnittkurve ist dann der Berührungspunkt der Tangentialebene.[178])

7. Mittelpunkt der Schnittkurve. Der Punkt x_0, y_0, z_0 der geraden Linie (5) ist der Mittelpunkt der beiden Schnittpunkte der Linie mit der Kurve (1), (2), wenn in (8):

(24) $$g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3{}^0\gamma = 0.$$

Diese Bedingung ist nach (7) insbesondere für *alle* in der Ebene (2) durch x_0, y_0, z_0 gehenden Geraden erfüllt, wenn:

(25) $$g_1{}^0 : g_2{}^0 : g_3{}^0 = u : v : w.$$

Ein solcher Punkt, der alle durch ihn gehenden Sehnen der Schnittkurve halbiert, ist *Mittelpunkt der Kurve* (§ 11, 4).

Der Mittelpunkt der Kurve (1), (2) *ist somit durch die Gleichungen:*

(26) $$\begin{cases} g_1{}^0 + \varrho u = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho v = 0, \quad g_3{}^0 + \varrho w = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet.[6])

§ 107. Einteilung der ebenen Schnitte nach dem Rang.

1. Allgemeine Gleichungen der Doppelelemente. Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung § 106, (3) mit der Ebene u, v, w, s hat nach § 106, (22) einen *Doppelpunkt* x, y, z, t, wenn die fünf Bedingungen:

(1) $$\begin{cases} f_1 + \varrho u = 0, \quad f_2 + \varrho v = 0, \quad f_3 + \varrho w = 0, \quad f_4 + \varrho s = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0, \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben[49]):

(2) $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + \varrho u = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + \varrho v = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + \varrho w = 0, \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + \varrho s = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0 \end{cases}$$

unter Elimination von ϱ erfüllt sind. Sie werden aber bei Elimination von ϱ in der Form:

(3) $$\frac{f_1}{u} = \frac{f_2}{v} = \frac{f_3}{w} = \frac{f_4}{s},$$

(4) $$ux + vy + wz + st = 0$$

in x, y, z, t linear und homogen. Sie können also dann als Gleichungen von *vier Ebenen* betrachtet werden, denen der Punkt x, y, z, t angehören muß. Je nachdem diese vier Ebenen keinen oder einen Punkt oder eine Achse gemein haben oder alle vier zusammenfallen, *wird die Schnittkurve keinen oder einen Doppelpunkt oder eine Doppelachse oder eine Doppelebene haben.* Sie wird danach ein *eigentlicher Kegelschnitt*, ein *Strahlenpaar* oder ein *Doppelstrahl* sein, oder *die schneidende Ebene u, v, w, s wird* alle ihre Punkte mit der Fläche gemein haben, also *selbst ein Bestandteil der Fläche* sein (§ 18, **1**; § 19, **9**).

2. Schnittkurven ohne Doppelpunkt. Die in x, y, z, t, ϱ linearen homogenen Gleichungen (2) können nur bestehen, wenn „*die mit den Koordinaten u, v, w, s der Ebene geränderte Determinante A der Fläche*“[119]*):*

$$(5) \qquad A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es folgt daher:

Die Schnittkurve § 106, (3), (4) *hat keinen Doppelpunkt, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:*

$$(6) \qquad A^u \neq 0 \cdot$$

3. Schnittkurven mit Doppelelementen überhaupt. Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines oder mehrerer Doppelpunkte ist dagegen:

$$(7) \qquad A^u = 0 .$$

Sie ist nach § 106, **6** zugleich die Bedingung dafür, daß u, v, w, s eine *Tangentialebene* der Fläche ist.[178])

Die Entwicklung der Determinante (5) nach der letzen Zeile und Kolonne gibt für die Gleichung (7):

$$(8) \qquad -A^u = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv + 2A_{14}us + 2A_{24}vs + 2A_{34}ws + A_{44}s^2 = 0.$$

Alle Ebenen u, v, w, s, welche die Fläche § 106, (3) *in einem nicht eigentlichen Kegelschnitt schneiden und daher Tangentialebenen sind, genügen der Bedingung* (8).

Sie wurde unter der Voraussetzung $A \neq 0$ schon in § 78, (7)

als Gleichung der eigentlichen Fläche in laufenden Ebenenkoordinaten erhalten

Die Bedingung (8) ist identisch in u, v, w, s erfüllt, wenn alle A_{kl} verschwinden, also die Fläche zweiter Ordnung ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene ist (§ 81, (27)).

4. Die Unterdeterminanten vierten Grades von A^u. Wir bezeichnen mit $A^u_{kl}(k\,l = 1, 2, 3, 4, 5)$ die Unterdeterminanten vierten Grades der Determinante fünften Grades A^u. Sie zerfallen in drei Arten: erstens die sechszehn $A^u_{kl}(k, l = 1, 2, 3, 4)$, die durch Ränderung der A_{kl} (§ 66, 6) entstehen, z. B.:

$$(9)\qquad A^u_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & s \\ u & w & s & 0 \end{vmatrix} \quad \text{neben } A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

zweitens die acht $(k = 1, 2, 3, 4)$:

$$(10)\qquad A^u_{k5} = A^u_{5k} = -(A_{k1}u + A_{k2}v + A_{k3}w + A_{k4}s);$$

drittens die eine:

$$(11)\qquad A^u_{55} = A.$$

Falls die Determinante A^u verschwindet, ist für $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$(12)\qquad \begin{cases} a_{11}A^u_{k1} + a_{12}A^u_{k2} + a_{13}A^u_{k3} + a_{14}A^u_{k4} + uA^u_{k5} = 0, \\ a_{21}A^u_{k1} + a_{22}A^u_{k2} + a_{23}A^u_{k3} + a_{24}A^u_{k4} + vA^u_{k5} = 0, \\ a_{31}A^u_{k1} + a_{32}A^u_{k2} + a_{33}A^u_{k3} + a_{34}A^u_{k4} + wA^u_{k5} = 0, \\ a_{41}A^u_{k1} + a_{42}A^u_{k2} + a_{43}A^u_{k3} + a_{44}A^u_{k4} + sA^u_{k5} = 0. \end{cases}$$

Ist jetzt:

$$(13)\qquad A^u_{k1} = 0,\quad A^u_{k2} = 0,\quad A^u_{k3} = 0,\quad A^u_{k4} = 0,\quad k = 1, 2, 3, 4,$$

so folgt aus (12), da u, v, w, s nicht alle verschwinden können:

$$(14)\qquad A^u_{k5} = A^u_{5k} = 0,\quad k = 1, 2, 3, 4;$$

damit aber wieder aus (12) mit $k = 5$:

$$(15)\qquad A^u_{55} = A = 0.$$

I. *Wenn also neben A^u selbst die sechszehn Unterdeterminanten* (13) *sämtlich verschwinden, so verschwinden auch die neun Unterdeterminanten* (14) *und* (15) (§ 44, **10**).

5. Schnittkurve mit einem bestimmten Doppelpunkt. Unter der Voraussetzung (7) ergibt die Auflösung der Gleichungen (2):

$$(16)\qquad x : y : z : t : \varrho = A^u_{k1} : A^u_{k2} : A^u_{k3} : A^u_{k4} : A^u_{k5},$$

$k = 1, 2, 3, 4$ oder 5, und daher unter Elimination von ϱ (§ 79, (4)):

(17) $$x : y : z : t = A^u_{k1} : A^u_{k2} : A^u_{k3} : A^u_{k4},$$

$k = 1, 2, 3, 4$ oder 5. Die Verhältnisse (17) sind bestimmt, wenn A^u_{k1}, A^u_{k2}, A^u_{k3}, A^u_{k4} ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) nicht sämtlich verschwinden; dazu dürfen aber nach 4, I schon A^u_{k1}, A^u_{k2}, A^u_{k3}, A^u_{k4} ($k = 1, 2, 3, 4$) nicht sämtlich verschwinden.

Die Schnittkurve hat daher immer dann und nur dann einen bestimmten Doppelpunkt, mit den Koordinaten (17), *wenn*[76]*:*

(18) $$A^u = 0, \quad \textit{aber} \quad A^u_{kl} \; (k, l = 1, 2, 3, 4) \quad \textit{nicht alle } 0.$$

Sind dabei die Bedingungen (14) und (15) erfüllt, so wird nach (16) $\varrho = 0$, und die Gleichungen (2) stimmen mit den Gleichungen § 67, (32) für den Doppelpunkt der Fläche selbst überein.

6. Andere Form der Bedingungen eines bestimmten Doppelpunktes. Für die Determinante fünften Grades (5) ist unbedingt (entsprechend wie I Anm. 1, III, (9)):

(19) $$\begin{vmatrix} A^u_{22} & A^u_{23} \\ A^u_{32} & A^u_{33} \end{vmatrix} = A^u \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & u \\ a_{41} & a_{44} & s \\ u & s & 0 \end{vmatrix} = A^u \alpha^u_{44},$$

wo wir allgemein mit α^u_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) die mit den Koordinaten der Ebene u, v, w, s geränderten Unterdeterminanten α_{kl} bezeichnen, z. B.:

(20) $$\alpha^u_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & v \\ a_{31} & a_{32} & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \quad \text{neben} \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Mit Hinzufügung der entsprechenden Formeln ist:

(21) $$\begin{cases} A^u_{22} A^u_{33} - (A^u_{23})^2 = A^u \alpha^u_{44}, & A^u_{33} A^u_{11} - (A^u_{31})^2 = A^u \alpha^u_{55}, \\ & A^u_{11} A^u_{22} - (A^u_{12})^2 = A^u \alpha^u_{66}, \\ A^u_{11} A^u_{44} - (A^u_{14})^2 = A^u \alpha^u_{11}, & A^u_{22} A^u_{44} - (A^u_{24})^2 = A^u \alpha^u_{22}, \\ & A^u_{33} A^u_{44} - (A^u_{34})^2 = A^u \alpha^u_{33}. \end{cases}$$

Setzt man daher zur Abkürzung (§ 79, (5); (6)):

(22) $$A'^u = A^u_{11} + A^u_{22} + A^u_{33} + A^u_{44},$$

(23) $$A''^u = \alpha^u_{11} + \alpha^u_{22} + \alpha^u_{33} + \alpha^u_{44} + \alpha^u_{55} + \alpha^u_{66},$$

so folgt ebenso wie in § 79, (9) zunächst:

(24) $$\begin{cases} A'^u A^u_{11} = (A^u_{11})^2 + (A^u_{12})^2 + (A^u_{13})^2 + (A^u_{14})^2 + A^u(\alpha^u_{11} + \alpha^u_{55} + \alpha^u_{66}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'^u A^u_{44} = (A^u_{41})^2 + (A^u_{42})^2 + (A^u_{43})^2 + (A^u_{44})^2 + A^u(\alpha^u_{11} + \alpha^u_{22} + \alpha^u_{33}) \end{cases}$$

und danach *die identische Gleichung*[80]):

(25) $$(A'^u)^2 = (A^u_{11})^2 + (A^u_{22})^2 + (A^u_{33})^2 + (A^u_{44})^2 + 2(A^u_{23})^2 + 2(A^u_{31})^2 + 2(A^u_{12})^2 + 2(A^u_{14})^2 + 2(A^u_{24})^2 + 2(A^u_{34})^2 + 2A^u A''^u.$$

Wenn nun $A^u = 0$ und $A'^u = 0$, verschwinden nach (25) alle A^u_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4)$. Wenn dagegen alle $A^u_{kl} = 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, verschwindet nach (22) A'^u und, da für die Determinante fünften Grades:

$$|A^u_{kl}| = (A^u)^4$$

ist (entsprechend wie I Anm. 1, III, (7)), auch A^u.

Daher sind die Bedingungen:

(26) $$A^u = 0, \quad \textit{alle} \quad A^u_{kl} = 0 \ (k = 1, 2, 3, 4)$$

gleichbedeutend mit:

(27) $$A^u = 0, \quad A'^u = 0;$$

ferner die Bedingungen (18) *eines bestimmten Doppelpunktes gleichbedeutend mit*:

(28) $$A^u = 0, \quad A'^u \neq 0.$$

7. Schnittkurve mit bestimmter Doppelachse. Der Doppelpunkt (17) wird *unbestimmt*, wenn die Bedingungen (26) oder (27) erfüllt sind. In diesem Falle gehen also die vier Ebenen (3), (4), falls sie nicht alle vier zusammenfallen (vgl. 9), durch eine gemeinsame *Achse*. Diese wird schon durch *zwei* von den Gleichungen (3), etwa durch:

(29) $$f_2 w - f_3 v = 0, \quad ux + vy + wz + st = 0$$

in laufenden Koordinaten x, y, z, t dargestellt oder, was dasselbe ist, durch die zweite, dritte und fünfte Gleichung (2) *unter Elimination von* ϱ.

Die gleichzeitige Elimination von x und ϱ aus den drei genannten Gleichungen gibt aber in:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t & v \\ a_{31} & a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t & w \\ u & vy + wz + st & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(30) $$\alpha^u_{13} y - \alpha^u_{12} z + \alpha^u_{14} t = 0$$

die Projektion der Achse (29) auf die yz-Ebene. Ebenso gibt die Elimination von y und ϱ oder z und ϱ:

(30′) $$\alpha^u_{11} z - \alpha^u_{13} x + \alpha^u_{15} t = 0, \quad \alpha^u_{12} x - \alpha^u_{11} y + \alpha^u_{16} t = 0.$$

Wie hier die zweite und dritte, könnte man aber auch irgend zwei andere der vier ersten Gleichungen (2) mit der fünften verbinden.

Damit ergibt sich aber (I § 48, (11)):

Die Schnittkurve ist unter den Voraussetzungen (26) *oder* (27) *eine Doppelgerade mit den Achsenkoordinaten* (§ 81, (2))[79]):

$$(31)\qquad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = \alpha^u_{k1} : \alpha^u_{k2} : \alpha^u_{k3} : \alpha^u_{k4} : \alpha^u_{k5} : \alpha^u_{k6}\,,$$
$$k = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ oder } 6.$$

Die Doppelgerade ist bestimmt, wenn noch die weitere Voraussetzung hinzugefügt wird, daß:

$$(32)\qquad \alpha^u_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad \textit{nicht alle } 0.$$

Da aus (26) nach 4, I die Gleichung (15) folgt, so ergibt sich:

Eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ($A \neq 0$) *kann von einer Ebene niemals in einer Doppelgeraden geschnitten werden, sondern nur in einem eigentlichen Kegelschnitt oder einem getrennten Linienpaar.*

Beim *Kegel* ($A = 0$, $A' \neq 0$) muß jede in einer Doppellinie schneidende Ebene nach (14) und (10) durch die *Spitze* gehen (§ 79, (4)).

8. Andere Form der Bedingungen einer Doppellinie. Durch Multiplikation der Entwicklungen:

$$(33)\quad \begin{cases} -A^u_{11} = \alpha_{66}v^2 + \alpha_{55}w^2 + \alpha_{11}s^2 - 2\alpha_{15}ws + 2\alpha_{16}vs - 2\alpha_{56}vw\,, \\ -A^u_{22} = \alpha_{44}w^2 + \alpha_{66}u^2 + \alpha_{22}s^2 - 2\alpha_{26}us + 2\alpha_{24}ws - 2\alpha_{64}wu\,, \\ -A^u_{33} = \alpha_{55}u^2 + \alpha_{44}v^2 + \alpha_{33}s^2 - 2\alpha_{34}vs + 2\alpha_{35}us - 2\alpha_{45}uv\,, \\ -A^u_{44} = \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 + 2\alpha_{23}vw + 2\alpha_{31}wu + 2\alpha_{12}uv \end{cases}$$

mit u^2, v^2, w^2, s^2 und Addition folgt:

$$(34)\quad \begin{cases} -(A^u_{11}u^2 + A^u_{22}v^2 + A^u_{33}w^2 + A^u_{44}s^2) = 2\alpha_{11}u^2s^2 + 2\alpha_{22}v^2s^2 \\ \qquad\qquad + 2\alpha_{33}w^2s^2 + 2\alpha_{44}v^2w^2 + 2\alpha_{55}w^2u^2 + 2\alpha_{66}u^2v^2 \\ -2\alpha_{15}u^2ws + 2\alpha_{16}u^2vs - 2\alpha_{56}u^2vw - 2\alpha_{26}v^2us + 2\alpha_{24}v^2ws - 2\alpha_{64}v^2wu \\ -2\alpha_{34}w^2vs + 2\alpha_{35}w^2us - 2\alpha_{45}w^2uv + 2\alpha_{23}vws^2 + 2\alpha_{31}wus^2 + 2\alpha_{12}uvs^2. \end{cases}$$

Andererseits ist:

$$(35)\quad \begin{cases} -\alpha^u_{11} = a_{22}w^2 + a_{33}v^2 - 2a_{23}vw, & -\alpha^u_{44} = a_{11}s^2 + a_{44}u^2 - 2a_{14}us, \\ -\alpha^u_{22} = a_{33}u^2 + a_{11}w^2 - 2a_{31}wu, & -\alpha^u_{55} = a_{22}s^2 + a_{44}v^2 - 2a_{24}vs, \\ -\alpha^u_{33} = a_{11}v^2 + a_{22}u^2 - 2a_{12}uv, & -\alpha^u_{66} = a_{33}s^2 + a_{44}w^2 - 2a_{34}ws, \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} \alpha^u_{14} = a_{31}vs - a_{12}ws + a_{24}wu - a_{34}uv\,, \\ \alpha^u_{25} = a_{12}ws - a_{23}us + a_{34}uv - a_{14}vw\,, \\ \alpha^u_{36} = a_{23}us - a_{31}vs + a_{14}vw - a_{24}wu\,, \end{cases}$$

und hieraus:

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha^u_{11}\alpha^u_{44}+\alpha^u_{22}\alpha^u_{55}+\alpha^u_{33}\alpha^u_{66})-(\alpha^u_{14}\alpha^u_{14}+\alpha^u_{25}\alpha^u_{25}+\alpha^u_{36}\alpha^u_{36})\\ &=2\alpha_{11}u^2s^2+2\alpha_{22}v^2s^2+2\alpha_{33}w^2s^2+2\alpha_{44}v^2w^2+2\alpha_{55}w^2u^2+2\alpha_{66}u^2v^2\\ &-2\alpha_{15}u^2ws+2\alpha_{16}u^2vs-2\alpha_{56}u^2vw-2\alpha_{26}v^2us+2\alpha_{24}v^2ws-2\alpha_{64}v^2w\\ &-2\alpha_{34}w^2vs+2\alpha_{35}w^2us-2\alpha_{45}w^2uv+2\alpha_{23}vws^2+2\alpha_{31}wus^2+2\alpha_{12}uvs \end{aligned}\right.$$

Nach (34) und (37) ist daher:

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha^u_{11}\alpha^u_{44}+\alpha^u_{22}\alpha^u_{55}+\alpha^u_{33}\alpha^u_{66})-(\alpha^u_{14}\alpha^u_{14}+\alpha^u_{25}\alpha^u_{25}+\alpha^u_{36}\alpha^u_{36})\\ &\qquad=-(A^u_{11}u^2+A^u_{22}v^2+A^u_{33}w^2+A^u_{44}s^2). \end{aligned}\right.$$

Für die Determinante vierten Grades A^u_{11} ist nun unbedingt (I Anm. 1, III, (9)):

$$(39)\qquad \begin{vmatrix}\alpha^u_{55} & \alpha^u_{51}\\ \alpha^u_{15} & \alpha^u_{11}\end{vmatrix}=A^u_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & v\\ v & 0\end{vmatrix}=-A^u_{11}v^2.$$

In derselben Weise erhält man die Gruppe von Formeln:

$$(40)\left\{\begin{aligned} &v^2A^u_{11}=(\alpha^u_{15})^2-\alpha^u_{11}\alpha^u_{55}, && u^2A^u_{22}=(\alpha^u_{26})^2-\alpha^u_{22}\alpha^u_{66}, && u^2A^u_{33}=(\alpha^u_{34})^2-\alpha^u_{33}\alpha^u_{44},\\ &w^2A^u_{11}=(\alpha^u_{16})^2-\alpha^u_{11}\alpha^u_{66}, && u^2A^u_{22}=(\alpha^u_{24})^2-\alpha^u_{22}\alpha^u_{44}, && v^2A^u_{33}=(\alpha^u_{35})^2-\alpha^u_{33}\alpha^u_{55},\\ &s^2A^u_{11}=(\alpha^u_{56})^2-\alpha^u_{55}\alpha^u_{66}, && s^2A^u_{22}=(\alpha^u_{46})^2-\alpha^u_{44}\alpha^u_{66}, && s^2A^u_{33}=(\alpha^u_{45})^2-\alpha^u_{44}\alpha^u_{55},\\ &u^2A^u_{44}=(\alpha^u_{23})^2-\alpha^u_{22}\alpha^u_{33}, && v^2A^u_{44}=(\alpha^u_{13})^2-\alpha^u_{11}\alpha^u_{33}, && w^2A^u_{44}=(\alpha^u_{12})^2-\alpha^u_{11}\alpha^u_{22}. \end{aligned}\right.$$

Danach folgt aus (23):

$$(41)\left\{\begin{aligned} A''^u\alpha^u_{11}&=(\alpha^u_{11})^2+(\alpha^u_{12})^2+(\alpha^u_{13})^2+\alpha^u_{11}\alpha^u_{44}+(\alpha^u_{15})^2+(\alpha^u_{16})^2-(v^2+w^2)(A^u_{11}+A^u_{44}),\\ A''^u\alpha^u_{22}&=(\alpha^u_{21})^2+(\alpha^u_{22})^2+(\alpha^u_{23})^2+(\alpha^u_{24})^2+\alpha^u_{22}\alpha^u_{55}+(\alpha^u_{26})^2-(w^2+u^2)(A^u_{22}+A^u_{44}),\\ A''^u\alpha^u_{33}&=(\alpha^u_{31})^2+(\alpha^u_{32})^2+(\alpha^u_{33})^2+(\alpha^u_{34})^2+(\alpha^u_{35})^2+\alpha^u_{33}\alpha^u_{66}-(u^2+v^2)(A^u_{33}+A^u_{44}),\\ A''^u\alpha^u_{44}&=\alpha^u_{44}\alpha^u_{11}+(\alpha^u_{42})^2+(\alpha^u_{43})^2+(\alpha^u_{44})^2+(\alpha^u_{45})^2+(\alpha^u_{46})^2-(u^2+s^2)(A^u_{22}+A^u_{33}),\\ A''^u\alpha^u_{55}&=(\alpha^u_{51})^2+\alpha^u_{55}\alpha^u_{22}+(\alpha^u_{53})^2+(\alpha^u_{54})^2+(\alpha^u_{55})^2+(\alpha^u_{56})^2-(v^2+s^2)(A^u_{33}+A^u_{11}),\\ A''^u\alpha^u_{66}&=(\alpha^u_{61})^2+(\alpha^u_{62})^2+\alpha^u_{66}\alpha^u_{33}+(\alpha^u_{64})^2+(\alpha^u_{65})^2+(\alpha^u_{66})^2-(w^2+s^2)(A^u_{11}+A^u_{22}). \end{aligned}\right.$$

Durch Addition dieser Gleichungen und der Gleichung (38) in der Form:

$$(42)\qquad \begin{aligned} &2(\alpha^u_{11}\alpha^u_{44}+\alpha^u_{22}\alpha^u_{55}+\alpha^u_{33}\alpha^u_{66})\\ &=2\{(\alpha^u_{14})^2+(\alpha^u_{25})^2+(\alpha^u_{36})^2\}-2(A^u_{11}u^2+A^u_{22}v^2+A^u_{33}w^2+A^u_{44}s^2) \end{aligned}$$

folgt aber *die identische Gleichung*[80]):

$$(43)\qquad \begin{aligned} (A''^u)^2&=(\alpha^u_{11})^2+(\alpha^u_{22})^2+(\alpha^u_{33})^2+(\alpha^u_{44})^2+(\alpha^u_{55})^2+(\alpha^u_{66})^2\\ &2\{(\alpha^u_{12})^2+(\alpha^u_{13})^2+(\alpha^u_{14})^2+(\alpha^u_{15})^2+(\alpha^u_{16})^2+(\alpha^u_{23})^2+(\alpha^u_{24})^2+(\alpha^u_{25})^2\\ &+(\alpha^u_{26})^2+(\alpha^u_{34})^2+(\alpha^u_{35})^2+(\alpha^u_{36})^2+(\alpha^u_{45})^2+(\alpha^u_{46})^2+(\alpha^u_{56})^2\}\\ &-2A'^u(u^2+v^2+w^2+s^2). \end{aligned}$$

Wenn daher $A'^u=0$ ist, so folgt aus $A''^u=0$ das Verschwinden aller α^u_{kl} und umgekehrt.

Daher sind die Bedingungen:

(44) $A^u = 0, \quad A'^u = 0,$ *alle* $\alpha^u_{kl} = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

gleichbedeutend mit:

(45) $$A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u = 0;$$

ferner die Bedingungen (27) *und* (32) *einer Doppellinie gleichbedeutend mit:*

(46) $$A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u \neq 0.$$

9. Die schneidende Ebene gehört der Fläche an. Die Doppellinie (31) wird unbestimmt, wenn die Bedingungen (44) oder (45) erfüllt sind. Dann fallen die beiden Ebenen (29) zusammen. Die aus der Matrix ihrer Koeffizienten:

(47) $$\begin{vmatrix} wa_{21} - va_{31} & wa_{22} - va_{32} & wa_{23} - va_{33} & wa_{24} - va_{34} \\ u & v & w & s \end{vmatrix}$$

gebildeten Determinanten sind in der Tat die Unterdeterminanten $\alpha^u_{11}, \alpha^u_{12}, \alpha^u_{13}, \alpha^u_{14}, \alpha^u_{15}, \alpha^u_{16}$, die nach (44) verschwinden. Ebenso fallen alle Ebenen (3), (4) in eine zusammen. Jeder Punkt der schneidenden Ebene ist daher Doppelpunkt der Schnittkurve.

Unter den Bedingungen (44) *oder* (45) *gehört die schneidende Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche an.*

Die Fläche muß daher selbst ein *Ebenenpaar* oder eine *Doppelebene* sein. Aus diesem Grunde sind nach § 81, (1) die Unterdeterminanten A_{kl} $(k = 1, 2, 3, 4)$ alle 0.

Die schneidende Ebene muß im Falle des *Ebenenpaares* durch dessen Achse gehen, so daß nach § 81, (2) (I § 48, (12')) die Gleichungen bestehen:

(48) $$\begin{cases} \alpha_{k6}v - \alpha_{k5}w + \alpha_{k1}s = 0, & \alpha_{k4}w - \alpha_{k6}u + \alpha_{k2}s = 0, \\ \alpha_{k5}u - \alpha_{k4}v + \alpha_{k3}s = 0, & \alpha_{k1}u + \alpha_{k2}v + \alpha_{k3}s = 0; \end{cases}$$

im Falle der *Doppelebene* sind schon alle $\alpha_{kl} = 0$ (§ 81, (20)).

Die linken Seiten von (48) sind aber die 48 Unterdeterminanten dritten Grades, welche A^u neben den 36 α^u_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ und den 16 A_{kl} noch besitzt, z. B.:

(49) $$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ v & w & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} & w \\ a_{42} & a_{43} & s \end{vmatrix} = \alpha_{16}v - \alpha_{15}w + \alpha_{11}s.$$

II. *Wenn also neben* A^u *und* A'^u *die* 36 *Unterdeterminanten* α^u_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ *sämtlich verschwinden, so verschwinden auch die* 16 A_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ *und die* 48 *übrigen Unterdeterminanten dritten Grades von* A^u *in* (5) (vgl. **4**, I).

II. Kapitel.

Das Hauptachsenproblem der ebenen Schnitte.

§ 108. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten der Schnittkurve.

1. Koordinatensystem in der schneidenden Ebene. Die Gleichung der die Fläche:

$$(1)\quad g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

schneidenden Ebene:

$$(2)\quad ux + vy + wz + s = 0$$

sei in der Hesseschen Normalform:

$$(3)\quad \frac{ux + vy + wz + s}{e} = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta = 0,$$

wo:

$$(4)\quad e = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

nicht verschwindet, wenn die Ebene (2) als endlich vorausgesetzt wird. Von den Koeffizienten:

$$(5)\quad \alpha_3 = \frac{u}{e},\quad \beta_3 = \frac{v}{e},\quad \gamma_3 = \frac{w}{e},\quad \delta = \frac{s}{e};$$

$$(5')\quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$

sind die drei ersten die Richtungskosinus der *Normale* ζ *der Ebene*.

Es sei nun $\Omega\xi\eta$ ein *beliebiges in der Ebene* (2) *liegendes* Koordinatensystem, dessen *Anfangspunkt* Ω die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und dessen *Achsen* ξ *und* η die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ haben, so daß:

$$(6)\quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0 \qquad (\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0 + \delta = 0),$$

$$(7)\quad \begin{cases} u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0 & (\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0), \\ u\alpha_2 + v\beta_2 + w\gamma_2 = 0 & (\alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 = 0). \end{cases}$$

2. Neues Koordinatensystem im Raume. Wir führen nun $\Omega\xi\eta\zeta$ als neues System im Raume ein, auf das wir von dem alten, $Oxyz$ mittels der Formeln übergehen:

$$(8)\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 \quad + \alpha_2 + \alpha_3\zeta, \\ y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = z_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \end{cases} \quad (9)\begin{cases} \xi = \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) + \gamma_1(z - z_0), \\ \eta = \alpha_2(x - x_0) + \beta_2(y - y_0) + \gamma_2(z - z_0), \\ \zeta = \alpha_3(x - x_0) + \beta_3(y - y_0) + \gamma_3(z - z_0). \end{cases}$$

Die Gleichung der Fläche (1) lautet in dem neuen System:

$$(10)\quad g(x, y, z) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{23}\eta\zeta + 2a'_{31}\zeta\xi + 2a'_{12}\xi\eta + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

wo die Koeffizienten die Werte § 66, (19)—(21) haben, und die Gleichung der Ebene (2) wird nach (3), (6), (9):

$$(11)\quad \zeta = 0.$$

In bezug auf das ebene System $\Omega\xi\eta$ ist daher die Gleichung der Schnittkurve (1), (2)[179]):

$$(12)\quad a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0.$$

3. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Der Punkt Ω und die Achsen ξ, η waren vorerst in der Ebene (2) beliebig gewählt.

Die Koeffizienten a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23} in (10) hängen nach § 66, (19) nur von der Richtung der Achsen ξ, η, aber nicht von Ω ab. Wir nennen nun die Richtungen der Achsen ξ und η zwei *Hauptachsenrichtungen* der Kurve (12), wenn sie senkrecht sind und[88]):

$$(13)\quad \begin{aligned} a'_{12} &= h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 \\ &= h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_1 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Koeffizienten:

$$(14)\quad a'_{11} = h(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \qquad a'_{22} = h(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$$

heißen alsdann *Hauptachsenkoeffizienten.*

Die Werte der Koeffizienten a'_{13}, a'_{23} sind:

$$(15)\quad \begin{cases} a'_{13} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3, \\ a'_{23} = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3; \end{cases}$$

und außerdem bestehen die Formeln:

$$(16)\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$

$$(17)\quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \qquad \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \alpha_3\gamma_2 = 0,$$

$$(18)\quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Die zehn Gleichungen (13)—(18) *enthalten somit die vollständige Erklärung der zehn Unbekannten* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; a'_{11}, a'_{22}; a'_{13}, a'_{23} *des Hauptachsenproblems.*

Die beiden Gruppen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a'_{11}, a'_{13}$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, a'_{22}, a'_{23}$ von je fünf Unbekannten sind *vertauschbar* (§ 88, 4).

Die Gleichungen (16) bis (18), neben denen noch (5') besteht, haben (§ 88, (7); (8)) zur Folge, daß:

(19) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1;$

(20) $\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0, \quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0, \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$

4. Notwendige Bedingungen für einzelne Gruppen. Aus den drei Gleichungen aus (14), (13), (15):

$$(21)\quad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1 = a'_{11}, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 = 0, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3 = a'_{13} \end{cases}$$

folgt durch Multiplikation mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und Addition mit Rücksicht auf (19); (20):

$$(22)\quad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\alpha_1 + a'_{13}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\beta_1 + a'_{13}\beta_3, \\ h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\gamma_1 + a'_{13}\gamma_3. \end{cases}$$

Die beiden Gruppen von fünf Unbekannten genügen daher jeweils den fünf Gleichungen:

$$(23)\begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\alpha_1 + a'_{13}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\beta_1 + a'_{13}\beta_3, \\ h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\gamma_1 + a'_{13}\gamma_3, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; \end{cases} \qquad (23')\begin{cases} h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\alpha_2 + a'_{23}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\beta_2 + a'_{23}\beta_3, \\ h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\gamma_2 + a'_{23}\gamma_3, \\ \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 = 0, \\ \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1. \end{cases}$$

5. Hinreichende Gleichungen für die zehn Unbekannten. Umgekehrt folgt aus den drei ersten Gleichungen (23) durch Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und Addition mit Rücksicht auf die vierte und fünfte (23) wieder die erste (21) oder (14), und ebenso aus (23') wieder die zweite (14). Multipliziert man ferner die drei ersten Gleichungen (23) mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und (23') mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und addiert, so folgt mit Rücksicht auf den Wert (13) von a'_{12} und die vierte (23') und (23):

$$a'_{12} = a'_{11}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$
$$a'_{12} = a'_{22}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

und daraus für $a'_{11} \neq a'_{22}$:

(24) $a'_{12} = 0, \qquad$ (25) $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$

übereinstimmend mit (13) und (18). Für $a'_{11} = a'_{22}$ folgt dagegen (24)

erst unter Hinzufügung von (25). Auch die Gleichungen (15) gehen mit Rücksicht auf (5′) aus (23), (23′) wieder hervor.

Die zehn Gleichungen (23) *und* (23′) *sind für die Unbekannten* a'_{11}, α_1, β_1, γ_1, a'_{13} und a'_{22}, α_2, β_2, γ_2, a'_{23} *an sich hinreichend, wenn* $a'_{11} \neq a'_{22}$, *dagegen erst in Verbindung mit* (25), *wenn* $a'_{11} = a'_{22}$ (§ 88, 6).

6. Die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten. Die vier ersten Gleichungen (23) lauten mit Rücksicht auf (5) ausführlich:

$$
(26)\qquad \begin{cases}
(a_{11} - a'_{11})\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 - \frac{u}{e}\, a'_{13} = 0,\\
a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - a'_{11})\beta_1 + a_{23}\gamma_1 - \frac{v}{e}\, a'_{13} = 0,\\
a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + (a_{33} - a'_{11})\gamma_1 - \frac{w}{e}\, a'_{13} = 0,\\
u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0,
\end{cases}
$$

und ebenso die Gleichungen (23′) mit a'_{22}, α_2, β_2, γ_2, a'_{23}, für a'_{11}, α_1, β_1, γ_1, a'_{13}. Da α_1, β_1, γ_1, $\frac{a'_{13}}{e}$ nach (16) nicht alle verschwinden können, muß die Determinante der in ihnen linearen und homogenen Gleichungen (26) verschwinden. Es folgt daher (§ 88, 7):

Jeder der beiden Hauptachsenkoeffizienten a'_{11}, a'_{22} *muß der in* λ *quadratischen Gleichung*[133]:

$$
(27)\qquad \mathsf{H}(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & u\\
a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & v\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & w\\
u & v & w & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

genügen. Sie heißt die *quadratische Gleichung des Hauptachsenproblems der Schnittkurve der Fläche* (1) *mit der Ebene* (2).

§ 109. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung.

1. Die Determinante und ihre Unterdeterminanten. Die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante:

$$
(1)\qquad \mathsf{H}(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & u\\
a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & v\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & w\\
u & v & w & 0
\end{vmatrix}
$$

sollen in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(2)\begin{cases} \mathsf{H}_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & w \\ v & w & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathsf{H}_{22}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{31} & w \\ a_{13} & a_{11}-\lambda & u \\ w & u & 0 \end{vmatrix}, \\ \mathsf{H}_{33}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & u \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}; \\ \mathsf{H}_{23}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & u \\ a_{31} & a_{32} & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathsf{H}_{31}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & v \\ a_{12} & a_{13} & u \\ v & w & 0 \end{vmatrix}, \\ \mathsf{H}_{12}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{31} & w \\ a_{23} & a_{21} & v \\ w & u & 0 \end{vmatrix}; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \mathsf{H}_{14}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{31} \\ v & w & u \end{vmatrix}, \quad \mathsf{H}_{24}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ w & u & v \end{vmatrix}, \\ \mathsf{H}_{34}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ u & v & w \end{vmatrix}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \mathsf{H}_{44}(\lambda) = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \quad (\S\ 88, (17)).$$

2. Entwicklung der Determinante. Die Differentialquotienten von $\mathsf{H}(\lambda)$ nach λ sind:

$$(5)\qquad \mathsf{H}'(\lambda) = -\mathsf{H}_{11}(\lambda) - \mathsf{H}_{22}(\lambda) - \mathsf{H}_{33}(\lambda),$$

$$(6)\qquad \mathsf{H}''(\lambda) = -2(u^2+v^2+w^2) = -2e^2 \quad (\S\ 108, (4)).$$

Nach der Maclaurinschen Reihe ist dann:

$$(7)\qquad \mathsf{H}(\lambda) = \mathsf{H}(0) + \mathsf{H}'(0)\lambda + \frac{1}{2}\mathsf{H}''(0)\lambda^2.$$

Nach § 107, (9); (20) ist nun:

$$(8)\qquad \mathsf{H}(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = A_{44}^{u};$$

$$(9)\qquad H_{11}(0) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} & w \\ v & w & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{11}^{u},\ H_{22}(0) = \alpha_{22}^{u},\ H_{33}(0) = \alpha_{33}^{u}.$$

Setzen wir daher zur Abkürzung (§ 89, (5)):

$$(10)\qquad A_{44}'^{u} = \alpha_{11}^{u} + \alpha_{22}^{u} + \alpha_{33}^{u},$$

so wird die *quadratische Gleichung* § 108, (27) *des Hauptachsenproblems der Schnittkurve:*

$$(11)\qquad H(\lambda) = -e^2\lambda^2 - A_{44}'^{u}\lambda + A_{44}^{u} = 0.$$

3. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Nach (11) ist der Differentialquotient von $H(\lambda)$ auch:

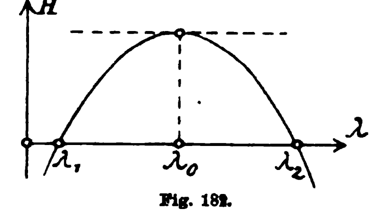


Fig. 182.

$$(12)\qquad H'(\lambda) = -2e^2\lambda - A_{44}'^{u}.$$

Die Wurzel der Gleichung $H'(\lambda) = 0$ ist daher (Fig. 182):

$$(13)\qquad \lambda = \lambda_0 = -\frac{A_{44}'^{u}}{2e^2},\quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

worauf identisch:

$$(14)\qquad H'(\lambda_0) = 0.$$

Mit (13) wird nun nach (11):

$$(15)\qquad 4e^2H(\lambda_0) = (A_{44}'^{u})^2 + 4e^2A_{44}^{u}.$$

Die Diskriminante der Gleichung (11), welche zunächst den Wert:

$$(16)\qquad \Theta = (A_{44}'^{u})^2 + 4e^2A_{44}^{u}$$

hat, *ist in der Form darstellbar:*

$$(17)\qquad \Theta = 4e^2H(\lambda_0).$$

4. Identische Gleichung zwischen $H(\lambda)$ und $H'(\lambda)$. Für die Determinante vierten Grades (1) ist (I Anm. 1, III, (9)):

$$\begin{vmatrix} H_{22}(\lambda) & H_{23}(\lambda) \\ H_{32}(\lambda) & H_{33}(\lambda) \end{vmatrix} = H(\lambda) \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & u \\ u & 0 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt und die beiden entsprechenden Gleichungen hinzugefügt:

$$(18)\qquad \begin{cases} H_{22}(\lambda)H_{33}(\lambda) - H_{23}^2(\lambda) = -\,u^2H(\lambda), \\ H_{33}(\lambda)H_{11}(\lambda) - H_{31}^2(\lambda) = -\,v^2H(\lambda), \\ H_{11}(\lambda)H_{22}(\lambda) - H_{12}^2(\lambda) = -\,w^2H(\lambda). \end{cases}$$

Multipliziert man jetzt die Gleichung (5) mit $-H_{11}(\lambda)$ und benutzt die beiden letzten Gleichungen (18), so folgt:

$$
(19) \begin{cases} -\mathsf{H}_{11}(\lambda)\mathsf{H}'(\lambda) = \mathsf{H}_{11}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{12}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{13}^2(\lambda) - (v^2 + w^2)\mathsf{H}(\lambda), \\ -\mathsf{H}_{22}(\lambda)\mathsf{H}'(\lambda) = \mathsf{H}_{21}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{22}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{23}^2(\lambda) - (w^2 + u^2)\mathsf{H}(\lambda), \\ -\mathsf{H}_{33}(\lambda)\mathsf{H}'(\lambda) = \mathsf{H}_{31}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{32}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{33}^2(\lambda) - (u^2 + v^2)\mathsf{H}(\lambda). \end{cases}
$$

Durch Addition dieser drei Formeln folgt nach (5) und (13) (§ 44, (40)):

Zwischen $H(\lambda)$, $H'(\lambda)$ und den sechs Unterdeterminanten (2) *besteht identisch in λ die Gleichung:*

$$
(20) \begin{cases} \mathsf{H}'^2(\lambda) = \mathsf{H}_{11}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{22}^2(\lambda) + \mathsf{H}_{33}^2(\lambda) + 2\mathsf{H}_{23}^2(\lambda) \\ \qquad + 2\mathsf{H}_{31}^2(\lambda) + 2\mathsf{H}_{12}^2(\lambda) - 2e^2\mathsf{H}(\lambda). \end{cases}
$$

5. Realität der Wurzeln der quadratischen Gleichung. Setzt man in (20) insbesondere $\lambda = \lambda_0$, so wird nach (14):

$$
0 = \mathsf{H}_{11}^2(\lambda_0) + \mathsf{H}_{22}^2(\lambda_0) + \mathsf{H}_{33}^2(\lambda_0) + 2\mathsf{H}_{23}^2(\lambda_0) + 2\mathsf{H}_{31}^2(\lambda_0) + 2\mathsf{H}_{12}^2(\lambda_0) - 2e^2\mathsf{H}(\lambda_0),
$$

und folgt nach (17):

Die Diskriminante Θ der quadratischen Gleichung (11) *ist als Summe von Quadraten in der Form darstellbar:*

$$
(21) \begin{cases} \frac{1}{2}\Theta = \mathsf{H}_{11}^2(\lambda_0) + \mathsf{H}_{22}^2(\lambda_0) + \mathsf{H}_{33}^2(\lambda_0) + 2\mathsf{H}_{23}^2(\lambda_0) \\ \qquad + 2\mathsf{H}_{31}^2(\lambda_0) + 2\mathsf{H}_{12}^2(\lambda_0), \end{cases}
$$

wo λ_0 den Wert (13) *hat und in* (13) A_{44}''' *aus* (10) *und* (9) *zu entnehmen ist.*

Da somit die Diskriminante Θ nicht negativ sein kann, so folgt:

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte sind stets reell.[133])

6. Bedingungen einer Doppelwurzel. Da die Diskriminante Θ nur verschwinden kann, wenn die sechs Quadrate in (21) einzeln verschwinden, so folgt:

I. *Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung* (11) *sind immer dann und nur dann einander gleich, wenn zwischen den Koeffizienten a_{kl} und u, v, w die sechs Bedingungen erfüllt sind:*

$$
(22) \begin{cases} \mathsf{H}_{11}(\lambda_0) = 0, \quad \mathsf{H}_{22}(\lambda_0) = 0, \quad \mathsf{H}_{33}(\lambda_0) = 0, \\ \mathsf{H}_{23}(\lambda_0) = 0, \quad \mathsf{H}_{31}(\lambda_0) = 0, \quad \mathsf{H}_{12}(\lambda_0) = 0, \end{cases}
$$

in denen λ_0 den Wert (13) *hat.*

Wenn die Gleichung (11) eine Doppelwurzel hat, so muß diese, da sie als solche auch der Gleichung (12) genügt, selbst den Wert (13) haben. Aber schon daraus, daß für eine Doppelwurzel λ:

$$
(23) \qquad \mathsf{H}(\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{H}'(\lambda) = 0,
$$

folgt nach (20), daß für sie auch:

$$(24) \qquad \begin{cases} H_{11}(\lambda) = 0, & H_{22}(\lambda) = 0, \quad H_{33}(\lambda) = 0, \\ H_{23}(\lambda) = 0, & H_{31}(\lambda) = 0, \quad H_{12}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

II. *Für eine Doppelwurzel λ der Gleichung* (11) *verschwinden daher stets die sechs Unterdeterminanten* (2).

Setzt man umgekehrt von einer Größe λ voraus, daß sie den sechs Gleichungen (24) genügt, so folgen für sie nach (18), wo u^2, v^2, w^2 nicht alle drei verschwinden können, und aus (5) die Gleichungen (23), welche λ als Doppelwurzel kennzeichnen.

III. *Wenn für eine Größe λ die sechs Unterdeterminanten* (2) *verschwinden, so ist sie eine Doppelwurzel der Gleichung* (11).

Statt daher die Gleichungen (22) mit dem *bestimmten* Werte (13) als Bedingungen der Doppelwurzel zu nehmen, kann man auch die Gleichungen (24) mit *unbestimmtem* Werte von λ benutzen und sagen:

IV. *Die Gleichung* (11) *hat immer dann und nur dann eine Doppelwurzel, wenn die sechs Gleichungen* (24) *durch ein und denselben Wert λ befriedigt werden können, der dann zugleich die Doppelwurzel ist.*

Kommt es auf dessen Kenntnis nicht an, so geben die Gleichungen (24) *unter Elimination von λ* die Bedingungen einer Doppelwurzel. Sie sind zwar nicht unabhängig voneinander, sollen aber der Symmetrie wegen als *„überzählige Bedingungen"* alle beibehalten werden.

7. Verschwindende Wurzeln. Für die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung (11) ist:

$$(25) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{A'^u_{44}}{e^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A^u_{44}}{e^2}; \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Daher sind für:

$$(26) \qquad \begin{cases} A^u_{44} \neq 0: \text{beide Wurzeln von Null verschieden;} \\ A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0: \text{eine Wurzel } \lambda_1 = 0, \text{ die andere } \lambda_2 = -\dfrac{A'^u_{44}}{e^2}; \\ A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} = 0: \text{beide Wurzeln } \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

8. Positive und negative Wurzeln. Aus (25) folgt für die Vorzeichen der Wurzeln (§ 21, (25)):

$$(27) \qquad \begin{cases} A^u_{44} < 0, \quad A'^u_{44} < 0: + + \\ A^u_{44} < 0, \quad A'^u_{44} > 0: - - \\ A^u_{44} > 0 \qquad\qquad\quad : \pm \mp. \end{cases}$$

§ 110. Bestimmung der Hauptachsenkoeffizienten und Hauptachsenrichtungen.

1. Die zu einer Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung. Jeder Hauptachsenkoeffizient a'_{kk} ($k = 1, 2$) ist nach § 108, (27) eine Wurzel λ_k der Gleichung $\mathsf{H}(\lambda) = 0$. Die zu ihm und damit *zu der Wurzel λ_k gehörige Hauptachsenrichtung* muß nach § 108, (26) den Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\alpha_k + a_{12}\beta_k + a_{13}\gamma_k - \frac{u}{e}\, a'_{k3} = 0, \\ a_{21}\alpha_k + (a_{22} - \lambda_k)\beta_k + a_{23}\gamma_k - \frac{v}{e}\, a'_{k3} = 0, \\ a_{31}\alpha_k + a_{32}\beta_k + (a_{33} - \lambda_k)\gamma_k - \frac{w}{e}\, a'_{k3} = 0, \\ u\alpha_k + v\beta_k + w\gamma_k = 0, \end{cases}$$

die eben *wegen* $\mathsf{H}(\lambda_k) = 0$ *miteinander verträglich* sind, genügen.

2. Die zu einer einfachen Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung. Ist nun λ_k eine einfache Wurzel, für die nach § 109, **6**, III niemals alle Unterdeterminanten § 109, (2) verschwinden, so geben die Gleichungen (1) für die Verhältnisse der Unbekannten ein einziges bestimmtes Wertsystem:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_k : \beta_k : \gamma_k : -\frac{a'_{k3}}{e} = \mathsf{H}_{11}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{12}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{13}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{14}(\lambda_k), \\ \qquad = \mathsf{H}_{21}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{22}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{23}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{24}(\lambda_k), \\ \qquad = \mathsf{H}_{31}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{32}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{33}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{34}(\lambda_k), \\ \qquad = \mathsf{H}_{41}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{42}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{43}(\lambda_k) : \mathsf{H}_{44}(\lambda_k). \end{cases}$$

Damit ist aber die Richtung α_k, β_k, γ_k bis auf die Pfeilspitze bestimmt.

Zu einer einfachen Wurzel λ_k gehört stets eine und nur eine den Gleichungen (1) *entsprechende Hauptachsenrichtung.*

Wie in § 90, (4), (5) folgt aus (2) auch[121]:

$$(3)\quad \begin{cases} \varrho\alpha_k^2 = \mathsf{H}_{11}(\lambda_k), \quad \varrho\beta_k^2 = \mathsf{H}_{22}(\lambda_k), \quad \varrho\gamma_k^2 = \mathsf{H}_{33}(\lambda_k), \\ \varrho\beta_k\gamma_k = \mathsf{H}_{23}(\lambda_k), \quad \varrho\gamma_k\alpha_k = \mathsf{H}_{31}(\lambda_k), \quad \varrho\alpha_k\beta_k = \mathsf{H}_{12}(\lambda_k), \end{cases}$$

$$(4)\quad \varrho = -\mathsf{H}'(\lambda_k),$$

$$(5)\quad -\varrho\frac{\alpha_k a'_{k3}}{e} = \mathsf{H}_{14}(\lambda_k), \quad -\varrho\frac{\beta_k a'_{k3}}{e} = \mathsf{H}_{24}(\lambda_k), \quad -\varrho\frac{\gamma_k a'_{k3}}{e} = \mathsf{H}_{34}(\lambda_k),$$

$$(6)\quad \varrho\frac{a'^2_{k3}}{e^2} = \mathsf{H}_{44}(\lambda_k).$$

3. Fall von zwei einfachen Wurzeln. Sind nun die beiden Wurzeln λ_k verschieden, so gehört zu jeder von ihnen eine bestimmte

Hauptachsenrichtung $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, die in Verbindung mit dem Koeffizienten a'_{k3} den Gleichungen (1) genügt. Die beiden Gruppen $a'_{kk} = \lambda_k$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, a'_{k3}$ $(k = 1, 2)$ von fünf Größen genügen also den Gleichungen § 108, (23) und (23'), die für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ nach § 108, **5** für ein System von Hauptachsenrichtungen hinreichend sind.

Hat die Gleichung $\mathsf{H}(\lambda) = 0$ *zwei verschiedene Wurzeln* λ_1 *und* λ_2, *so gibt es stets ein und nur ein System von zwei zueinander senkrechten Hauptachsenrichtungen* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *und* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *mit zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten* $a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{22} = \lambda_2$.

Wie die beiden Wurzeln λ_1, λ_2, so sind auch die beiden Gruppen $a'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a'_{13}$ und $a'_{22}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, a'_{23}$ vertauschbar und können etwa nach der algebraischen Größenfolge von $\lambda_1 < \lambda_2$ auf die Achsen ξ und η verteilt werden.

4. Fall einer Doppelwurzel. Durch Elimination von a'_{k3} folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (1):

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} \alpha_k + \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda_k & v \\ a_{32} & w \end{vmatrix} \beta_k + \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} \gamma_k = 0.$$

Ist nun λ_k Doppelwurzel, so ist nach § 109, **6**, II auch:

$$\mathsf{H}_{11}(\lambda_k) = 0, \quad \mathsf{H}_{12}(\lambda_k) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf § 109, (2) nach der letzten Zeile entwickelt

$$v \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} - w \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda_k & v \\ a_{32} & w \end{vmatrix} = 0, \quad w \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} - u \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda_k & v \\ a_{32} & w \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} = u : v : w.$$

Danach kommt die Gleichung (7) mit der vierten Gleichung (1) überein.

Im Falle einer Doppelwurzel λ_k geben je zwei der drei ersten Gleichungen (1) bei Elimination von a'_{k3} die vierte. Die Gleichungen (1) legen also den Richtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ keine andere Bedingung auf, als daß sie auf der Normale der Ebene u, v, w, s senkrecht stehen. Jede beliebige in der Ebene liegende Achse erfüllt diese Bedingung, so daß ξ und η (§ 108, (7)) irgend zwei solche Achsen sein können, die zueinander senkrecht sind (§ 108, (25)).

Hat die Gleichung $\mathsf{H}(\lambda) = 0$ *zwei gleiche Wurzeln* $\lambda_1 = \lambda_2$, *so bestimmt jedes in der schneidenden Ebene liegende rechtwinklige Achsensystem* $\mathfrak{O}\xi\eta$ *zwei Hauptachsenrichtungen, und die zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten sind immer* $\lambda_1 = \lambda_2$.

5. Gesamtergebnis der Hauptachsentransformation. Aus den Entwicklungen von § 108—110 geht nun hervor:

Sind in einem rechtwinkligen System Oxyz im Raume eine Fläche zweiter Ordnung:

$$(9)\quad \begin{cases} g(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ \qquad + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{cases}$$

und eine Ebene:

$$(10)\qquad ux + vy + wz + s = 0$$

gegeben, so nimmt die Schnittkurve beider in einem rechtwinkligen System $\Omega\xi\eta$ in der Ebene (10), dessen Achsen bei beliebigem Anfangspunkt Ω die stets vorhandenen Hauptachsenrichtungen der Kurve haben, die folgenden Formen an:

1. *für* $A''_{44} \neq 0$:

$$(11)\qquad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0,$$

wo λ_1 und λ_2 die nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung $\mathsf{H}(\lambda) = 0$ sind ($\lambda_1\lambda_2 = -A''_{44} : e^2$);

a) Die Hauptachsenrichtungen ξ und η sind für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eindeutig bestimmt und zwar ist:

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \mathsf{H}_{k1}(\lambda_1) : \mathsf{H}_{k2}(\lambda_1) : \mathsf{H}_{k3}(\lambda_1), \\ \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \mathsf{H}_{k1}(\lambda_2) : \mathsf{H}_{k2}(\lambda_2) : \mathsf{H}_{k3}(\lambda_2). \end{cases}$$

b) Sie sind für $\lambda_1 = \lambda_2$ zwei beliebige rechtwinklige Richtungen in der Ebene (10).

2. *für* $A''_{44} = 0$, $A'''_{44} \neq 0$:

$$(13)\qquad \lambda_2\eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0,$$

wo $\lambda_2 = -A'''_{44} : e^2$.

Die Hauptachsenrichtungen ξ und η sind eindeutig bestimmt und zwar ist:

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha''_{k1} : \alpha''_{k2} : \alpha''_{k3} \quad (\S\ 109,\ (9)), \\ \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \mathsf{H}_{k1}(\lambda_2) : \mathsf{H}_{k2}(\lambda_2) : \mathsf{H}_{k3}(\lambda_2). \end{cases}$$

3. *für* $A''_{44} = 0$, $A'''_{44} = 0$:

$$(15)\qquad 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0.$$

Die Hauptachsenrichtungen ξ und η sind zwei beliebige rechtwinklige Richtungen in (10).

6. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten paralleler Schnitte. Da zur Bestimmung der Koeffizienten λ_1 und λ_2 und der Richtungen ξ und η nur die Determinante $\mathsf{H}(\lambda)$ in § 109, (1) und ihre Unterdeterminanten gebraucht werden und diese von s in § 108, (2) unabhängig sind, so folgt:

Parallele Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung haben dieselben Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten.[180])

7. Schnitte parallel einer Tangentialebene. Für die *Tangentialebene* der Fläche $g(x, y, z) = 0$ im Punkte x, y, z sind die Stellungskoeffizienten u, v, w nach § 67, (18):

$$(16)\qquad u = g_1, \quad v = g_2, \quad w = g_3,$$

während zugleich (§ 67, (12)):

$$(17)\qquad g_1 x + g_2 y + g_3 z + g_4 = g = 0.$$

Dabei sollen g_1, g_2, g_3 nicht alle verschwinden.

Indem man nun in der Unterdeterminante:

$$(18)\qquad A_{44}^{u} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}$$

die bezüglich mit x, y, z multiplizierten Elemente der drei ersten Kolonnen von denen der vierten abzieht und hernach ebenso mit den Zeilen verfährt (I Anm. 1, IV, 4), ergibt sich (§ 66, (8)):

$$A_{44}^{u} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$(19)\qquad A_{44}^{u} = A.$$

Ist die schneidende Ebene u, v, w, s einer Tangentialebene der Fläche parallel, so ist das Produkt der Hauptachsenkoeffizienten des ebenen Schnittes (§ 109, (25)):

$$(20)\qquad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A}{G^2}, \quad G^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2.$$

Die Hauptachsenkoeffizienten λ_1, λ_2 selbst sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(21)\qquad \mathsf{H}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte der Fläche. Die *Hauptkrümmungsradien* ϱ_1 und ϱ_2 der Fläche zweiter Ordnung $g = 0$ im Punkte x, y, z sind durch die Gleichung bestimmt:[181])

$$(22)\qquad \mathsf{H}\left(-\frac{G}{\varrho}\right)=\begin{vmatrix} a_{11}+\frac{G}{\varrho} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22}+\frac{G}{\varrho} & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\frac{G}{\varrho} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 der Fläche $g(x, y, z) = 0$ im Punkte x, y, z stehen mit den Hauptachsenkoeffizienten λ_1 und λ_2 der der Tangentialebene dieses Punktes parallelen Schnitte in der Beziehung:

$$(23)\qquad \varrho_1 = -\frac{G}{\lambda_1},\quad \varrho_2 = -\frac{G}{\lambda_2};\quad G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}.$$

Das Produkt der reziproken Hauptkrümmungsradien (Gauß'sches Krümmungsmaß) ist daher:

$$(24)\qquad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{A}{G^4}.$$

Die *Krümmungsmittelpunkte* der Fläche werden erhalten, indem die *relativen* Längen ϱ_1 und ϱ_2 in (23) auf der Normale mit den Richtungskosinus (§ 67, (19)):

$$(25)\qquad \frac{g_1}{G},\quad \frac{g_2}{G},\quad \frac{g_3}{G};\quad G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$$

abgetragen werden, und zwar je nach ihrem Vorzeichen nach der positiven oder negativen Seite.

III. Kapitel.

Zurückführung auf kanonische Gleichungsformen.

§ 111. Einteilung der Schnittkurven nach dem Mittelpunkt.

1. Bestimmungsgleichungen des Mittelpunktes. Die Gleichungen § 106, (26) für den Mittelpunkt der Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene lauten in homogener Schreibweise (mit $x:t,\ y:t,\ z:t,\ \varrho:t$ für x, y, z, ϱ):

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 + \varrho u = 0,\quad f_2 + \varrho v = 0,\quad f_3 + \varrho w = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0 \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + \varrho u = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + \varrho v = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + \varrho w = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0. \end{cases}$$

Jeder Punkt, der diesen Gleichungen unter Elimination von ϱ genügt, soll Mittelpunkt der Schnittkurve heißen (§ 23, (2); § 94, (2)).

Aus den vier Gleichungen (1) gehen durch Elimination von ϱ die drei Gleichungen hervor:

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1 : f_2 : f_3 = u : v : w, \\ ux + vy + wz + st = 0. \end{cases}$$

Diese aber können als Gleichungen von *drei Ebenen* betrachtet werden, denen ein Mittelpunkt angehören muß. Je nachdem diese drei Ebenen einen Punkt oder eine Achse gemein haben oder alle zusammenfallen, wird es *einen Mittelpunkt* oder *eine Mittelpunktsachse* oder *keine bestimmten Mittelpunkte* geben.[92])

2. Ein bestimmter Mittelpunkt. Durch Auflösung der Gleichungen (2) folgt zunächst:

$$(4)\qquad x : y : z : t : \varrho = A^u_{14} : A^u_{24} : A^u_{34} : A^u_{44} : A^u_{54},$$

wo A^u_{k4} wie in § 107, (9); (10) die Unterdeterminanten der Elemente vierter Zeile oder Kolonne in der Determinante A^u in § 107, (5) bedeuten:

$$(5)\quad A^u_{14} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & s \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}, \cdots, \cdots A^u_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

$$(6)\qquad A^u_{54} = -(A_{14}u + A_{24}v + A_{34}w + A_{44}s).$$

Sind daher:

$$(7)\qquad A^u_{14},\ A^u_{24},\ A^u_{34},\ A^u_{44}\ \textit{nicht alle}\ 0,$$

so hat die Schnittkurve einen einzigen bestimmten Mittelpunkt mit den Koordinaten:

$$(8)\qquad x_0 : y_0 : z_0 : t_0 = A^u_{14} : A^u_{24} : A^u_{34} : A^u_{44}.$$

Die Bedingung:

$$(9)\qquad A^u_{54} = 0$$

bedeutet nach (6), falls die Fläche $f = 0$ einen bestimmten Mittelpunkt § 94, (4) hat, daß die Ebene u, v, w, s durch ihn hindurchgeht; dagegen ist sie andernfalls nach § 94, (5) identisch in u, v, w, s erfüllt. Aus (9) folgt aber nach (4) $\varrho = 0$. Der Mittelpunkt (2) der Schnittkurve ist dann nach § 94, (2) zugleich auch der Mittelpunkt der Fläche.

Wenn die Fläche zweiter Ordnung mehr als einen Mittelpunkt hat, ist ein bestimmter Mittelpunkt der Schnittkurve unbedingt auch Mittelpunkt der Fläche; wenn aber die Fläche nur einen Mittelpunkt

hat, gilt dies nur unter der Bedingung, daß die schneidende Ebene durch ihn geht.

3. Ein bestimmter endlicher Mittelpunkt. Ist nun:

$$(10) \qquad A^u_{44} \neq 0,$$

so hat die Schnittkurve nach (8) einen bestimmten *endlichen* Mittelpunkt mit den gemeinen Koordinaten (§ 23, (12); § 94, (16)):

$$(11) \qquad x_0 = \frac{A^u_{14}}{A^u_{44}}, \quad y_0 = \frac{A^u_{24}}{A^u_{44}}, \quad z_0 = \frac{A^u_{34}}{A^u_{44}}.$$

4. Ort der Mittelpunkte paralleler Schnitte. Nach (5) ist die Bedingung (10) von s unabhängig, während die Koordinaten (11) lineare Funktionen von s sind. Daher folgt (I § 43, (2)):

Hat die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene u, v, w, s einen bestimmten endlichen Mittelpunkt, so gilt dasselbe von der Schnittkurve mit jeder parallelen Ebene, und der Ort der Mittelpunkte der parallelen Schnitte ist eine gerade Linie.

Man kann sie *die der Stellung u, v, w konjugierte Gerade* nennen (vgl. 68, 2).[50]) Ihre Richtungskosinus α, β, γ verhalten sich wie die Koeffizienten von s in (11), also nach (5):

$$(12) \quad \alpha : \beta : \gamma = \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w : \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w : \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w,$$

so daß umgekehrt (§ 66, (11)):

$$(13) \qquad u : v : w = h_1(\alpha, \beta, \gamma) : h_2(\alpha, \beta, \gamma) : h_3(\alpha, \beta, \gamma).$$

Nach § 68, (3) *hat daher die der Richtung α, β, γ konjugierte Ebene wieder die Stellung u, v, w* (vgl. die Spezialfälle § 55, 8; § 58, 4; § 72, 9).

5. Ein bestimmter unendlich ferner Mittelpunkt. Wenn im Gegensatz zu (10) jetzt:

$$(14) \qquad A^u_{44} = 0, \; A^u_{14}, \; A^u_{24}, \; A^u_{34} \text{ nicht alle } 0,$$

so ist der Mittelpunkt (8) *unendlich fern in der Richtung:*

$$(15) \qquad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A^u_{14} : A^u_{24} : A^u_{34}.$$

Die direkte Auflösung der mit $t = 0$ reduzierten Gleichungen (2) gibt aber für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ auch (§ 94, (19)):

$$(16) \quad x_0 : y_0 : z_0 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha^u_{k1} : \alpha^u_{k2} : \alpha^u_{k3} \quad (k = 1, 2 \text{ oder } 3).$$

Mit $A^u_{44} = 0$ folgt nun aus den drei letzten Gleichungen § 107, (21):

$$-(A^u_{14})^2 = A^u \alpha^u_{11}, \quad -(A^u_{24})^2 = A^u \alpha^u_{22}, \quad -(A^u_{34})^2 = A^u \alpha^u_{33}$$

und daher mit der Bezeichnung § 109, (10) (§ 94, (29))[80]):

$$(17) \qquad A^u A'^u_{44} = -(A^u_{14})^2 - (A^u_{24})^2 - (A^u_{34})^2.$$

Die Bedingungen eines unendlich fernen Mittelpunktes sind somit statt (14) *auch:*

(18) $$A_{44}^u = 0, \quad A^u A_{44}'^u \neq 0.$$

6. Bedeutung der Bedingung $A_{44}^u = 0$. Nach § 80, (19'); (20) ist:

(19) $$-A_{44}^u = \alpha_{11} u^2 + \alpha_{22} v^2 + \alpha_{33} w^2 + 2\alpha_{23} vw + 2\alpha_{31} wu + 2\alpha_{12} uv = 0$$

die Gleichung der Schnittkurve § 66, (23) der Fläche mit der unendlich fernen Ebene in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s.

Die Bedingung (19) *bedeutet daher, daß die Ebene u, v, w, s durch eine Tangente der unendlich fernen Kurve der Fläche zweiter Ordnung geht.*

7. Bedingungen einer Mittelpunktsachse. Die drei Verhältnisse (8) werden unbestimmt, wenn:

(20) $$A_{14}^u = 0, \; A_{24}^u = 0, \; A_{34}^u = 0, \; A_{44}^u = 0.$$

Nun ist für die Determinante A^u in § 107, (5) unbedingt:

$$\begin{aligned}
a_{11} A_{14}^u + a_{21} A_{24}^u + a_{31} A_{34}^u + a_{41} A_{44}^u + u A_{54}^u &= 0,\\
a_{12} A_{14}^u + a_{22} A_{24}^u + a_{32} A_{34}^u + a_{42} A_{44}^u + v A_{54}^u &= 0,\\
a_{13} A_{14}^u + a_{23} A_{24}^u + a_{33} A_{34}^u + a_{43} A_{44}^u + w A_{54}^u &= 0,\\
a_{14} A_{14}^u + a_{24} A_{24}^u + a_{34} A_{34}^u + a_{44} A_{44}^u + s A_{54}^u &= A^u,
\end{aligned}$$

und daher im Falle (20):

$$u A_{54}^u = 0, \quad v A_{54}^u = 0, \quad w A_{54}^u = 0, \quad s A_{54}^u = A^u.$$

Da aber u, v, w nicht alle verschwinden, so folgt zunächst $A_{54}^u = 0$ und danach $A^u = 0$.

Die Bedingungen (20) *haben daher stets zur Folge, daß auch:*

(21) $$A_{45}^u = 0, \quad A^u = 0.$$

Andererseits gilt unter der Voraussetzung $A_{44}^u = 0$ die Gleichung (17), aus der dann mit $A^u = 0$ die drei ersten Gleichungen (20) folgen.

Die Bedingungen (20) *sind daher ersetzbar durch:*

(22) $$A_{44}^u = 0, \quad A^u = 0.$$

Mit (20) werden ferner nicht nur die drei Verhältnisse (8), sondern nach (21) auch die vier Verhältnisse (4) unbestimmt. Die Gleichungen (2) zählen daher nur mehr für drei, die Gleichungen (3) nur mehr für zwei unabhängige.

Unter den Bedingungen (20) *oder* (22) *bilden die den Gleichungen* (2) *unter Elimination von ϱ genügenden Punkte x, y, z, t im allgemeinen* (vgl. (25)) *eine gerade Linie, die Mittelpunktsachse der Schnittkurve.*

Infolge der ersten Gleichung (21) muß die schneidende Ebene im

vorliegenden Falle mit Rücksicht auf (6) durch den Mittelpunkt der Fläche gehen, falls diese einen bestimmten Mittelpunkt hat.

8. Eine bestimmte Mittelpunktsachse. Die Mittelpunktsachse wird schon durch drei von den Gleichungen (2) bestimmt, etwa die drei letzten. Eliminiert man aus diesen x und ϱ oder y und ϱ oder z und ϱ, so erhält man wie in § 107, (30):

(23) $\alpha^u_{13}y-\alpha^u_{12}z+\alpha^u_{14}t=0,\quad \alpha^u_{11}z-\alpha^u_{13}x+\alpha^u_{15}t=0,\quad \alpha^u_{12}x-\alpha^u_{11}y+\alpha^u_{16}t=0.$

Wie die erste, könnte man auch die zweite oder dritte Gleichung (2) ausschalten. Damit aber folgt (I § 48, (11)):

Die Achsenkoordinaten der Mittelpunktsachse der Schnittkurve sind ($k=1,2$ *oder* 3):

(24) $$q^0_{23}:q^0_{31}:q^0_{12}:q^0_{14}:q^0_{24}:q^0_{34}=\alpha^u_{k1}:\alpha^u_{k2}:\alpha^u_{k3}:\alpha^u_{k4}:\alpha^u_{k5}:\alpha^u_{k6}.$$

Die Mittelpunktsachse ist bestimmt, wenn:

(25) $$\alpha^u_{k1},\ \alpha^u_{k2},\ \alpha^u_{k3},\ \alpha^u_{k4},\ \alpha^u_{k5},\ \alpha^u_{k6}\quad (k=1,2,3)\ \textit{nicht alle}\ 0.$$

Die Bedingungen (20) und (25) oder (22) und (25) sind also für eine bestimmte Mittelpunktsachse der Schnittkurve notwendig und hinreichend.

9. Eine bestimmte endliche Mittelpunktsachse. Die Mittelpunktsachse (24) ist *endlich* (I § 48, (19)), wenn:

(26) $$\alpha^u_{k1},\ \alpha^u_{k2},\ \alpha^u_{k3}\quad (k=1,2,3)\ \text{nicht alle}\ 0,$$

und hat dann die *Richtungskosinus:*

(27) $$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\alpha^u_{k1}:\alpha^u_{k2}:\alpha^u_{k3}.$$

Die Identität § 109, (20) gibt nach § 109, (8); (9) mit $\lambda=0$ und der bereits § 109, (10) eingeführten Abkürzung:

(28) $$A'^u_{44}=\alpha^u_{11}+\alpha^u_{22}+\alpha^u_{33},$$

wie schon § 44, (40) die Identität:[80])

(29) $$(A'^u_{44})^2=(\alpha^u_{11})^2+(\alpha^u_{22})^2+(\alpha^u_{33})^2+2(\alpha^u_{23})^2+2(\alpha^u_{31})^2+2(\alpha^u_{12})^2-2e^2A^u_{44},$$
$$e^2=u^2+v^2+w^2.$$

Ist jetzt:

(30) $$\alpha^u_{11}=0,\quad \alpha^u_{22}=0,\quad \alpha^u_{33}=0,\quad \alpha^u_{23}=0,\quad \alpha^u_{31}=0,\quad \alpha^u_{12}=0,$$

so folgt aus (28): $A'^u_{44}=0$ und dann aus (29): $A^u_{44}=0$. Ist umgekehrt:

(31) $$A'^u_{44}=0,\quad A^u_{44}=0,$$

so gehen aus (29) die Gleichungen (30) hervor.

Die Gleichungen (30) *und* (31) *bedingen sich also gegenseitig.*

Innerhalb der Voraussetzungen (20); (25) oder (22); (25) der

Mittelpunktsachse überhaupt sind daher die Bedingungen (26), die auch (25) einschließen, ersetzbar durch $A'^u_{44} \neq 0$, also:

Die Bedingungen einer endlichen Mittelpunktsachse sind:

(32) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} \neq 0.$$

10. Eine bestimmte unendlich ferne Mittelpunktsachse. Die Mittelpunktsachse (24) ist *unendlich fern*, wenn die Bedingungen (30) oder (31), also mit Hinzunahme von (22) die Bedingungen:

(33) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} = 0$$

erfüllt sind, dagegen mit Rücksicht auf (25) für $k = 1, 2, 3$:

(34) $$\alpha^u_{k4}, \ \alpha^u_{k5}, \ \alpha^u_{k6} \ \textit{nicht alle} \ 0.$$

Infolge von (30) geben nun die Formeln § 107, (40):

$$v^2 A^u_{11} = (\alpha^u_{15})^2, \quad w^2 A^u_{22} = (\alpha^u_{26})^2, \quad u^2 A^u_{33} = (\alpha^u_{34})^2,$$
$$w^2 A^u_{11} = (\alpha^u_{16})^2, \quad u^2 A^u_{22} = (\alpha^u_{24})^2, \quad v^2 A^u_{33} = (\alpha^u_{35})^2,$$

und die Formel § 107, (38) mit gleichzeitiger Rücksicht auf (33):

$$u^2 A^u_{11} + v^2 A^u_{22} + w^2 A^u_{33} = (\alpha^u_{14})^2 + (\alpha^u_{25})^2 + (\alpha^u_{36})^2.$$

Durch Addition (§ 107, (22)) folgt, daß *innerhalb der Voraussetzungen* (33):

(35) $$e^2 A'^u = (\alpha^u_{14})^2 + (\alpha^u_{15})^2 + (\alpha^u_{16})^2 + (\alpha^u_{24})^2 + (\alpha^u_{25})^2 + (\alpha^u_{26})^2 + (\alpha^u_{34})^2 + (\alpha^u_{35})^2 + (\alpha^u_{36})^2,$$

also $\alpha^u_{k4}, \alpha^u_{k5}, \alpha^u_{k6}$ $(k = 1, 2, 3)$ nicht alle oder alle 0 sind, je nachdem $A'^u \neq 0$ oder $= 0$ ist.

Die Bedingungen einer bestimmten unendlich fernen Mittelpunktsachse der Schnittkurve sind daher an Stelle von (33), (34) *auch:*

(36) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} = 0, \quad A'^u \neq 0.$$

11. Keine bestimmten Mittelpunkte der Schnittkurve. Sind nunmehr neben (33) im Gegensatz zu (34), bezüglich (25):

(37) $$\alpha^u_{k1}, \ \alpha^u_{k2}, \ \alpha^u_{k3}, \ \alpha^u_{k4}, \ \alpha^u_{k5}, \ \alpha^u_{k6} \ (k = 1, 2, 3) \ \textit{alle} \ 0,$$

so wird die Mittelpunktsachse (24) unbestimmt. Die sechs Unterdeterminanten $k = 1$ in (37) sind zugleich die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} wa_{21} - va_{31} & wa_{22} - va_{32} & wa_{23} - va_{33} & wa_{24} - va_{34} \\ u & v & w & s \end{vmatrix};$$

ihr Verschwinden bedeutet den Zusammenfall der Ebenen:

$$wf_2 - vf_3 = 0, \quad ux + vy + wz + st = 0.$$

So fallen infolge von (37) die drei Ebenen (3) alle zusammen, so daß *jeder Punkt der schneidenden Ebene u, v, w, s als Mittelpunkt zu gelten hat.*

Die Bedingungen dieses Falles sind nach (35) *statt* (33) *und* (37) *auch:*

(38) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} = 0, \quad A'^u = 0.$$

12. Gesamtübersicht. Die Schnittkurve § 110, (9); (10) hat unter der Bedingung (§ 23, 8; § 94, **10**):

(39) $$\begin{cases} A^u_{44} \neq 0\text{: einen endlichen Mittelpunkt;} \\ A^u_{44} = 0,\ A^u A'^u_{44} \neq 0\text{: einen unendl. f. Mittelpunkt;} \\ A^u_{44} = 0,\ A^u = 0,\ A'^u_{44} \neq 0\text{: eine endl. Mittelpunktsachse;} \\ A^u_{44} = 0,\ A^u = 0,\ A'^u_{44} = 0,\ A'^u \neq 0\text{: eine u. f. Mittelpunktsachse;} \\ A^u_{44} = 0,\ A^u = 0,\ A'^u_{44} = 0,\ A'^u = 0\text{: keine best. Mittelpunkte.} \end{cases}$$

§ 112. Mittelpunktsgleichung der Schnittkurven mit endlichen Mittelpunkten.

1. Allgemeine Form der Mittelpunktsgleichung. In der Gleichung § 108, (12) der Schnittkurve der Fläche $g(x, y, z) = 0$ mit der Ebene u, v, w, s fehlen die linearen Glieder, wenn:

(1) $$\begin{cases} a'_{14} = g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1 + g_3{}^0\gamma_1 = 0, \\ a'_{24} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 + g_3{}^0\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

oder auch:

$$g_1{}^0 : g_2{}^0 : g_3{}^0 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 : \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 : \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,$$

oder (I § 37, (12)) nach § 108, (5):

$$g_1{}^0 : g_2{}^0 : g_3{}^0 = u : v : w,$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

(2) $$g_1{}^0 + \varrho u = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho v = 0, \quad g_3{}^0 + \varrho w = 0.$$

Dies sind aber, da $\Omega = x_0, y_0, z_0$ auch der Gleichung § 108, (6) genügt, die Bedingungen § 106, (26) des Mittelpunktes. Auch umgekehrt folgt mit Rücksicht auf § 108, (7) das Verschwinden der Koeffizienten (1), wenn man für $g_1{}^0, g_2{}^0, g_3{}^0$ die Werte (2) einsetzt.

Die Gleichung der Schnittkurve erhält daher in einem Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ ihrer Ebene immer dann und nur dann die Form:

(3) $$a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + a'_{44} = 0,$$

wenn der Anfangspunkt Ω ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen ξ, η ein (endlicher) Mittelpunkt der Kurve ist.[93])

Sie heißt dann die *Mittelpunktsgleichung* der Kurve und ist dadurch gekennzeichnet, daß die linearen Glieder $2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta$ fehlen.

2. Das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung. Das konstante Glied der Gleichung (3) wird nach § 66, (21) und nach (2):

$$a_{44}' = g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = g_4^0 - \varrho(ux_0 + vy_0 + wz_0)$$

und nach § 108, (6):

(4) $$a_{44}' = g_4^0 + \varrho s,$$

wo für x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Mittelpunktes Ω zu setzen sind. Man kann daher a_{44}' bestimmen, indem man x_0, y_0, z_0 und ϱ aus den folgenden Gleichungen eliminiert (§ 111, (2)):

(5) $$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho u = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho v = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho w = 0, \\ a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + (a_{44} - a_{44}') + \varrho s = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0. \end{cases}$$

3. Das konstante Glied bei bestimmtem Mittelpunkt. Durch Elimination von x_0, y_0, z_0, 1 und ϱ aus (5) folgt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - a_{44}' & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

(6) $$A^u - A_{44}^u a_{44}' = 0.$$

Im Falle eines bestimmten endlichen Mittelpunktes (§ 111, (10)) *ist daher* (§ 95, (7)):

(7) $$a_{44}' = \frac{A^u}{A_{44}^u} \quad (A_{44}^u \neq 0).$$

4. Das konstante Glied bei bestimmter Mittelpunktsachse. Im Falle einer Mittelpunktsachse ist nach § 111, (20) und (21):

(8) $$A_{14}^u = 0, \quad A_{24}^u = 0, \quad A_{34}^u = 0, \quad A_{44}^u = 0, \quad A^u = 0,$$

so daß die Gleichung (6) unbrauchbar wird. Jedoch gibt dann die Elimination von y_0, z_0, 1, ϱ aus den vier letzten Gleichungen (5):

$$\begin{vmatrix} a_{21}x_0 + a_{24} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31}x_0 + a_{34} & a_{32} & a_{33} & w \\ a_{41}x_0 + (a_{44} - a_{44}') & a_{42} & a_{43} & s \\ ux_0 + s & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder da der Koeffizient $-A_{14}^u$ von x_0 nach (8) verschwindet:

(9) $$A_{11}^u - \alpha_{11}^u a_{44}' = 0.$$

Auf gleiche Weise folgt bei Unterdrückung der zweiten oder dritten Gleichung (5):

(9) $$A_{22}^u - \alpha_{22}^u a_{44}' = 0, \quad A_{33}^u - \alpha_{33}^u a_{44}' = 0.$$

Durch Addition der Gleichungen (9) erhält man sodann mit Rücksicht auf § 107, (22) und § 109, (10):

(10) $$A'^u - A_{44}'^u a_{44}' = 0.$$

Im Falle einer bestimmten endlichen Mittelpunktsachse (§ 111, (32)) *ist daher:*

(11) $$a_{44}' = \frac{A'^u}{A_{44}'^u} \quad (A_{44}'^u \neq 0).$$

5. Das konstante Glied bei unbestimmtem Mittelpunkt. Ist der Mittelpunkt ganz unbestimmt, so ist nach § 111, (37):

(12) $$\alpha_{k1}^u = 0, \quad \alpha_{k2}^u = 0, \quad \alpha_{k3}^u = 0, \quad \alpha_{k4}^u = 0, \quad \alpha_{k5}^u = 0, \quad \alpha_{k6}^u = 0,$$
$$k = 1, 2, 3,$$

so daß die Gleichungen (9) unbrauchbar werden. Jedoch gibt dann die Elimination x_0, 1, ϱ aus der ersten, vierten und fünften Gleichung (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} & u \\ a_{41} & a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} - a_{44}' & s \\ u & vy_0 + wz_0 + s & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder da die Koeffizienten α_{34}^u und $-\alpha_{24}^u$ von y_0 und z_0 nach (12) verschwinden:

(13) $$\alpha_{44}^u + u^2 a_{44}' = 0,$$

und entsprechend:

(13) $$\alpha_{55}^u + v^2 a_{44}' = 0, \quad \alpha_{66}^u + w^2 a_{44}' = 0,$$

und durch Addition mit Rücksicht auf (12) und § 107, (23); § 108, (4):

(14) $$A''^u + e^2 a_{44}' = 0.$$

Im Falle eines unbestimmten Mittelpunktes (§ 111, (38)) *ist daher:*

(15) $$a_{44}' = -\frac{A''^u}{e^2}.$$

6. Die Hauptachsengleichung der Schnittkurve. Die Herstellung der Gleichung (3) erfolgte durch Verlegung des Anfangspunktes Ω nach einem Mittelpunkt ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen ξ, η. Andererseits entstand die Gleichung § 110, (11) durch Annahme der Hauptachsenrichtungen für die Achsen ξ, η ohne Rücksicht auf die Wahl von Ω.

Legt man daher gleichzeitig die Achsen ξ, η nach den Hauptachsenrichtungen und den Anfangspunkt Ω in einen (endlichen) Mittelpunkt,

so muß die Gleichung der Schnittkurve die Form erhalten:

(16) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a'_{44} = 0.$$

Die alsdann nach Lage und Richtung bestimmten Achsen sind die *Hauptachsen* der Kurve und (16) ist die *Hauptachsengleichung.*

7. Hauptachsengleichung der Kurven mit Mittelpunkt. Nach § 110, (11) und § 111, (10) ist:

(17) $$A^u_{44} \neq 0$$

die gemeinsame Voraussetzung dafür, daß keine der Größen λ_1 und λ_2 in (16) verschwindet, und dafür, daß ein bestimmter endlicher Mittelpunkt vorliegt.

Unter der Voraussetzung (17) *kann also die Gleichung der Schnittkurve auf die Form:*

(18) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A^u}{A^u_{44}} = 0$$

gebracht werden, wo weder λ_1 *noch* λ_2 *verschwindet.*

Die Hauptachsen ξ, η sind nach § 110, 5 *eindeutig bestimmt,* wenn λ_1 und λ_2 verschieden, dagegen *beliebig drehbar,* wenn $\lambda_1 = \lambda_2$.

8. Hauptachsengleichung der Kurven mit Mittelpunktsachse. Die Bedingungen einer endlichen Mittelpunktsachse § 111, (32):

(19) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} \neq 0,$$

haben nach § 110, (13) gleichzeitig zur Folge, daß eine der Wurzeln λ_1, λ_2 verschwindet.

Unter der Voraussetzung (19) *kann die Gleichung der Schnittkurve auf die Form:*

(20) $$\lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A'^u_{44}} = 0$$

gebracht werden, wo λ_2 *nicht verschwindet.*

Der *Anfangspunkt* Ω des Systems $\Omega\xi\eta$ ist dann *einfach unbestimmt,* ein beliebiger Punkt der Mittelpunktsachse; die *Achsen* ξ, η sind *eindeutig bestimmt.*

Die *Hauptachse* ξ, deren Richtungskosinus nach § 110, (14):

(21) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \mathsf{H}_{k1}(0) : \mathsf{H}_{k2}(0) : \mathsf{H}_{k3}(0) = \alpha^u_{k1} : \alpha^u_{k2} : \alpha^u_{k3}$$

sind, *kommt* nach § 111, (27) *in die Mittelpunktsachse* selbst zu liegen.

9. Hauptachsengleichung der Kurven mit unbestimmtem Mittelpunkt. Die Bedingungen eines unbestimmten Mittelpunktes § 111, (38):

(22) $$A^u = 0, \quad A^u_{44} = 0, \quad A'^u_{44} = 0, \quad A'^u = 0$$

haben nach § 110, (15) gleichzeitig zur Folge, daß die Wurzeln λ_1, λ_2 beide verschwinden.

Unter der Voraussetzung (22) *hat die Gleichung in jedem System* $\mathfrak{Q}\xi\eta$ *in homogenen Koordinaten* ξ, η, τ *die Form:*

(23) $$-\frac{A''^u}{e^2}\cdot\tau^2 = 0.$$

10. Bedeutung der Hauptachsengleichung. Nach ihrer Form stellt die Gleichung (18) eine eigentliche Mittelpunktskurve zweiter Ordnung, *eine Ellipse oder Hyperbel* dar, wenn:

(24) $$A^u \neq 0,$$

ein eigentliches *Strahlenpaar* mit endlichem Mittelpunkt, wenn:

(25) $$A^u = 0.$$

Im letzteren Falle, wo der Mittelpunkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ auf der Kurve liegt und zugleich ihr Doppelpunkt ist, muß mit (17) nach § 107, (28):

(25′) $$A'^u \neq 0$$

sein.

Da s in (18) nur in A^u § 107, (5) vorkommt, folgt nach § 110, **6**:

Elliptische oder hyperbolische Schnitte paralleler Ebenen sind ähnlich (im weiteren Sinne § 14, **10**) *und ähnlich liegend.*[180])

Nach ihrer Form stellt die Gleichung (20) ein *Parallelstrahlenpaar* dar, wenn:

(26) $$A'^u \neq 0,$$

einen endlichen *Doppelstrahl*, wenn:

(27) $$A'^u = 0.$$

Im letzteren Falle, wo die Mittelpunktsachse $\eta = 0$ auf der Kurve liegt und zugleich die Doppellinie und die Kurve selbst darstellt, muß mit (19) nach § 107, (46):

(28) $$A''^u \neq 0$$

sein.

Parallellinien- und Doppellinienschnitte paralleler Ebenen sind parallel.

Die Gleichung (23) stellt eine *unendlich ferne Doppellinie* dar.

11. Übersicht der Hauptachsengleichungen. Nach dem Range geordnet (§ 107, (6); (28); (46)), zerfallen die Schnittkurven mit endlichen Mittelpunkten in die folgenden Formen (§ 24, **9**):

$$
(29)\left\{\begin{array}{l}
A^u \neq 0;\ A^u_{44} \neq 0: \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A^u}{A^u_{44}} = 0:\ \text{Ellipsen und Hyperbeln;}\\
A^u = 0,\ A'^u \neq 0;\ A^u_{44} \neq 0: \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0:\ \text{Gekreuzte Strahlenpaare;}\\
A^u = 0,\ A'^u \neq 0;\ A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A'^u_{44}} = 0:\ \text{Parallellinienpaare;}\\
A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0;\ A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 = 0:\ \text{Endliche Doppelgerade;}\\
A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0;\ A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} = 0: -\frac{A''^u}{e^2}\tau^2 = 0:\ \text{Unendlich ferne Doppelgerade.}
\end{array}\right.
$$

§ 113. Schnittkurven ohne endlichen Mittelpunkt.

1. Einführung der Hauptachsenrichtungen. Die gemeinsame Bedingung der Schnittkurven ohne endlichen Mittelpunkt ist nach § 111, (18) und (33):

(1) $$A^u_{44} = 0.$$

Führt man daher in der schneidenden Ebene ein Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ ein, dessen Achsen ξ und η, *bei verfügbar bleibendem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0, z_0$, die *Hauptachsenrichtungen* haben, so wird die Gleichung der Schnittkurve nach § 110, (13) und (15):

(2) $$\lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a_{24}\eta + a'_{44} = 0.$$

Je nachdem dann ein unendlich ferner Mittelpunkt oder eine solche Mittelpunktsachse vorliegt, ist:

(3) $$\lambda_2 = -A'^u_{44} : e^2 \quad \text{oder} \quad (3')\ \lambda_2 = 0.$$

2. Beziehung der Hauptachsenrichtungen zu dem unendlich fernen Mittelpunkt. Die Schnittkurve hat nach § 111, (17); (18) *einen bestimmten* unendlich fernen *Mittelpunkt*, wenn neben (1):

(4) $$(A^u_{14})^2 + (A^u_{24})^2 + (A^u_{34})^2 = -A^u A'^u_{44} \neq 0.$$

Er liegt nach § 111, (15); (16) in der Richtung:

(5) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A^u_{14} : A^u_{24} : A^u_{34} = \alpha^u_{k1} : \alpha^u_{k2} : \alpha^u_{k3}, \quad k = 1,\ 2 \text{ oder } 3,$$

und gehört der Schnittkurve selbst an. Diese Richtung hat aber nach § 110, (14) auch die Hauptachse ξ.

Die Hauptachsenrichtung ξ *ist dieselbe, wie die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt* (§ 25, 2).

Wir verfügen über ihre Pfeilspitze, indem wir mit Rücksicht auf (4) in:

(6) $\tau\alpha_1 = A^u_{14}, \quad \tau\beta_1 = A^u_{24}, \quad \tau\gamma_1 = A^u_{34}; \quad \tau = \sqrt{-A^u A'^u_{44}},$

die positive Wurzel nehmen.

Die Schnittkurve hat nach § 111, (35), (36) eine *bestimmte* unendlich ferne *Mittelpunktsachse*, wenn neben (1):

(7) $$A^u = 0, \quad A'^u_{44} = 0,$$
$$e^2 A'^u = (\alpha^u_{14})^2 + (\alpha^u_{15})^2 + (\alpha^u_{16})^2 + (\alpha^u_{24})^2 + \cdots + (\alpha^u_{36})^2 \neq 0.$$

In diesem Falle *sind die Hauptachsenrichtungen* nach § 110, (15) *unbestimmt.*

3. Verschwinden eines linearen Gliedes. Die beiden Koeffizienten:

(8) $$\begin{cases} a'_{14} = g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1 + g_3{}^0\gamma_1, \\ a'_{24} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 + g_3{}^0\gamma_2 \end{cases}$$

können mangels eines endlichen Mittelpunktes nach § 112, 1 *niemals beide gleichzeitig verschwinden.* Wohl aber kann über den Punkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ innerhalb der schneidenden Ebene:

(9) $$ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0$$

derart verfügt werden, daß *einer der Koeffizienten* a'_{14}, a'_{24} und außerdem a'_{44} verschwindet, also:

(10) $a'_{24} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 + g_3{}^0\gamma_2 = 0;$ (11) $a'_{44} = g^0 = 0.$

4. Der Scheitelpunkt der Kurven mit einem unendlich fernen Mittelpunkt. Im Falle (4) sind die Hauptachsenrichtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ mit (5) bekannt. Die drei Gleichungen (9); (10); (11) bestimmen dann nach § 106, (6); (13); (14) den Punkt x_0, y_0, z_0 der Schnittkurve derart, daß deren Tangente in ihm die Richtung α_2 β_2, γ_2 hat.

Wir nennen diesen Punkt, in dem Normale und Tangente der Kurve die Hauptachsenrichtungen ξ und η haben, den *Scheitelpunkt der Kurve* (§ 25, 4).

Da neben (10) auch:

(12) $u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0, \quad u\alpha_2 + v\beta_2 + w\gamma_2 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$

so folgt durch Elimination von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

(13) $$\begin{vmatrix} g_1{}^0 & g_2{}^0 & g_3{}^0 \\ u & v & w \\ \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

(§ 106, (17)). Es können dann zwei Größen ϱ und σ so bestimmt werden, daß:

(14) $g_1^0 + \varrho u + \sigma\alpha_1 = 0, \quad g_2^0 + \varrho v + \sigma\beta_1 = 0, \quad g_3^0 + \varrho w + \sigma\gamma_1 = 0.$

Auch folgt hieraus umgekehrt durch Multiplikation mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und Addition mit Rücksicht auf (12) wieder (10).

Der Scheitelpunkt hat daher den fünf Gleichungen (9); (11); (14) *unter Elimination von ϱ und σ zu genügen;* wir beweisen im Folgenden, daß *unter den Voraussetzungen* (1) *und* (4) *ein einziger endlicher* Scheitelpunkt vorhanden ist.

Aus (14) folgt überdies mit Hinblick auf (12) und (8):

(15) $$a_{14}' = -\sigma.$$

5. Gleichungen und Koordinaten der Hauptachse. Abgesehen von der Gleichung (11) liegen für den Scheitelpunkt die folgenden vier Gleichungen vor:

(16) $$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho u + \sigma\alpha_1 = 0, \\ X_2 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho v + \sigma\beta_1 = 0, \\ X_3 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho w + \sigma\gamma_1 = 0, \\ X_4 = ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0. \end{cases}$$

Da nun für die Determinante A^u in § 107, (5) infolge von (1) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{14}^u + a_{21}A_{24}^u + a_{31}A_{34}^u + uA_{54}^u &= 0, \\ a_{12}A_{14}^u + a_{22}A_{24}^u + a_{32}A_{34}^u + vA_{54}^u &= 0, \\ a_{13}A_{14}^u + a_{23}A_{24}^u + a_{33}A_{34}^u + wA_{54}^u &= 0, \\ a_{14}A_{14}^u + a_{24}A_{24}^u + a_{34}A_{34}^u + sA_{54}^u &= A^u, \\ uA_{14}^u + vA_{24}^u + wA_{34}^u &= 0 \end{aligned}$$

gelten, so folgt aus (16) durch Multiplikation mit $A_{14}^u, A_{24}^u, A_{34}^u, A_{54}^u$ und Addition:

$$A^u + \sigma(A_{14}^u\alpha_1 + A_{24}^u\beta_1 + A_{34}^u\gamma_1) = 0,$$

oder nach (6) und § 108, (16):

$$A^u + \sigma\tau = 0,$$

oder da $A^u \neq 0$:

(17) $$\sigma = -\frac{A^u}{\tau} = \frac{-A^u}{\sqrt{-A^u A_{44}'^u}} = \frac{\sqrt{-A^u A_{44}'^u}}{A_{44}'^u}.$$

Setzt man diesen Wert von σ in die Gleichungen (16) ein, so besteht zwischen deren linken Seiten die Identität:

$$A_{14}^u X_1 + A_{24}^u X_2 + A_{34}^u X_3 + A_{54}^u X_4 = 0.$$

Da hier A_{14}^u, A_{24}^u, A_{34}^u nach (4) nicht alle verschwinden, ist wenigstens eine der drei ersten Gleichungen (16) von den übrigen Gleichungen (16) abhängig. Die Gleichungen (16) stellen daher unter Elimination von ϱ eine *gerade Linie* dar, auf der der Scheitelpunkt x_0, y_0, z_0 liegen muß. Um ihre Koordinaten zu bestimmen, eliminieren wir aus den drei letzten Gleichungen x_0, 1, ϱ und erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{31} & a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ u & vy_0 + wz_0 + s & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(18) \qquad \alpha_{13}^u y_0 - \alpha_{12}^u z_0 + \mathsf{A}_{14} = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(19) \qquad \mathsf{A}_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{31} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ u & s & 0 \end{vmatrix}.$$

In gleicher Weise folgt durch Elimination von y_0, 1, ϱ und z_0, 1, ϱ:

$$(18') \qquad \alpha_{11}^u z_0 - \alpha_{13}^u x_0 + \mathsf{A}_{24} = 0, \quad \alpha_{12}^u x_0 - \alpha_{11}^u y_0 + \mathsf{A}_{34} = 0,$$

wo entsprechend:

$$(19') \qquad \mathsf{A}_{24} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{32} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ v & s & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathsf{A}_{34} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{33} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ w & s & 0 \end{vmatrix}.$$

Die durch die Gleichungen (16) *unter Elimination von* ϱ *dargestellte Gerade hat die Achsenkoordinaten* (I § 48, (11)):

$$(20) \qquad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = \alpha_{11}^u : \alpha_{12}^u : \alpha_{13}^u : \mathsf{A}_{14} : \mathsf{A}_{24} : \mathsf{A}_{34},$$

wo A_{14}, A_{24}, A_{34} *die Werte* (19); (19′) *und darin* β_1, γ_1 *und* σ *die Werte* (6) *und* (17) *haben.*

Diese Gerade hat die Richtung (5), geht also durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Kurve. Sie wird daher (§ 25, **6**) die Kurve noch in einem zweiten Punkte schneiden, der mit Rücksicht auf (11) der Scheitelpunkt ist. Sie wird also die $\mathfrak{x}$-Achse des neuen Koordinatensystems. Wir nennen sie die *Hauptachse der Schnittkurve.*

6. Die Koordinaten des Scheitelpunktes. Nachdem die Gleichungen (9) und (10) durch die Gleichungen (9) und (14) ersetzt sind, bleibt noch die Gleichung (11) hinzuzufügen, die nach (9) und (14) in der Form geschrieben werden kann:

$$g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = -(\varrho u + \sigma\alpha_1)x_0 - (\varrho v + \sigma\beta_1)y_0 \\ - (\varrho w + \sigma\gamma_1)z_0 + g_4^0 = g_4^0 - \sigma(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0) + \varrho s.$$

Daher ist der Scheitelpunkt schließlich (mit Rücksicht auf (6) und (17)) *aus den Gleichungen zu bestimmen:*

$$(21)\quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho u + \dfrac{A_{14}^u}{A_{44}^{\prime u}} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho v + \dfrac{A_{24}^u}{A_{44}^{\prime u}} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho w + \dfrac{A_{34}^u}{A_{44}^{\prime u}} = 0, \\ \left(a_{41} - \dfrac{A_{14}^u}{A_{44}^{\prime u}}\right)x_0 + \left(a_{42} - \dfrac{A_{24}^u}{A_{44}^{\prime u}}\right)y_0 + \left(a_{43} - \dfrac{A_{34}^u}{A_{44}^{\prime u}}\right)z_0 + a_{44} + \varrho s = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0, \end{cases}$$

wo ϱ *zu eliminieren ist* (§ 97, (21)).

Bezeichnet man nun mit X, Y, Z, T, R, S die mit abwechselnden Vorzeichen zu versehenden Unterdeterminanten fünften Grades, die aus der Matrix der Koeffizienten von $x_0, y_0, z_0, 1, \varrho, \frac{1}{A_{44}^{\prime u}}$ entstehen, indem man je eine der sechs Kolonnen wegläßt, so folgt:

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 : \varrho : \frac{1}{A_{44}^{\prime u}} = X : Y : Z : T : R : S.$$

Hier ist insbesondere:

$$S = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} - \frac{A_{14}^u}{A_{44}^{\prime u}} & a_{42} - \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{\prime u}} & a_{43} - \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{\prime u}} & a_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix} = -A^u + \frac{1}{A_{44}^{\prime u}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ A_{14}^u & A_{24}^u & A_{34}^u & 0 & 0 \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix}$$

oder, nach den Elementen der vierten Zeile entwickelt:

$$S = -A^u + \frac{1}{A_{44}^{\prime u}} \{(A_{14}^u)^2 + (A_{24}^u)^2 + (A_{34}^u)^2\}$$

und nach (4):

$$S = -2A^u.$$

Unter den Bedingungen (1), (4) *gibt es einen bestimmten endlichen Scheitelpunkt mit den Koordinaten* (§ 25, (26)):[94])

$$(22)\qquad x_0 = -\frac{X}{2A^u A_{44}^{\prime u}},\quad y_0 = -\frac{Y}{2A^u A_{44}^{\prime u}},\quad z_0 = -\frac{Z}{2A^u A_{44}^{\prime u}},$$

wo:

$$(23)\qquad X = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & u & A_{14}^u \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & v & A_{24}^u \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & w & A_{34}^u \\ a_{42} - \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{\prime u}} & a_{43} - \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{\prime u}} & a_{44} & s & 0 \\ v & w & s & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ldots, \ldots$$

7. Kanonische Gleichung der Schnittkurve. Mit Rücksicht auf (10), (11) und (15) folgt nun aus (2):

Unter den Voraussetzungen (1), (4) *kann die Gleichung der Schnittkurve stets auf die Form:*

(24) $$\lambda_2 \eta^2 - 2\sigma\xi = 0$$

gebracht werden, wo λ_2 *und* σ *die Werte* (3) *und* (17) *haben.*

Die Kurve ist eine *Parabel* (§ 25, (27)) mit dem Scheitelpunkt (22) und der Hauptachse (20).

8. Schnitte paralleler Ebenen. Die Bedingung (1) ist von s unabhängig, ebenso die Richtung (5) und der Ausdruck A'^{u}_{44} nach § 107, (20) und § 109, (10). Sind daher die Bedingungen (1); (4) für eine Ebene u, v, w, s erfüllt, so sind sie für alle parallelen Ebenen auch erfüllt, mit Ausnahme einer, für die $A^u = 0$. Diese in s quadratische Gleichung hat nämlich die Diskriminante $-AA^u_{44} = 0$.[180])

Ist die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene u, v, w, s *eine Parabel, so gilt dasselbe von der Schnittkurve mit jeder parallelen Ebene, die nicht Tangentialebene ist* (§ 107, (7))

Die Parabeln paralleler Schnitte sind ähnlich liegend.[180])

Die homogenen Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0 des Scheitelpunktes (22) sind ganze Funktionen zweiten Grades von s, etwa:

$$\tau x_0 = A_0 + A_1 s + A_2 s^2, \quad \tau y_0 = B_0 + B_1 s + B_2 s^2, \quad \tau z_0 = C_0 + C_1 s + C_2 s^2,$$
$$\tau t_0 = D_0 + D_1 s + D_2 s^2.$$

Durch Elimination von τ, 1, s, s^2 folgt die Gleichung einer Ebene; also folgt nach § 66, 8:

Der Ort der Scheitelpunkte eines Systems paralleler Parabelschnitte ist ein Kegelschnitt (§ 74, 2).

9. Gleichung der Schnittkurve bei unendlich ferner Mittelpunktsachse. Unter den Bedingungen (1); (7) wird die Gleichung (2) infolge von (3'):

(25) $$2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0 \; (2a'_{14}\xi\tau + 2a'_{24}\eta\tau + a'_{44}\tau^2 = 0),$$

wo nach 3 die Koeffizienten a'_{14} und a'_{24} nicht beide verschwinden.

Die Schnittkurve mit einer unendlich fernen Mittelpunktsachse besteht daher aus einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden.

10. Die Richtung der endlichen Geraden (25). Da jetzt nach § 111, (20); (22):

$$A^u_{14} = 0, \; A^u_{24} = 0, \; A^u_{34} = 0, \; A^u_{44} = 0; \; A^u = 0,$$

so ist für die Determinante A^u mit $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
a_{11} A^u_{k1} + a_{12} A^u_{k2} + a_{13} A^u_{k3} + u A^u_{k5} &= 0,\\
a_{21} A^u_{k1} + a_{22} A^u_{k2} + a_{23} A^u_{k3} + v A^u_{k5} &= 0,\\
a_{31} A^u_{k1} + a_{32} A^u_{k2} + a_{33} A^u_{k3} + w A^u_{k5} &= 0,\\
a_{41} A^u_{k1} + a_{42} A^u_{k2} + a_{43} A^u_{k3} + s A^u_{k5} &= 0,\\
u A^u_{k1} + v A^u_{k2} + w A^u_{k3} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus den vier ersten dieser Gleichungen folgt durch Multiplikation mit x_0, y_0, z_0, 1 und Addition:

$$g_1{}^0 A^u_{k1} + g_2{}^0 A^u_{k2} + g_3{}^0 A^u_{k3} + A^u_{k5}(ux_0 + vy_0 + wz_0 + s) = 0.$$

Für einen *beliebigen* Punkt x_0, y_0, z_0 der Ebene (9) ist daher die Gleichung (10) erfüllt, wenn man für die jetzt völlig verfügbare Hauptachsenrichtung $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtung:

(26) $$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = A^u_{k1} : A^u_{k2} : A^u_{k3} \quad (k = 1, 2 \text{ oder } 3)$$

nimmt, die nach (7) stets bestimmt ist $(A'^u \neq 0)$. Es ist die Richtung nach dem unendlich fernen Doppelpunkt § 107, (17).

Wählt man dann noch für x_0, y_0, z_0 einen endlichen Punkt der Linie (25), so nimmt die Gleichung (25) mit (10) und (11) die Form an:

(27) $$\xi \tau = 0.$$

Die endliche Gerade der Schnittkurve (die η-Achse) hat dabei die Richtung (26).

§ 114. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

1. Kanonische Gleichungen der Schnittkurve. Nach den vorstehenden Entwicklungen kann *die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung:*

(1) $$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

mit der Ebene:

(2) $$ux + vy + wz + s = 0$$

in bezug auf ein in der Ebene (2) selbst gelegenes rechtwinkliges System $\Omega\xi\eta$ durch eine *kanonische Gleichungsform* dargestellt werden. Diese ist abhängig einerseits von dem *Range der Kurve selbst* und andererseits von dem *Range des unendlich fernen Punktepaares der Kurve* (§ 26, 1) und gehört dementsprechend in ein bestimmtes Feld der folgenden Tabelle (§ 112, (29); § 113, (24); (27)):

(3)

	I. $A^u \neq 0$: Eigentl. Kegelschn.	II. $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$: Getrennt. Linienp.	III. $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u \neq 0$: Doppellin.
1. $A^u_{44} \neq 0$: Getrennt. Punktep.	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A^u}{A^u_{44}} = 0$	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$	*
2. $A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} \neq 0$: Doppelpunkt.	$\lambda_2 \eta^2 - 2 \frac{\sqrt{-A^u A'^u_{44}}}{A'^u_{44}} \xi = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A'^u_{44}} = 0$	$\lambda_2 \eta^2 = 0$
3. $A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} = 0$: Unbestimmt.	**	$\eta \tau = 0$	τ^2

Dazu käme noch eine *Kolonne* mit der Überschrift (§ 107, (45)):

IV. $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u = 0$: Unbestimmt,

die in der 3. *Zeile* die Bemerkung enthält: Ebene (2) Bestandteil der Fläche (1).

In dem freibleibenden Felde * widersprechen sich nach § 107, (26); (27) Zeilen- und Kolonnenbedingungen; ebenso in dem Felde **, weil $A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} = 0$ nach § 111, (17) die Gleichungen § 111, (20) und danach § 111, (21) zur Folge haben.

2. Übergang von einer beliebigen Ebene zur xy-Ebene. Nimmt man mit:

(4) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1, \quad s = 0$$

die xy-Ebene als schneidende Ebene (2), so erhält man direkt aus (1) mit $z = 0$ die Gleichung der Schnittkurve in der Form § 26, (1), falls man nachher a_{14}, a_{24}, a_{44} mit a_{13}, a_{23}, a_{33} bezeichnet.

Gleichzeitig wird nach § 107, (5); (9); (20):

(5) $$\begin{cases} A^u = -A; \; A^u_{11} = -A_{11}, \; A^u_{22} = -A_{22}, \; A^u_{33} = 0, \; A^u_{44} = -A_{33}; \\ \alpha^u_{11} = -a_{22}, \; \alpha^u_{22} = -a_{11}, \; \alpha^u_{33} = 0, \; \alpha^u_{44} = 0, \; \alpha^u_{55} = 0, \; \alpha^u_{66} = -a_{33}, \end{cases}$$

und damit nach § 107, (22); (23) und § 109, (10):

(6) $$A'^u = -A', \quad A''^u = -A''; \quad A'^u_{44} = -A'_{33},$$

sowie nach § 109, (25):

(7) $$\lambda_1 + \lambda_2 = A'_{33}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = A_{33},$$

wo nunmehr A, A_{kl}, A', A'', A'_{33} die Bedeutung von § 26, (2) haben. *Die Tabelle* (3) *für die Schnittkurve* (1), (2) *geht daher mit allen ihren Bestandteilen in die Tabelle* § 26, (2) *für den Kegelschnitt über.* Der Vorzeichenunterschied in den Feldern I, 2 rührt daher, daß die Pfeilspitze der ξ-Achse in § 25, (8) und § 113, (6), weil im Sinne von (5) auch $A^u_{14} = -A_{13}$, $A^u_{24} = -A_{23}$, $A^u_{34} = 0$ wird, die entgegengesetzte ist.

Es ist nun wie dort, auch in (3) noch nach den *Vorzeichen* der Koeffizienten zu unterscheiden.

3. Die Arten der eigentlichen Kegelschnitte. Schreibt man die Gleichung I, 1 der Tabelle (3) mit den Abkürzungen:

(8) $$\alpha = \frac{A^u}{A^u_{44}\lambda_1}, \quad \beta = \frac{A^u}{A^u_{44}\lambda_2}$$

in der Form:

(9) $$\frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + 1 = 0,$$

so wird nach § 109, (25):

(10) $$\alpha\beta = \frac{(A^u)^2}{(A^u_{44})^2\lambda_1\lambda_2} = -\frac{e^2(A^u)^2}{(A^u_{44})^3}, \quad \alpha + \beta = \frac{A^u(\lambda_1 + \lambda_2)}{A^u_{44}\lambda_1\lambda_2} = \frac{A^u A'^u_{44}}{(A^u_{44})^2}.$$

Die Vorzeichen der Koeffizienten α, β sind daher (§ 26, (7)) für:

(11) $$\begin{cases} -A^u_{44} > 0 & A^u A'^u_{44} > 0:\ ++ \\ -A^u_{44} > 0 & A^u A'^u_{44} < 0:\ -- \\ -A^u_{44} < 0 & :\ \pm\mp. \end{cases}$$

Die Bedingungen der zweiten Zeile (11) sind aber ersetzbar durch die beiden Angaben:

(12) $$-A^u_{44} > 0, \quad -A^u_{44} \text{ und } A^u A'^u_{44} \text{ nicht beide } > 0.$$

Denn diese lassen nur die Möglichkeiten offen: $-A^u_{44} > 0$, $A^u A'^u_{44} < 0$ oder $-A^u_{44} > 0$, $A^u A'^u_{44} = 0$. Nun ist aber für I, 1 $A^u \neq 0$ und nach § 111, (29) für $-A^u_{44} > 0$ stets $A'^u_{44} \neq 0$, so daß die zweite Möglichkeit wegfällt. Für die dritte Zeile (11) sind ebenfalls $-A^u_{44}$ und $A^u A'^u_{44}$ nicht beide > 0.

Wir können daher die Angaben (11) auch in folgende Tabelle ordnen, indem wir zugleich die Bezeichnung von § 26, (9) einführen

(13)

		$A^u \neq 0$	
		$-A^u_{44} > 0,\ A^u A'^u_{44} > 0$	$-A^u_{44},\ A^u A'^u_{44}$ nicht beide > 0
$A^u_{44} \neq 0$	$-A^u_{44} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$
	$-A^u_{44} < 0$	0	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$

In dem frei bleibenden Felde widersprechen sich Zeilen- und Kolonnenbedingungen. Hier schließt sich die Parabel I, 2 an die zweite Kolonne an:

(14)

$A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0$	0	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$

da für sie nicht nur $A^u_{44} = 0$, sondern nach § 111, (17) auch $A^u A'^u_{44} < 0$ ist.

4. Die Arten der Linienpaare. Die Gleichung II, 1:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A^u_{44}}{e^2} \tag{15}$$

stellt, je nachdem $-A^u_{44} > 0$ oder < 0 ein *imaginäres* oder *reelles Linienpaar* dar. Da aber für $A^u = 0$, $A^u_{44} \neq 0$ nach § 107, (24) A'^u *und* A^u_{44} *stets dasselbe Vorzeichen* haben, können wir die doppelte Form der Bedingungen in folgender Tabelle ausdrücken:

(16)

		$A^u = 0,\ A'^u \neq 0$	
		$-A'^u > 0$	$-A'^u < 0$
$A^u_{44} \neq 0$	$-A^u_{44} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$	0
	$-A^u_{44} < 0$	0	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$

Die Gleichung II, 2:

$$\lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A'^u_{44}} = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{A'^u_{44}}{e^2} \quad (\S\ 109, (26)) \tag{17}$$

stellt, je nachdem $-A'^u > 0$ oder < 0, ein *imaginäres* oder *reelles Parallellinienpaar* dar. Es ergibt sich also im Anschluß an die Tabelle (16):

(18)

$A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$

Für den Fall II, 3 ist nach § 111, (35) stets $-A'^u < 0$, so daß er sich an die zweite Kolonne von (16) und (18) anreiht:

(19)

$A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} = 0$	0	$\eta\tau = 0$

5. Allgemeine Übersicht der Arten der Schnittkurve. Indem man die Tabellen (13), (14), (16), (18), (19) nunmehr in die Tabelle (3) einträgt, ergibt sich die folgende allgemeine Übersicht (20), aus der *die Art der Schnittkurve der Fläche* (1) *mit der Ebene* (2) nach den Bedingungen der Zeilen und Kolonnen zu entnehmen ist. Dabei haben A^u, A'^u, A''^u; A^u_{44}, A'^u_{44} die in § 107, (5); (22); (23), § 111, (5), § 109, (10) angegebene Bedeutung und sind zugleich die Namen der Kegelschnitte eingefügt (§ 26, (19)):[182])

(20)

		$A^u \neq 0$: Eigentl. Kegelschnitte		$A^u = 0,\ A'^u \neq 0$: Getr. Linienpaare		$A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0$:
		$-A^u_{44} > 0,\ A^u A'^u_{44} > 0$:	$-A^u_{44},\ A^u A'^u_{44}$ nicht beide > 0:	$-A'^u > 0$:	$-A'^u < 0$:	
		I. Imag. Kegelschn.	II. Reell. Kegelschn.	III. Imag. Linienp.	IV. Reell. Linienp.	V. Doppellinien
$A^u_{44} \neq 0$: Eigentl. Punktepaare	$-A^u_{44} > 0$: 1. Imag. Pp.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reelle Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Imag. Linienp.		
	$-A^u_{44} < 0$: 2. Reell. Pp.		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Hyperbel		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Reell. Linienp.	
$A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} \neq 0$: 3. Doppelp.			$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$ Parabel	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Parallellinienp.	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reell. Parallellinienp.	$\eta^2 = 0$ Endl. Doppell.
$A^u_{44} = 0,\ A'^u_{44} = 0$: 4. Unbest.					$\eta(\tau) = 0$ Endl. + u. f. Linie	$(\tau^2) = 0$ Un. f. Doppell.

Auch diese Tabelle geht für den Spezialfall unter 2 in die Tabelle § 26, (19) über.

IV. Kapitel.

Schnitte besonderer Flächen und besondere Schnitte.

§ 115. Ebene Schnitte besonderer Flächen.

1. Glockenförmige und sattelförmige Flächen. Wird eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ($A \neq 0$, § 78, (2)) von einer Ebene geschnitten, die parallel ist der Tangentialebene eines reellen endlichen Punktes der Fläche, so ist das Produkt der Hauptachsenkoeffizienten der Schnittkurve nach § 110, (20):

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A_{44}^u}{G^2} = -\frac{A}{G^2}, \quad G^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2,$$

also von einem unveränderlichen Vorzeichen, dem entgegengesetzten der Determinante A.

Eine solche Ebene schneidet daher die Fläche nur in Kurven der ersten oder nur in Kurven der zweiten Zeile der Tabelle § 114, (20), je nachdem A negativ oder positiv ist.

Insbesondere schneidet die Tangentialebene selbst § 107, (7) *die Flächen $A < 0$, also* (§ 99, (31)) *das Ellipsoid, zweischalige Hyperboloid und elliptische Paraboloid, stets in einem imaginären Linienpaar, die reellen Flächen $A > 0$, also das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, stets in einem reellen Linienpaar.*

Die Flächen $A < 0$ sind daher (§ 67, (28)) *nichtgeradlinige*, die reellen Flächen $A > 0$ *geradlinige*. Jene heißen auch *positiv gekrümmte* oder *glockenförmige*, diese *negativ gekrümmte* oder *sattelförmige*.[181])

2. Die Ellipsoide und Hyperboloide. Für die Fläche:

(1) $$g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

wo die Umkehr der Vorzeichen von c^2 oder b^2 und c^2 vorbehalten bleibt, gibt die Berechnung der geränderten Determinanten § 114, 5:

(2) $$A^u = \frac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - s^2}{a^2b^2c^2};$$

(3) $$A_{11}^u = \frac{b^2v^2 + c^2w^2 - s^2}{b^2c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{c^2w^2 + a^2u^2 - s^2}{c^2a^2}, \quad A_{33}^u = \frac{a^2u^2 + b^2v^2 - s^2}{a^2b^2};$$

(4) $$A_{14}^u = \frac{us}{b^2c^2}, \quad A_{24}^u = \frac{vs}{c^2a^2}, \quad A_{34}^u = \frac{ws}{a^2b^2}, \quad A_{44}^u = -\frac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}{a^2b^2c^2};$$

(5) $$\alpha_{11}^u = -\frac{b^2v^2 + c^2w^2}{b^2c^2}, \quad \alpha_{22}^u = -\frac{c^2w^2 + a^2u^2}{c^2a^2}, \quad \alpha_{33}^u = -\frac{a^2u^2 + b^2v^2}{a^2b^2}.$$

Damit wird:

(6) $$A'^u = A^u(a^2 + b^2 + c^2 - 1) - \frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{a^2b^2c^2},$$

(7) $$A'^{u}_{44} = -\frac{b^2v^2+c^2w^2}{b^2c^2} - \frac{c^2w^2+a^2u^2}{c^2a^2} - \frac{a^2u^2+b^2v^2}{a^2b^2},$$

oder:

(8) $$A'^{u}_{44} = A^{u}_{44}(a^2+b^2+c^2) + \frac{a^4u^2+b^4v^2+c^4w^2}{a^2b^2c^2}$$

und überdies nach (2) und (4):

(9) $$A^{u} + A^{u}_{44} = -\frac{s^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ohne Rücksicht auf eine etwaige Umkehr der Vorzeichen von b^2 und c^2 ergibt sich daher aus (6), daß A^u und A'^u, und aus (8), daß für eine endliche Ebene u, v, w, s auch A^u_{44} und A'^u_{44} niemals beide gleichzeitig verschwinden können.

Die ebenen Schnitte der Ellipsoide und Hyperboloide sind daher entweder eigentliche Kegelschnitte oder getrennte Linienpaare und haben mit der unendlich fernen Geraden zwei getrennte Punkte oder einen Doppelpunkt gemein (§ 114, (3) nur I. und II. Kolonne, 1. und 2. Zeile)

3. Das Ellipsoid. Für das Ellipsoid (1) ist nach (4):

(10) $$-A^u_{44} > 0,$$

und nach (7):

(11) $$\operatorname{sign} A^u A'^u_{44} = -\operatorname{sign} A^u = -\operatorname{sign}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-s^2).$$

Aus der Tabelle § 114, (20) folgt daher[183]):

Das Ellipsoid (1) *wird von der Ebene u, v, w, s in einer imaginären Ellipse, einem imaginären Linienpaar oder einer reellen Ellipse geschnitten, je nachdem:*

(12) $$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-s^2<0, \quad =0 \quad \text{oder} \quad >0.$$

Die Ebenen mit imaginärem Linienpaar sind Tangentialebenen (§ 70, (10)).

4. Das einschalige Hyperboloid. Beim einschaligen Hyperboloid:

(13) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

($-c^2$ für c^2 in (1)—(9)) ist nach (9):

(14) $$A^u = -A^u_{44} + \frac{s^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ist daher:

(15) $$-A^u_{44} > 0,$$

so ist stets auch $A^u > 0$. Mit (15) ist aber nach (4):

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2<0,$$

also auch:

$$b^2v^2-c^2w^2<0 \quad \text{und} \quad a^2u^2-c^2w^2<0$$

und damit nach (7):

$$A'^u_{44} = \frac{b^2v^2-c^2w^2}{b^2c^2} + \frac{a^2u^2-c^2w^2}{a^2c^2} - \frac{a^2u^2+b^2v^2}{a^2b^2} < 0.$$

Neben (15) kann daher nicht $A^u A'^u_{44} > 0$ sein. Da ferner nach (6) für $A^u = 0$:

$$-A'^u = -\frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{a^2b^2c^2} < 0,$$

so sind in der Tabelle § 114, (20) die erste und dritte Kolonne unmöglich:

Das einschalige Hyperboloid hat nur reelle ebene Schnitte.

Ist die Ebene u, v, w, s *keine Tangentialebene:*

(16) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem:

(17) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 < 0, \quad > 0 \quad \textit{oder} \quad = 0;$$

ist die Ebene eine Tangentialebene:

(18) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 = 0,$$

so ist die Schnittkurve ein gekreuztes oder paralleles Geradenpaar, je nachdem:

(19) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = s^2 > 0 \quad \textit{oder} \quad = 0.$$

In parallelen Geraden schneiden somit die *Tangentialebenen des Asymptotenkegels:*

(20) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \quad s = 0$$

(§ 74, 2), in Parabeln die zu einer solchen Tangentialebene *parallelen* Ebenen:

(21) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \quad s \neq 0.$$

5. Das zweischalige Hyperboloid. Beim zweischaligen Hyperboloid:

(22) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

($-b^2$, $-c^2$ für b^2, c^2 in (1)—(9)) ist nach (6) für $A^u = 0$:

$$-A'^u = \frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{a^2b^2c^2} > 0,$$

so daß die vierte Kolonne in § 114, (20) unmöglich wird.

Ist die Ebene u, v, w, s *keine Tangentialebene:*

(23) $$a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Ellipse (imaginär oder reell), Hyperbel oder Parabel, je nachdem:

(24) $$a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 > 0, \quad < 0 \quad \textit{oder} \quad = 0;$$

ist die Ebene eine Tangentialebene:

(25) $$a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 = 0,$$

so ist die Schnittkurve ein imaginäres Geradenpaar mit endlichem oder unendlich fernem Doppelpunkt, je nachdem:

(26) $$a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 > 0 \quad \textit{oder} \quad = 0.$$

In Parabeln schneiden *die zu einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallelen Ebenen.*

6. Die Paraboloide. Für die Fläche:

(27) $$g = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0,$$

wo die Umkehr des Vorzeichens von c^2 vorbehalten bleibt, gibt die Berechnung der geränderten Determinanten:

(28) $$A^u = \frac{b^2v^2 + c^2w^2 + 2us}{b^2c^2},$$

(29) $$A_{11}^u = -\frac{s^2}{b^2c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{c^2w^2 + 2us}{c^2}, \quad A_{33}^u = \frac{b^2v^2 + 2us}{b^2},$$

(30) $$A_{44}^u = -\frac{u^2}{b^2c^2},$$

(31) $$\alpha_{11}^u = -\frac{b^2v^2 + c^2w^2}{b^2c^2}, \quad \alpha_{22}^u = -\frac{u^2}{c^2}, \quad \alpha_{33}^u = -\frac{u^2}{b^2}.$$

Damit wird:

(32) $$A'^u = (b^2 + c^2)A^u - \frac{u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{b^2c^2},$$

(33) $$A_{44}'^u = -\frac{b^2v^2 + c^2w^2}{b^2c^2} - \frac{u^2}{b^2} - \frac{u^2}{c^2}.$$

Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von c^2 folgt aus (32), daß A^u und A'^u niemals beide gleichzeitig verschwinden können.

Die ebenen Schnitte der Paraboloide sind daher entweder eigentliche Kegelschnitte oder getrennte Linienpaare (§ 114, (3) *nur I. und II. Kolonne*).

7. Das elliptische Paraboloid. Beim elliptischen Paraboloid (27) ist nach (30) für jede endliche Ebene:

$$-A_{44}^u > 0 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $u \neq 0$ oder $= 0$, also die Ebene nicht parallel oder parallel der x-Achse ist. Die zweite Zeile der Tabelle § 114, (20) ist daher unmöglich.

Nach (33) ist $A_{44}'^u < 0$ und danach:

$$\operatorname{sign} A^u A_{44}'^u = -\operatorname{sign} A^u = -\operatorname{sign}(b^2v^2 + c^2w^2 + 2us).$$

Ist die endliche Ebene u, v, w, s keine Tangentialebene (§ 70, (32)):

(34) $$b^2v^2 + c^2w^2 + 2us \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Ellipse oder Parabel, je nachdem die Ebene

zur Hauptachse nicht parallel oder parallel ist; die Ellipse ist imaginär oder reell, je nachdem

(35) $$b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2us < 0 \quad oder \quad > 0.$$

Ist $A^u = 0$, so kann nach (28) nicht $u = 0$ ($A^u_{44} = 0$) sein, ohne daß auch $v = 0$, $w = 0$, und ist nach (32) $-A'^u > 0$.

Ist die endliche Ebene u, v, w, s eine Tangentialebene:

(36) $$b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2us = 0,$$

so ist sie der Hauptachse nicht parallel, und die Schnittkurve ist ein imaginäres Linienpaar mit endlichem Doppelpunkt.

8. Das hyperbolische Paraboloid. Beim hyperbolischen Paraboloid:

(37) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

($-c^2$ für c^2 in (27)—(33)) ist für jede Ebene nach (30):

$$-A^u_{44} < 0 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $u \neq 0$ oder $= 0$. Die erste Zeile der Tabelle § 114, (20) ist daher unmöglich.

Ist die endliche Ebene u, v, w, s keine Tangentialebene:

(38) $$b^2 v^2 - c^2 w^2 + 2us \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Hyperbel oder Parabel, je nachdem die Ebene zu der Hauptachse nicht parallel oder parallel ist.

Ist $A^u = 0$, so ist nach (32) $-A'^u < 0$; ist neben $A^u = 0$ auch $A^u_{44} = 0$ ($u = 0$), so ist nach (28) und (33) zugleich $A'^u_{44} = 0$. Daher ist in der Tabelle § 114, (20) nur das zweite und vierte Feld der vierten Kolonne möglich.

Ist die endliche Ebene u, v, w, s eine Tangentialebene:

(39) $$b^2 v^2 - c^2 w^2 + 2us = 0,$$

so ist die Schnittkurve ein Linienpaar mit endlichem Doppelpunkt oder eine einzelne endliche gerade Linie (in Verbindung mit einer unendlich fernen), je nachdem sie der Hauptachse nicht parallel oder parallel ist.

Die in einer einzelnen geraden Linie schneidenden Ebenen sind also die beiden Scharen paralleler Ebenen (§ 62, (13); (13')):

(40) $$b^2 v^2 - c^2 w^2 = 0, \quad u = 0.$$

9. Der elliptische Kegel. Für den elliptischen Kegel:

(41) $$g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gibt die Berechnung der geränderten Determinanten:

(42) $$A^u = \frac{s^2}{a^2b^2c^2},$$

(43) $$A_{11}^u = \frac{s^2}{b^2c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{s^2}{c^2a^2}, \quad A_{33}^u = -\frac{s^2}{a^2b^2},$$

(44) $$A_{44}^u = \frac{a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2}{a^2b^2c^2},$$

(45) $$\begin{cases} \alpha_{11}^u = \dfrac{b^2v^2 - c^2w^2}{b^2c^2}, & \alpha_{22}^u = \dfrac{-c^2w^2 + a^2u^2}{c^2a^2}, & \alpha_{33}^u = -\dfrac{a^2u^2 + b^2v^2}{a^2b^2}, \\ \alpha_{44}^u = -\dfrac{s^2}{a^2}, & \alpha_{55}^u = -\dfrac{s^2}{b^2}, & \alpha_{66}^u = \dfrac{s^2}{c^2}. \end{cases}$$

Damit wird:

(46) $$A'^u = A^u(a^2 + b^2 - c^2) + A_{44}^u,$$

(47) $$A_{44}'^u = \frac{b^2v^2 - c^2w^2}{b^2c^2} + \frac{a^2u^2 - c^2w^2}{a^2c^2} - \frac{a^2u^2 + b^2v^2}{a^2b^2},$$

(48) $$A''^u = A_{44}'^u - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)s^2,$$

(49) $$A_{44}'^u = (a^2 + b^2 - c^2)A_{44}^u - \frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2}{a^2b^2c^2}.$$

Nach (42) verschwindet A^u gleichzeitig mit s. Sonst ist stets $A^u > 0$. Ist nun $-A_{44}^u > 0$, so folgt aus (47) gerade wie unter 4 aus (15), daß $A_{44}'^u < 0$ und daher $A^u A_{44}'^u < 0$. Es folgt daher mit Rücksicht auf die Tabelle § 114, (20):

Jede nicht durch die Spitze des Kegels (41) *gehende Ebene* u, v, w, s *schneidet in einem reellen eigentlichen Kegelschnitt: einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem:*

(50) $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 < 0, \quad > 0 \quad \textit{oder} \quad = 0.$$ [1])

In letzterem Falle ist die Ebene einer Tangentialebene parallel (§ 71, (8)).

Ist $A^u = 0$ oder $s = 0$, so ist nach (46) und (48): $-A'^u = -A_{44}^u$ und $A''^u = A_{44}'^u$. Ist daher $A'^u \neq 0$, so ist auch $A_{44}^u \neq 0$. Ist aber $A'^u = 0$, also auch $A_{44}^u = 0$, so ist nach (49) $A_{44}'^u \neq 0$, also auch $A''^u \neq 0$. Daher folgt aus der Tabelle § 114, (20):

Eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet in einem imaginären oder reellen Geradenpaar oder einer Doppelgeraden, je nachdem:

$$a^2u^2 + b^2y^2 - c^2w^2 < 0, \quad > 0 \quad \textit{oder} \quad = 0.$$

Die längs einer Geraden berührenden Tangentialebenen des Kegels sind daher durch die Bedingungen:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \quad s = 0$$

gekennzeichnet (§ 71, (8); (9)).

§ 116. Gleichseitig hyperbolische Schnitte.

1. Allgemeine Bedingung der gleichseitig hyperbolischen Schnitte. Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene u, v, w, s kann stets durch eine Gleichung von der Form § 110, (11) dargestellt werden, die sich auf ein in der Ebene liegendes rechtwinkliges Koordinatensystem $\Omega \xi \eta$ bezieht und in der (§ 109, (25)):

(1) $$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{A'^u_{44}}{e^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A^u_{44}}{e^2}, \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Ist nun:

(2) $$A'^u_{44} = 0,$$

so werden λ_1 und λ_2 entgegengesetzt gleich, etwa $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, und nimmt die Gleichung der Schnittkurve die Form:

(3) $$\lambda(\xi^2 - \eta^2) + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

an, worin nach (1):

(4) $$\lambda^2 = \frac{A^u_{44}}{e^2}.$$

Unter der Bedingung (2) *ist daher der ebene Schnitt eine gleichseitige Hyperbel* (§ 26, (26)).[184])

2. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte. Wir verstehen dabei unter gleichseitiger Hyperbel *alle in der Form* (3) *enthaltenen Kegelschnitte.*

Wenn neben (2) $A^u_{44} \neq 0$, also nach (4):

(5) $$A^u_{44} > 0,$$

hat die Kurve (3) nach § 111, (11) einen bestimmten Mittelpunkt:

(6) $$x = \frac{A^u_{14}}{A^u_{44}}, \quad y = \frac{A^u_{24}}{A^u_{44}}, \quad z = \frac{A^u_{34}}{A^u_{44}},$$

und ihre Gleichung kann nach § 112, (18) auf die Form:

(7) $$\lambda(\xi^2 - \eta^2) + \frac{A^u}{A^u_{44}} = 0$$

gebracht werden. Es ergibt sich daher als Sonderfall der zweiten Zeile der Tabelle § 114, (20):

Je nachdem neben (2) *und* (5):

(8) $$A^u \neq 0 \quad \textit{oder} \quad A^u = 0,$$

ist die Schnittkurve eine eigentliche gleichseitige Hyperbel oder ein rechtwinkliges Geradenpaar.

Ist aber neben (2):

(9) $$A^u_{44} = 0,$$

so *besteht der gleichseitig hyperbolische Schnitt* (3) *aus einer endlichen*

und einer unendlich fernen Geraden oder ist eine unendlich ferne Doppelgerade. Er kann dann in homogenen Koordinaten in der Form:

(10) $$\eta\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \tau^2 = 0$$

dargestellt werden (§ 114, (20), 4. Zeile).

3. Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte. Die Bedingung (2) oder § 109, (10)):

(11) $$A'^{u}_{44} = \alpha^{u}_{11} + \alpha^{u}_{22} + \alpha^{u}_{33} = 0,$$

ist nach § 109, (9) eine in u, v, w homogene Gleichung zweiten Grades.

Diejenigen Ebenen u, v, w, s, welche die Fläche zweiter Ordnung in einer gleichseitigen Hyperbel (3) *schneiden, sind die ∞^2 Tangentialebenen einer unendlich fernen Kurve zweiter Klasse, die durch die Gleichung* (11) *dargestellt wird* (§ 80, (19')).

Die Ebenen gehen büschelweise durch eine Tangente dieser Kurve. Diejenigen von ihnen, die neben (11) die Gleichung:

(12) $$s = 0$$

erfüllen, also durch den Koordinatenanfangspunkt O gehen, umhüllen einen Kegel zweiter Klasse (§ 80, (20')).

Wir nennen diesen Kegel zweiter Klasse:

(13) $$A'^{u}_{44} = 0, \; s = 0$$

den Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Fläche zweiter Ordnung.

Jede Tangentialebene dieses Kegels und jede zu ihr parallele Ebene schneidet alsdann die Fläche in einer gleichseitigen Hyperbel (im allgemeinen Sinne (3)).

Die Tangenten der Kurve (11) sind nach § 21, (40); § 26, (26) auch diejenigen Geraden der unendlich fernen Ebene, welche die unendlich ferne Kurve der Fläche und den imaginären Kugelkreis (§ 91, 8) in vier harmonischen Punkten treffen.

4. Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte beim Hyperboloid und Kegel. Von den *Mittelpunktsflächen* zweiter Ordnung können nur diejenigen *gleichseitig* hyperbolische Schnitte haben, die überhaupt *hyperbolische* besitzen, die beiden *Hyperboloide* und der *Kegel* (§ 115, 4; 5; 9).

Die Gleichungen der beiden Hyperboloide sind:

(14) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2,$$

(14') $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b^2 < c^2,$$

und die ihrer Asymptotenkegel:

(15) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ (15′) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

Jeder der letzteren kann zugleich als beliebiger elliptischer Kegel gelten.

Der Leitkegel (13) der gleichseitig hyperbolischen Schnitte hat für die Flächen (14) und (15) nach § 115, (7) und (47) dieselben Gleichungen:

(16) $\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)u^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)v^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)w^2=0,\ s=0,$

und für die Flächen (14′) und (15′) ebenso:

(16′) $\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)u^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)v^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)w^2=0,\ s=0.$

Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des Hyperboloids und seines Asymptotenkegels ist also ein mit diesem konzentrischer und koaxialer Kegel zweiter Klasse.

Er kann nach § 80, **10** ein imaginärer oder ein elliptischer oder ein in zwei Ebenenbüschel (ein Strahlenpaar) zerfallender Kegel sein. Das letztere tritt bei (16) ein, wenn mit $b^2=c^2$ der Kegel (15) von der besonderen Art § 54, **8** ist (für $a^2=c^2$ *imaginäres* Strahlenpaar).

5. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Hyperboloide und Kegel. Jede (reelle) Tangentialebene des Kegels (16) oder (16′) und jede zu ihr parallele Ebene schneidet das Hyperboloid (14) oder (14′) und seinen Asymptotenkegel in einer gleichseitigen Hyperbel. Diese ist, da nach § 115, (8) und (49) A_{44}^u nicht neben $A_{44}^{\prime u}$ verschwinden kann, nach (7) stets entweder eine eigentliche gleichseitige Hyperbel oder ein rechtwinkliges Geradenpaar, und zwar nach (8), je nachdem $A^u \neq 0$ oder $A^u=0$, je nachdem also die schneidende Ebene u, v, w, s keine oder eine Tangentialebene des Hyperboloids ist.

Nun ist aber für die Hyperboloide (14) und (14′) nach § 115, (9) bezüglich:

(17) $A^u=\frac{s^2}{a^2b^2c^2}-A_{44}^u,$ (17′) $A^u=-\frac{s^2}{a^2b^2c^2}-A_{44}^u,$

und für einen gleichseitig hyperbolischen Schnitt u, v, w, s nach (5) $A_{44}^u>0$. Im Falle (17′) kann daher für einen solchen A^u nicht verschwinden, während es im Falle (17) für jedes reelle der Gleichung (16) genügende Wertsystem u, v, w zwei reelle Werte von s:

(18) $$s^2=A_{44}^u a^2b^2c^2$$

gibt (§ 109, (8)) für die $A^u=0$ wird.

I. *Bei dem einschaligen Hyperboloid gibt es in jedem (reellen) Büschel paralleler gleichseitig hyperbolischer Schnittebenen zwei (reelle) Tangential-*

ebenen; sie schneiden die Fläche in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.

II. *Beim zweischaligen Hyperboloid gibt es nur eigentliche gleichseitige Hyperbeln als Schnittkurven.*

III. Beim *Kegel* (15) ist nach § 115, (42):

(19) $$A^u = \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2},$$

so daß gerade *die Ebenen des Leitkegels* (16) *in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden schneiden, alle parallelen Ebenen in eigentlichen gleichseitigen Hyperbeln.*

IV. *Bei dem am Schluß von* 4 *erwähnten Kegel bilden also die in rechtwinkligen Erzeugenden schneidenden Ebenen zwei Büschel, deren Achsen* in Ebenen- und Punktkoordinaten die Gleichungen haben:

(20) $$(a^2 - b^2)v^2 - (a^2 + b^2)w^2 = 0, \ s = 0;$$

(21) $$\frac{y^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 0, \ x = 0; \ a^2 > b^2,$$

also nach § 59, (21) und § 84, (8) *die Polstrahlen der Kreisschnittebenen sind.*

6. Ort der Punkte des einschaligen Hyperboloids mit rechtwinkligen Erzeugenden. Die Berechnung der geränderten Determinanten gibt für die Fläche (14) nach § 115, (4):

(22) $$A_{14}^u = -\frac{us}{b^2 c^2}, \quad A_{24}^u = -\frac{vs}{c^2 a^2}, \quad A_{34}^u = \frac{ws}{a^2 b^2}.$$

Für den Mittelpunkt (6) eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes, der mit (18) in ein rechtwinkliges Geradenpaar zerfällt, ist daher:

(23) $$x = -\frac{a^2 u}{s}, \quad y = -\frac{b^2 v}{s}, \quad z = \frac{c^2 w}{s}.$$

Danach ist, wieder mit Rücksicht auf (18):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{s^2} = \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{A_{44}^u a^2 b^2 c^2}$$

oder nach § 115, (8) mit $A_{44}'^{u} = 0$ und $-c^2$ für c^2:

(24) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Die Punkte des einschaligen Hyperboloids, durch die zwei zueinander rechtwinklige Erzeugende gehen, liegen auf der Kugel (24) (§ 64, (3)).

7. Beziehung des Leitkegels (16) zum Asymptotenkegel. Die Gleichungen (16) oder (16′) können mit der Abkürzung:

(25) $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = d \quad \text{oder} \quad (25') \ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = d$$

in der Form geschrieben werden:

(26) $$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}\right)-d(u^2+v^2+w^2)=0,\quad s=0,$$
oder:
(26') $$\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}\right)-d(u^2+v^2+w^2)=0,\quad s=0.$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt (§ 71, (22); (8); § 118, (12)).

Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des Hyperboloids ist mit dem Reziprokalkegel des Asymptotenkegels konfokal.

8. Nichtvorhandensein von drei rechtwinkligen Erzeugenden bei Kegel und Hyperboloid. Der erste der beiden Reziprokalkegel zweiter Klasse:

(27) $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}=0,\ s=0,$ (27') $\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}=0,\ s=0$

der Kegel (15), (15') ist der Ort *aller* Ebenen, die auf einer Erzeugenden des Kegels (15) senkrecht stehen. Der zu (27) konfokale Kegel (26) hat mit (27) selbst *keine* reellen Tangentialebenen gemein (§ 118, 8). Daher kann die Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes für $d \neq 0$ niemals auf einer Erzeugenden des Kegels (15) senkrecht stehen, also auch zwei rechtwinklige Erzeugende, in denen eine solche Ebene den Kegel (15) schneidet, niemals beide auf einer dritten.

Bei einem elliptischen Kegel gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden.

Da nun zu jeder Erzeugenden des Kegels (15) ein Paar paralleler Erzeugenden des Hyperboloids (14) gehört und umgekehrt, so folgt:

In einer Regelschar eines einschaligen Hyperboloids gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden.

9. Gleichseitiger Kegel und gleichseitige Hyperboloide. Ist jedoch in (25), (25') $d=0$, so fällt der Leitkegel (26), (26') der gleichseitig hyperbolischen Schnitte mit dem konfokalen Reziprokalkegel (27), (27') zusammen. In diesem Falle steht daher *jede* Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes auf einer Erzeugenden des Asymptotenkegels senkrecht und *jede* auf einer Erzeugenden senkrechte Ebene ist Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes.

Wir nennen das einschalige Hyperboloid (14) *und den Kegel* (15) *gleichseitig* (§ 64, (8); (12)), *wenn:*

(28) $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0$$

und das zweischalige Hyperboloid (14') *und den Kegel* (15') *gleichseitig, wenn:*

(28') $$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Dann lautet das gewonnene Resultat:

Bei dem gleichseitigen Kegel schneidet jede auf einer Erzeugenden senkrechte Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel, beziehungsweise, wenn sie durch die Spitze geht, in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.

Der gleichseitige Kegel besitzt ∞^1 *Systeme von drei zueinander senkrechten Erzeugenden; jede Erzeugende bestimmt ein solches System.*

Bei dem gleichseitigen einschaligen und dem gleichseitigen zweischaligen Hyperboloid schneidet jede auf einer Erzeugenden des Asymptotenkegels senkrechte Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel.

Jede Regelschar des gleichseitigen einschaligen Hyperboloids enthält ∞^1 *Systeme von drei zueinander senkrechten Erzeugenden.*

10. Leitkegel des gleichseitig hyperbolischen Paraboloids, hyperbolischen Zylinders und Ebenenpaares. Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids ist:

(29) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0,$$

die des hyperbolischen Zylinders:

(30) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und die der Asymptotenebenen der beiden Flächen (29) und (30):

(31) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Der Leitkegel (13) der gleichseitig hyperbolischen Schnitte hat für diese drei Flächen nach § 115, (33) die Gleichung:

(32) $$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)u^2 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{w^2}{b^2} = 0, \quad s = 0.$$

Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids, des hyperbolischen Zylinders und des Ebenenpaares ist ein mit diesen koaxialer Kegel zweiter Klasse.

11. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte beim hyperbolischen Paraboloid. Jede Tangentialebene des Kegels (32) und jede zu ihr parallele Ebene u, v, w, s schneidet das hyperbolische Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.

Diese zerfällt nach (9) in eine einzelne Gerade (in Verbindung mit einer unendlich fernen, wie in (10)), wenn die Ebene neben (32) auch noch die Gleichung $u = 0$ (§ 115, (30)) erfüllt, so daß:

(33) $$b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \qquad u = 0;$$

sie ist dann einer der Asymptotenebenen parallel.

I. *Alle den Asymptotenebenen parallelen Ebenen und nur diese schneiden das hyperbolische Paraboloid in einer einzelnen endlichen Geraden* (§ 115, (40)).

Im übrigen, für $u \neq 0$, schneidet eine Ebene u, v, w, s, für die u, v, w der Gleichung (32) genügen, nach (8) in einer eigentlichen gleichseitigen Hyperbel oder einem rechtwinkligen Geradenpaar, je nachdem $A^u \neq 0$ oder $A^u = 0$ ist. Nach § 115, (28) gibt es aber zu jedem u, v, w mit $u \neq 0$ einen Wert:

$$(34) \qquad s = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{2u},$$

für den $A^u = 0$ wird.

II. *In jedem Büschel paralleler gleichseitig hyperbolischer Schnitte gibt es also stets eine und nur eine Tangentialebene. Sie schneidet das Paraboloid in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.*

12. Ort der Punkte des hyperbolischen Paraboloids mit rechtwinkligen Erzeugenden. Die Berechnung der geränderten Determinanten gibt für die Fläche (29), wie § 115, (30):

$$(35) \quad A_{14}^u = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2 + us}{b^2 c^2}, \quad A_{24}^u = \frac{uv}{c^2}, \quad A_{34}^u = -\frac{uw}{b^2}, \quad A_{44}^u = \frac{u^2}{b^2 c^2}.$$

Für den Mittelpunkt (6) eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes, der mit (34) in ein rechtwinkliges Geradenpaar zerfällt, ist daher:

$$(36) \qquad x = \frac{s}{u} = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{2u^2}, \quad y = \frac{b^2 v}{u}, \quad z = -\frac{c^2 w}{u}.$$

Der zweite Wert (36) von x ist aber nach (32) auch:

$$(37) \qquad x = \frac{b^2 - c^2}{2}.$$

Die Punkte des hyperbolischen Paraboloids (29), *durch die zwei zueinander rechtwinklige Erzeugende gehen, liegen auf der Ebene* (37) (§ 65, (44)) mit umgekehrtem Vorzeichen von x in der Ausgangsgleichung (§ 65, (8)).

13. Beziehung des Leitkegels zu den Asymptotenebenen. Mit der Abkürzung:

$$(38) \qquad d = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$$

kann die Gleichung (32) in der Form:

$$(39) \qquad \left(\frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2}\right) - d(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \qquad s = 0$$

geschrieben werden. Daher gehört der Leitkegel (32) einem *konfokalen System* (§ 118, (12)) *mit den Fokallinien* (§ 118, (17)):

$$(40) \qquad \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0, \qquad s = 0$$

an.

In Punktkoordinaten lautet die Gleichung des Kegels (32) nach § 71, (11); (12'):

$$\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{41}$$

während die *Fokallinien* (40) durch (§ 118, (3)):

$$b^2y^2 - c^2z^2 = 0, \qquad x = 0 \tag{42}$$

und die in derselben Hauptebene liegenden *Scheitellinien des Kegels* durch:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad x = 0 \tag{43}$$

dargestellt sind.

Die Scheitellinien (43) *des Leitkegels der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids sind daher die Scheitelerzeugenden des letzteren* (§ 65, (6)).

Die ihnen entsprechenden Tangentialebenen des Leitkegels sind die Asymptotenebenen des Paraboloids, die nach **11**, I in der Tat gleichseitig hyperbolische Schnitte im Sinne von (10) liefern.

Die Fokallinien f, f' in (42) *des Leitkegels der gleichseitig hyperbolischen Schnitte sind die Normalen der Asymptotenebenen oder die Normalen der Scheitelerzeugenden s', s in der Scheiteltangentialebene $x = 0$ des Paraboloids* (Fig. 183).

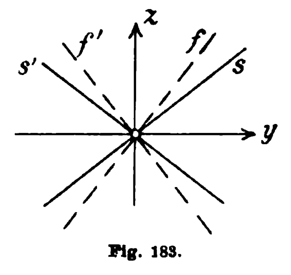


Fig. 183.

14. Nichtvorhandensein von drei rechtwinkligen Erzeugenden beim hyperbolischen Paraboloid. Die Brennlinien sind daher auch die Träger *aller* Ebenen u, v, w des Bündels am Scheitel O, die auf einer Asymptotenebene senkrecht stehen. Da aber der Kegel (39) mit seinen Brennlinien keine Tangentialebene gemein hat, kann die Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes niemals auf einer Asymptotenebene senkrecht stehen, also auch auf keiner Erzeugenden, die einer solchen stets parallel ist.

Auf dem hyperbolischen Paraboloid gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden (§ 65, **17**).

15. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid. Ist jedoch in (38) $d = 0$, also $b^2 = c^2$, so zerfällt der Kegel (39) in die beiden Ebenenbüschel der Fokalstrahlen (40), die dann zugleich aufeinander senkrecht werden:

$$v^2 - w^2 = 0 \tag{44}$$

und mit den Scheitelerzeugenden:

(45) $$y^2 - z^2 = 0, \quad x = 0$$

zusammenfallen.

Das hyperbolische Paraboloid, welches alsdann die Gleichung:

(46) $$\frac{y^2 - z^2}{b^2} + 2x = 0$$

erhält, ist in diesem Falle *gleichseitig*.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid wird daher von jeder durch eine der beiden Scheitelerzeugenden gehenden Ebene in einem rechtwinkligen Geradenpaar, von jeder parallelen Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.

Seien A und A′ die beiden Asymptotenebenen, a und a' ihre Schnittlinien mit der Ebene $x = 0$, also die Scheitelerzeugenden des Paraboloids, und g die mit a, g' die mit a' gleichnamigen Erzeugenden. Dann ist irgendeine Erzeugende g parallel zur Ebene A und daher senkrecht zu deren Normale a'. Man kann daher durch a' eine Ebene Γ′ legen, die zu g senkrecht ist. Da Γ′ durch a' geht, schneidet sie das Paraboloid in zwei rechtwinkligen Erzeugenden a' und h, die wie Γ′ selbst beide zu g senkrecht sind.

Zu jeder Erzeugenden g gibt es daher eine gleichnamige senkrechte Erzeugende h, so daß g und h zusammen mit der ungleichnamigen Scheitelerzeugenden a′ ein System von drei senkrechten Strahlen bilden (§ 65, **17**).

§ 117. Die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung.

1. Allgemeiner Begriff eines Kreisschnittes. Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene § 110, (9); (10) kann nach § 110, (11) stets durch eine Gleichung von der Form:

(1) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

dargestellt werden, die sich auf ein in der Ebene liegendes rechtrechtwinkliges Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ bezieht und in der λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\mathsf{H}(\lambda) = 0$ in § 109, (11) bedeuten.

Sind diese beiden Wurzeln einander gleich:

(2) $$\lambda_1 = \lambda_2,$$

so ist die Kurve (1) *ein Kreisschnitt, ihre Ebene eine Kreisschnittebene der Fläche.*[150])

Der gemeinsame Wert λ von λ_1 und λ_2, mit dem die Gleichung (1) die Form:

$$(3) \qquad \lambda(\xi^2 + \eta^2) + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

annimmt, entspricht alsdann nach § 109, (25) den Gleichungen:

$$(4) \qquad 2\lambda = -\frac{A'^{u}_{44}}{e^2}, \quad \lambda^2 = -\frac{A^{u}_{44}}{e^2}; \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

2. Arten der Kreisschnitte. Wenn neben (2):

$$(5) \qquad A^{u}_{44} \neq 0,$$

hat der Kreisschnitt (3) nach § 111, (11) einen *endlichen Mittelpunkt*:

$$(6) \qquad x_0 = \frac{A^{u}_{14}}{A^{u}_{44}}, \quad y_0 = \frac{A^{u}_{24}}{A^{u}_{44}}, \quad z_0 = \frac{A^{u}_{34}}{A^{u}_{44}},$$

und seine Gleichung kann nach § 112, (18) auf die Form gebracht werden:

$$(7) \qquad \lambda(\xi^2 + \eta^2) + \frac{A^{u}}{A^{u}_{44}} = 0.$$

Das Quadrat des Radius des Kreises ist daher mit Rücksicht auf (4):

$$(8) \qquad \varrho^2 = -\frac{A^{u}}{A^{u}_{44}\lambda} = \frac{2A^{u}e^2}{A^{u}_{44}A'^{u}_{44}}.$$

Da nun nach (4) $A^{u}_{44} < 0$ und $A'^{u}_{44} \neq 0$ sein muß (§ 114, (11)), so folgt (für eine reelle Ebene u, v, w, s):

Ein unter der Bedingung (2) *entstehender Kreisschnitt hat unter der Bedingung* (5) *den endlichen Mittelpunkt* (6) *und das Radiusquadrat* (8). *Er ist für:*

$$(9) \qquad \left|\begin{array}{l} A^{u}A'^{u}_{44} > 0 : \textit{ein imaginärer Kreis}; \\ A^{u}A'^{u}_{44} < 0 : \textit{ein reeller Kreis}; \\ \quad A^{u} = 0 : \textit{ein Nullkreis}. \end{array}\right.$$

Wenn in (3):

$$(10) \qquad \lambda = 0\,(A^{u}_{44} = 0, \quad A'^{u}_{44} = 0 \text{ nach } (4)),$$

so besteht der Kreisschnitt (3) *aus einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden oder ist eine unendlich ferne Doppelgerade* (§ 114, (3)) und kann in der Form:

$$(11) \qquad \eta\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \tau^2 = 0$$

dargestellt werden mit homogenen Koordinaten ξ, η, τ.

Jeder Kreisschnitt (3) geht durch die beiden imaginären Kreispunkte der schneidenden Ebene (§ 100, 2).

3. Die überzähligen Bedingungen der Kreisschnitte. Die Bedingung (2) ist nach § 109, 6, IV immer dann und nur dann erfüllt,

wenn zwischen den Koeffizienten a_{kl} der Fläche, den Koeffizienten u, v, w der Ebene und der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ die sechs Gleichungen bestehen:

$$(12)\begin{cases} \mathsf{H}_{11}(\lambda) = \alpha^u_{11} + \lambda(v^2 + w^2) = -(a_{33} - \lambda)v^2 - (a_{22} - \lambda)w^2 + 2a_{23}vw = 0, \\ \mathsf{H}_{22}(\lambda) = \alpha^u_{22} + \lambda(w^2 + u^2) = -(a_{11} - \lambda)w^2 - (a_{33} - \lambda)u^2 + 2a_{31}wu = 0, \\ \mathsf{H}_{33}(\lambda) = \alpha^u_{33} + \lambda(u^2 + v^2) = -(a_{22} - \lambda)u^2 - (a_{11} - \lambda)v^2 + 2a_{12}uv = 0, \\ \mathsf{H}_{23}(\lambda) = \alpha^u_{23} - \lambda vw = (a_{11} - \lambda)vw + a_{23}u^2 - a_{12}wu - a_{31}uv = 0, \\ \mathsf{H}_{31}(\lambda) = \alpha^u_{31} - \lambda wu = (a_{22} - \lambda)wu + a_{31}v^2 - a_{23}uv - a_{12}vw = 0, \\ \mathsf{H}_{12}(\lambda) = \alpha^u_{12} - \lambda uv = (a_{33} - \lambda)uv + a_{12}w^2 - a_{31}vw - a_{23}wu = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von λ ergeben sich hieraus die Bedingungen für die Koeffizienten u, v, w einer Ebene, die einen Kreisschnitt der Fläche a_{kl} liefert.

4. Systeme paralleler Kreisschnittebenen. Da die Bedingungen (12), sowie (5) und (10), nur die Koordinaten $u:v:w$ der *Stellung* der schneidenden Ebene § 114, (2), nicht s enthalten, so folgt:

Wenn die Fläche von einer Ebene in einem Kreise (7) *geschnitten wird, so wird sie auch von allen parallelen Ebenen in einem solchen geschnitten.*

Mittelpunkt (6) und Radiusquadrat (8) sind dagegen von s abhängig (§ 107, (5)).

Wenn die Fläche von einer Ebene in einem Kreise (11) *geschnitten wird, so wird sie auch von allen parallelen Ebenen in einem solchen geschnitten.*

Die Kreisschnittebenen der Fläche treten also in Büscheln paralleler Ebenen auf.

5. Abhängigkeit der überzähligen Bedingungen voneinander. Für die Determinante $\mathsf{H}(\lambda)$ in § 109, (1) ist unbedingt (I Anm. 1, III, (17)):

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathsf{H}_{11}(\lambda)u + \mathsf{H}_{12}(\lambda)v + \mathsf{H}_{13}(\lambda)w = 0, \\ \mathsf{H}_{21}(\lambda)u + \mathsf{H}_{22}(\lambda)v + \mathsf{H}_{23}(\lambda)w = 0, \\ \mathsf{H}_{31}(\lambda)u + \mathsf{H}_{32}(\lambda)v + \mathsf{H}_{33}(\lambda)w = 0. \end{cases}$$

Wenn daher keine der drei Größen u, v, w verschwindet, folgen aus den drei letzten Gleichungen (12) sofort die drei ersten. Setzt man aber die drei ersten Gleichungen (12) voraus, so daß aus (13) wird:

$$\begin{aligned} w\mathsf{H}_{31}(\lambda) + v\mathsf{H}_{12}(\lambda) &= 0, \\ w\mathsf{H}_{23}(\lambda) \qquad\qquad + u\mathsf{H}_{12}(\lambda) &= 0, \\ v\mathsf{H}_{23}(\lambda) + u\mathsf{H}_{31}(\lambda) \qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

so folgen, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & u \\ v & u & 0 \end{vmatrix} = 2uvw$$

nicht verschwindet, die drei letzten Gleichungen (12).

Die drei ersten Gleichungen (12) aber, wie auch die drei letzten, sind bei allgemeinen Koëffizienten a_{kl}, u, v, w voneinander unabhängig, da jede einen Koëffizienten a_{kl} enthält, der in den beiden andern nicht vorkommt.

Die überzähligen Bedingungen (12) *zählen im allgemeinen für drei, nach Elimination von λ für zwei unabhängige Bedingungen.*

Da sich indessen nicht allgemein angeben läßt, welche drei gerade die unabhängigen sind, so ist es vorteilhafter, alle sechs beizubehalten.

6. Anwendung der überzähligen Bedingungen auf das dreiachsige Ellipsoid. Für das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2, \tag{14}$$

lauten die Bedingungen (12):

$$(15) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right) v^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right) w^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) w^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right) u^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right) u^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) v^2 = 0, \end{cases} \qquad (16) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) vw = 0, \\ \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right) wu = 0, \\ \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right) uv = 0. \end{cases}$$

Nach (16) muß, da $a^2 \neq b^2 \neq c^2$, wenigstens eine der Größen u, v, w verschwinden; nach (15) und (16) können aber auch nicht zwei von ihnen verschwinden.

Ist zunächst $u = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, so folgt aus (16): $\lambda = \frac{1}{a^2}$ und damit aus (15):

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) v^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) w^2 = 0.$$

Den beiden hierdurch bestimmten Stellungen $u : v : w$ entsprechen die durch O $(s = 0)$ gehenden Ebenen (§ 71, **11**):

$$\lambda = \frac{1}{a^2}: \quad (a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{17}$$

und alle zu diesen parallelen Ebenen. Ebenso erhält man mit $v = 0$ und mit $w = 0$:

$$(17)\qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b^2}: & (b^2 - c^2)\,\frac{z^2}{c^2} + (b^2 - a^2)\,\frac{x^2}{a^2} = 0, \\ \lambda = \frac{1}{c^2}: & (c^2 - a^2)\,\frac{x^2}{a^2} + (c^2 - b^2)\,\frac{y^2}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Das dreiachsige Ellipsoid (14) *besitzt daher sechs Systeme* (§ 100, 2) *von Kreisschnittebenen, je zwei Systeme parallel jeder Hauptachse. Aber nur das der mittleren Achse parallele System ist reell* (§ 58, (21)).

7. Mittelpunkt und Radius der Kreisschnitte des Ellipsoids. Die den reellen Kreisschnittebenen u, v, w, s entsprechenden Werte von u, v, w sind nach (17):

$$(18)\qquad u = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad v = 0, \quad w = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}.$$

Mit diesen werden die geränderten Determinanten § 115, 2:

$$(19)\qquad \begin{cases} A^u_{14} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a b^2 c^2}\,s, \quad A^u_{24} = 0, \quad A^u_{34} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{a^2 b^2 c}\,s, \\ A^u_{44} = -\frac{a^2 - c^2}{a^2 b^2 c^2}, \quad A^u = \frac{a^2 - c^2 - s^2}{a^2 b^2 c^2}, \\ A'^u_{44} = -2\,\frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}, \end{cases}$$

während:

$$(20)\qquad e^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2 c^2}.$$

Danach ergibt sich für Mittelpunkt (6) *und Radiusquadrat* (8) *des Kreisschnittes u, v, w, s in* (18):

$$(21)\qquad x = -\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - c^2}\,s, \quad y = 0, \quad z = -\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}\,s;$$

$$(22)\qquad \varrho^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2 - s^2)}{a^2 - c^2}.$$

Mit $s = 0$ wird der Radius der *mittleren Halbachse* b gleich. Mit $s = \sqrt{a^2 - c^2}$ wird $\varrho = 0$ und folgen aus (21) die *Kreispunkte* (§ 58, (22)):

$$(23)\qquad x = -a\,\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = -c\,\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Das Vorzeichen jeder der drei Wurzeln $\sqrt{b^2 - c^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$ ist dabei beliebig, aber überall dasselbe.

Die Werte (21) und (22) stimmen mit § 58, (19) und (16) überein, wenn dort (§ 58, (18); (3)):

$$\frac{1}{\alpha} = ku, \quad \frac{1}{\gamma} = kw, \quad -2\xi_0 = ks; \quad k = \frac{b\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}$$

gesetzt wird.

8. Der Kreisschnittkoeffizient als Hauptachsenkoeffizient. Der Koeffizient λ in der Gleichung (3), der *„Kreisschnittkoeffizient"*, hängt nach (4) von den Koeffizienten a_{kl} der Fläche und den Koeffizienten u, v, w der schneidenden Ebene ab. Die letztere Abhängigkeit ist jedoch nur eine scheinbare.

Für die Determinante $\mathsf{H}(\lambda)$ in § 109, (1) gelten nämlich unbedingt die Gleichungen (I Anm. 1, III, (17)):

$$(24)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\mathsf{H}_{11}(\lambda)+a_{12}\mathsf{H}_{12}(\lambda)+a_{13}\mathsf{H}_{13}(\lambda)+u\,\mathsf{H}_{14}(\lambda)=\mathsf{H}(\lambda), \\ a_{21}\mathsf{H}_{11}(\lambda)+(a_{22}-\lambda)\mathsf{H}_{12}(\lambda)+a_{23}\mathsf{H}_{13}(\lambda)+v\,\mathsf{H}_{14}(\lambda)=0, \\ a_{31}\mathsf{H}_{11}(\lambda)+a_{32}\mathsf{H}_{12}(\lambda)+(a_{33}-\lambda)\mathsf{H}_{13}(\lambda)+w\,\mathsf{H}_{14}(\lambda)=0. \end{cases}$$

Bestehen nun die sechs Gleichungen (12), mit denen nach § 109, 6, III auch $\mathsf{H}(\lambda)=0$ ist, so folgt aus (24), da u, v, w nicht alle drei verschwinden:

$$(25)\qquad \mathsf{H}_{14}(\lambda)=0.$$

In gleicher Weise aber ergibt sich:

$$(25)\qquad \mathsf{H}_{24}(\lambda)=0,\quad \mathsf{H}_{34}(\lambda)=0.$$

Nun ist für die Determinante $\mathsf{H}(\lambda)$ wieder unbedingt:

$$(26)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\mathsf{H}_{41}(\lambda)+a_{12}\mathsf{H}_{42}(\lambda)+a_{13}\mathsf{H}_{43}(\lambda)+u\,\mathsf{H}_{44}(\lambda)=0, \\ a_{21}\mathsf{H}_{41}(\lambda)+(a_{22}-\lambda)\mathsf{H}_{42}(\lambda)+a_{23}\mathsf{H}_{43}(\lambda)+v\,\mathsf{H}_{44}(\lambda)=0, \\ a_{31}\mathsf{H}_{41}(\lambda)+a_{32}\mathsf{H}_{42}(\lambda)+(a_{33}-\lambda)\mathsf{H}_{43}(\lambda)+w\,\mathsf{H}_{44}(\lambda)=0, \end{cases}$$

also bei Voraussetzung von (25) mit Hinblick auf § 109, (4):

$$(27)\qquad \mathsf{H}_{44}(\lambda)=\Delta(\lambda)=0.$$

Die sechs Gleichungen (12) *haben daher stets zur Folge* (§ 44, **10**), *daß auch:*

$$(28)\qquad \mathsf{H}_{14}(\lambda)=0,\quad \mathsf{H}_{24}(\lambda)=0,\quad \mathsf{H}_{34}(\lambda)=0,\quad \Delta(\lambda)=0.$$

Die letzte dieser Gleichungen gibt aber den Satz:

Sollen bei gegebenen Koeffizienten a_{kl} der Fläche zwischen den Stellungskoeffizienten u, v, w einer Ebene und einer Größe λ die sechs Gleichungen (12) *bestehen, so muß diese eine Wurzel der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda)=0$ sein, oder:*

Der Kreisschnittkoeffizient λ in (3), *der als Hauptachsenkoeffizient der Schnittkurve* (§ 108, (27)) *eingeführt wurde, ist stets ein Hauptachsenkoeffizient der Fläche selbst* (§ 88, (17)).

Die Gleichung (27) ist daher das Resultat der Elimination der beiden Verhältnisse $u:v:w$ aus den Gleichungen (12), die für drei unabhängige Gleichungen zwischen λ und $u:v:w$ zählen.

9. Beziehung der Kreisschnittebenen zu den Hauptachsenrichtungen der Fläche. Die kubische Gleichung (27) des Hauptachsenproblems der Fläche selbst hat nach § 89, 3 drei reelle Wurzeln $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Setzt man eine solche Wurzel λ in die Gleichungen (12) ein, so zählen sie nach 5 noch als zwei unabhängige Gleichungen für die zwei Verhältnisse $u:v:w$ und bestimmen die *Stellung der zu der Wurzel λ gehörigen Kreisschnittebenen.*

Andererseits ist für die *Richtungskosinus α, β, γ der zu der Wurzel λ gehörigen Hauptachsenrichtung der Fläche* nach § 90, (3):

$$(29)\qquad \alpha : \beta : \gamma = \Delta_{i1}(\lambda) : \Delta_{i2}(\lambda) : \Delta_{i3}(\lambda), \quad i = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Die Unterdeterminanten § 109, (3) und (4) von $\mathsf{H}(\lambda)$ stehen aber unbedingt in der Beziehung (§ 45, (5)):

$$(30)\qquad -\mathsf{H}_{i4}(\lambda) = u\Delta_{i1}(\lambda) + v\Delta_{i2}(\lambda) + w\Delta_{i3}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

Für das den Gleichungen (12) und daher (25) genügende Wertsystem $u:v:w$, λ ist daher mit Rücksicht auf (29):

$$(31)\qquad 0 = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

also:

Die einer Wurzel λ der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ entsprechenden Kreisschnittebenen sind zu der derselben Wurzel entsprechenden Hauptachse der Fläche parallel.

Daß die Gleichung (31) auch besteht, wenn wegen des Verschwindens aller $\Delta_{ik}(\lambda_k)$ die Bestimmung (29) versagt, wird sich zu (36) ergeben.

10. Anzahl der einer Wurzel λ entsprechenden Kreisschnittebenen. Um die einer Wurzel λ der kubischen Gleichung (27) entsprechenden Kreisschnitte zu bestimmen, bietet sich in den drei ersten Gleichungen (12) für jedes der drei Verhältnisse $v:w$, $w:u$, $u:v$ eine quadratische Gleichung dar. Durch Auflösung dieser erhält man:

$$(32)\quad \begin{cases} v:w = a_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-\Delta_{11}(\lambda)} : a_{33} - \lambda = a_{22} - \lambda : a_{23} - \varepsilon_1\sqrt{-\Delta_{11}(\lambda)}, \\ w:u = a_{31} + \varepsilon_2\sqrt{-\Delta_{22}(\lambda)} : a_{11} - \lambda = a_{33} - \lambda : a_{31} - \varepsilon_2\sqrt{-\Delta_{22}(\lambda)}, \\ u:v = a_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-\Delta_{33}(\lambda)} : a_{22} - \lambda = a_{11} - \lambda : a_{12} - \varepsilon_3\sqrt{-\Delta_{33}(\lambda)}, \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ je ± 1 bedeuten. Daneben ist nach (30) und (25):

$$(33)\qquad \begin{cases} u\Delta_{11}(\lambda) + v\Delta_{12}(\lambda) + w\Delta_{13}(\lambda) = 0, \\ u\Delta_{21}(\lambda) + v\Delta_{22}(\lambda) + w\Delta_{23}(\lambda) = 0, \\ u\Delta_{31}(\lambda) + v\Delta_{32}(\lambda) + w\Delta_{33}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Ist nun die benutzte Wurzel λ eine *einfache* Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, so können nach § 89, 5, I $\Delta_{11}(\lambda)$, $\Delta_{22}(\lambda)$, $\Delta_{33}(\lambda)$

nicht sämtlich verschwinden. Ist also etwa $\Delta_{11}(\lambda) \neq 0$, so gibt die erste Zeile (32) *zwei bestimmte, untereinander verschiedene* Werte des Verhältnisses $v:w$. Zugleich liefert die erste Gleichung (33) zu jedem der beiden Werte von $v:w$ einen bestimmten Wert von $u:w$ oder $u:v$.

I. *Einer einfachen Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ entsprechen also stets zwei verschiedene Stellungen $u:v:w$ von Kreisschnittebenen.*

Ist dagegen λ eine *zweifache* Wurzel, so verschwinden für diese nach § 89, **5**, II alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nach § 89, **6**, IV nicht alle Diagonalelemente $a_{11} - \lambda$, $a_{22} - \lambda$, $a_{33} - \lambda$ von $\Delta(\lambda)$. Ist also etwa $a_{11} - \lambda \neq 0$, so geben die auf:

$$(34)\qquad \begin{cases} v:w = a_{23} : a_{33} - \lambda = a_{22} - \lambda : a_{23}, \\ w:u = a_{31} : a_{11} - \lambda = a_{33} - \lambda : a_{31}, \\ u:v = a_{12} : a_{22} - \lambda = a_{11} - \lambda : a_{12} \end{cases}$$

reduzierten Gleichungen (32) in:

$$(35)\qquad u:v:w = a_{11} - \lambda : a_{12} : a_{31}$$

ein *einziges bestimmtes* Wertsystem von $u:v:w$.

II. *Einer zweifachen Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ entspricht also stets eine einzige Stellung von Kreisschnittebenen.*

Die der Doppelwurzel entsprechende unbestimmte Hauptachsenrichtung α, β, γ hat im Falle $a_{11} - \lambda \neq 0$ nach § 90, **4** nur der Bedingung:

$$(36)\qquad (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0$$

zu genügen, so daß nach (35) wieder die Bedingung (31) erfüllt ist.

III. Ist λ eine *dreifache* Wurzel, so werden nach § 89, **6**, V die Gleichungen (12) identisch in $u:v:w$ erfüllt.

Hiernach ergibt sich zunächst ohne Rücksicht auf die Realitätsfrage (§ 90, **3**; **5**; **6**):

IV. *Je nachdem die Fläche zweiter Ordnung drei verschiedene oder zwei gleiche oder drei gleiche Hauptachsenkoeffizienten, also drei, eine oder keine bestimmte Hauptachse hat, besitzt sie sechs oder drei* (s. unten **14**) *oder ∞^2 Systeme paralleler Kreisschnittebenen.*

11. Die reellen Kreisschnittebenen. Sind die drei Hauptachsenkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, verschieden und ihrer algebraischen Größe nach geordnet:

$$(37)\qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3,$$

so ist nach § 89, (20):

$$(38)\qquad \Delta_{ii}(\lambda_1) \geqq 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_2) \leqq 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_3) \geqq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

wo bei jeder Wurzel (§ 89, 5, I) wenigstens für ein i das Ungleichheitszeichen gilt. Hiernach sind die Werte (32) für $\lambda = \lambda_1$, λ_3 imaginär, für $\lambda = \lambda_2$ reell, und folgt mit Rücksicht auf **9**:

I. *Sind die drei Hauptachsenkoeffizienten der Fläche zweiter Ordnung verschieden, so hat die Fläche zwei reelle Systeme paralleler Kreisschnittebenen, die dem algebraisch mittleren Hauptachsenkoeffizienten entsprechen und der zu ihm gehörigen Hauptachse parallel sind.*

Sind zwei Wurzeln einander gleich, $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\lambda_2 = \lambda_3$, die dritte, λ_3 oder λ_1, verschieden, so ist nach § 89, (24) für die einfache Wurzel:

(39) $$\Delta_{ii}(\lambda_3) \geqq 0 \quad \text{oder} \quad \Delta_{ii}(\lambda_1) \geqq 0.$$

Für diese sind daher die Werte (32) imaginär. Für die zweifache Wurzel gelten die Werte (34), und folgt somit:

II. *Sind unter den drei Hauptachsenkoeffizienten zwei gleiche, so hat die Fläche ein diesen entsprechendes reelles System paralleler Kreisschnittebenen, das zu der einen bestimmten Hauptachsenrichtung* (§ 90, 5) *senkrecht ist.*

III. *Sind alle drei Hauptachsenkoeffizienten gleich, hat die Fläche alle Ebenen zu Kreisschnittebenen.*

12. Bestimmung der reellen Kreisschnittebenen bei gegebener Hauptachsengleichung. Ist die Fläche zweiter Ordnung von vornherein durch ihre Hauptachsengleichung § 90, (12) gegeben:

(40) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

und sind die Hauptachsenkoeffizienten *verschieden* und so geordnet, daß:

(41) $$a_{11} < a_{22} < a_{33},$$

so entsprechen die reellen Kreisschnittebenen nach **11**, I dem Hauptachsenkoeffizienten $\lambda = a_{22}$. Statt die Auflösungen (32) der drei ersten Gleichungen (12) zu benutzen, entnehmen wir diesen selbst mit $\lambda = a_{22}$:

(42) $$v = 0; \quad (a_{11} - a_{22})w^2 - (a_{22} - a_{33})u^2 = 0.$$

Die Ebenen, deren Stellungskoordinaten $u : v : w$ diesen Bedingungen genügen, sind dem Ebenenpaare:

(43) $$(a_{33} - a_{22})z^2 - (a_{22} - a_{11})x^2 = 0$$

parallel. Das reelle Ebenenpaar (43) selbst, dessen Achse die dem Hauptachsenkoeffizienten $\lambda = a_{22}$ entsprechende y-Achse ist, nennen wir die *Hauptkreisschnittebenen.*

Ist dagegen:

(44) $$a_{11} < a_{22} = a_{33} \quad \text{oder} \quad a_{11} = a_{22} < a_{33},$$

so bleibt nach **11,** II mit $\lambda = a_{22}$ nur die eine Hauptkreisschnittebene:

(45) $$x = 0 \quad \text{oder} \quad z = 0,$$

der alle andern parallel sind.

13. Die Hauptkreisschnittebenen aller Flächen zweiter Ordnung. Nach **12** erhalten wir nun sofort die Hauptkreisschnittebenen der durch ihre *kanonischen Gleichungen* dargestellten reellen Flächen zweiter Ordnung. In der folgenden Tabelle ist immer unter 1. die Gleichung der Fläche angegeben; unter 2. die jedesmalige Anordnung der Hauptachsenkoeffizienten nach der *algebraischen* Größe in der Weise (41) oder (44); die Hauptkreisschnittebenen selbst sind jedesmal unter 3. in der Form (43) oder (45) und unter 4. in vereinfachter Form angegeben. Bei den mit * bezeichneten Flächen sind die Kreisschnitte nach (11) *gerade Linien.*

Flächen mit drei verschiedenen Hauptachsenkoeffizienten.

I. *Ellipsoid* (§ 58, (21)):

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a^2 > b^2 > c^2;$ 2. $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2};$

3. $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 = 0;$ 4. $(a^2 - b^2)\frac{x^2}{a^2} - (b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0.$

II. *Einschaliges Hyperboloid* (oder *elliptischer Kegel*) (§ 59, (21)):

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (oder $= 0$), $a^2 > b^2;$ 2. $-\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2};$

3. $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0;$ 4. $(a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} - (a^2 + c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0.$

III. *Zweischaliges Hyperboloid* (oder *elliptischer Kegel*) (§ 60, (21)):

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (oder $= 0$), $b^2 < c^2;$ 2. $-\frac{1}{b^2} < -\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2};$

3. $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 - \left(-\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)y^2 = 0;$ 4. $(a^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} - (c^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} = 0.$

IV. *Elliptisches Paraboloid* (oder *elliptischer Zylinder*) (§ 61, (15); § 59, (26)):

1. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x$ (oder $= 1$), $b^2 > c^2;$ 2. $0 < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2};$

3. $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(\frac{1}{b^2} - 0\right)x^2 = 0;$ 4. $(b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} - x^2 = 0.$

V.* *Hyperbolisches Paraboloid* (oder *hyp. Zylinder* oder *Ebenenpaar*) (§ 62, (13)):

1. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x$ (oder $= 1$ oder $= 0$); 2. $-\frac{1}{c^2} < 0 < \frac{1}{b^2};$

3. $\left(\frac{1}{b^2} - 0\right)y^2 - \left(0 + \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0;$ 4. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Flächen mit zwei gleichen Hauptachsenkoeffizienten.

I. *Rotationsellipsoid:*

1. $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a^2>c^2;$ 2. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}<\frac{1}{c^2};$ 3. $z=0;$

oder:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,\ a^2>c^2;$ 2. $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c^2};$ 3. $x=0.$

II. *Rotationshyperboloid* (oder *-kegel):*

1. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (oder $=0$); 2. $-\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2};$ 3. $z=0;$

oder:

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ (oder $=0$); 2. $-\frac{1}{c^2}=-\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2};$ 3. $x=0.$

III. *Rotationsparaboloid* (oder *-zylinder):*

1. $\frac{y^2+z^2}{b^2}=2x$ (oder $=1$); 2. $0<\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2};$ 3. $x=0.$

IV.* *Parabolischer Zylinder* (od. *Parallelebenenpaar* od. *Doppelebene):*

1. $\frac{z^2}{c^2}=2x$ (oder $=1$ oder $=0$); 2. $0=0<\frac{1}{c^2};$ 3. $z=0.$

Flächen mit drei gleichen Hauptachsenkoeffizienten.

I. *Kugel:*

1. $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}=1;$ 2. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2};$ 3. jede endliche Ebene.

II. 1. *Endliche und unendlich ferne Ebene (unendlich ferne Doppelebene);* 2. $0=0=0;$ 3. jede endliche Ebene.

Damit sind die reellen Hauptkreisschnittebenen aller Flächen zweiter Ordnung aus einem einheitlichen Gesetz hergeleitet.

14. Allgemeine Bedeutung der Bedingungen der Kreisschnitte. Nach § 48, (16) stellt die Gleichung:

$$(46)\quad (a_{11}-\lambda)x^2+(a_{22}-\lambda)y^2+(a_{33}-\lambda)z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0$$

in laufenden Punktkoordinaten x, y, z der unendlich fernen Ebene (I § 49, 2) das Kegelschnittbüschel dar, welches die vier Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 (§ 100, **1**) der unendlich fernen Kurve der Fläche zweiter Ordnung (§ 66, (23)) und des Kugelkreises § 84, (10′) als Grundpunkte hat. Die Determinante § 109, (1) ist die mit den Koordinaten u, v, w einer Geraden der unendlich fernen Ebene (I § 49, 4) geränderte Determinante des Kegelschnittes λ in (46). Soll nun die Gerade u, v, w Bestandteil eines solchen Kegelschnittes, also Verbindungslinie zweier Grundpunkte sein, so müssen nach § 44, (19); **9** die sechs Bedingungen (12) bestehen.

Die Bedingungen (12) *drücken also gerade aus, daß die Ebene mit der Stellung u, v, w durch zwei von den vier Schnittpunkten der unendlich fernen Kurve der Fläche und des imaginären Kugelkreises geht.*

Im allgemeinen gibt es *sechs* Gerade u, v, w, die den Bedingungen (12) genügen, nämlich die Seiten des vollständigen Vierecks $S_1 S_2 S_3 S_4$. Fallen aber (§ 100, **1**) dessen Ecken paarweise, in $S_1 = S_3$ und $S_2 = S_4$, zusammen, so gibt es *drei* solche Gerade (**10**, IV), nämlich die Berührungssehne $S_1 S_2$ und die beiden gemeinsamen Tangenten des Kugelkreises und der unendlich fernen Kurve der Fläche in den Berührungspunkten S_1 und S_2. Die Berührungssehne gibt eigentliche Kreisschnitte (§ 100, **2**, II), während die Tangenten nur imaginäre „Kreisparabeln" liefern, insofern die beiden Kreispunkte derjenigen (imaginären) Ebenen, die durch eine Tangente des Kugelkreises gehen, zusammenfallen (§ 2, **9**).

V. Abschnitt.

Konfokale Flächen und Fokaleigenschaften.

I. Kapitel.

Die konfokalen Systeme.

§ 118. Das System konfokaler Kegel.

1. Begriff des konfokalen Systems. Der elliptische Kegel § 54, (1):

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0, \quad e^2 > d^2, \quad e^2 > a^2,$$

ist durch seine Scheitellinien (in der Hauptebene der größten Öffnung § 54, 5):

$$(2') \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 0, \quad y = 0,$$

und seine Brennlinien f, f':

$$(3') \qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 0, \quad y = 0,$$

vollständig bestimmt. Denn die Verhältnisse $a^2 : a^2 - d^2 : a^2 - e^2$, von denen die Gleichung (1′) abhängt, sind durch die Verhältnisse $e^2 : a^2$ und $d^2 : e^2$ der Gleichungen (2′) und (3′) gegeben.

Konzentrische und koaxiale Kegel mit gleichen Brennlinien und verschiedenen Scheitellinien heißen konfokal (und konfokal liegend).[98])

Ein *System konfokaler Kegel* wird daher durch die Gleichung (1′) bei *veränderlichem* a^2 und *festem* e^2 und d^2 dargestellt.

2. Gleichung des konfokalen Systems. Der Symmetrie wegen setzen wir mit $\alpha > \beta > \gamma$, $\alpha > \tau$:

$$(4') \qquad a^2 = \alpha - \tau, \quad d^2 = \alpha - \beta, \quad e^2 = \alpha - \gamma.$$

Die *Gleichung des konfokalen Systems*[99]) lautet dann (§ 32, (1)):

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0, \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

wo bei festen α, β, γ der veränderliche *Parameter* τ zwischen den Grenzen:

$$\alpha > \tau > \gamma$$

sich bewegt (bei Hinzunahme imaginärer Kegel auch außerhalb dieser Grenzen).

Die *Scheitellinien* des einzelnen Kegels in der zx-Ebene sind:

(2) $$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0, \quad y = 0,$$

die gemeinsamen *Brennlinien* aller Kegel:

(3) $$\frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{z^2}{\gamma - \beta} = 0, \quad y = 0.$$

3. Unterscheidung der beiden Arten von Kegeln. Alle Kegel (1) haben die zx-Ebene als *Hauptebene der größten Öffnung.* Dagegen kommt ihnen nach § 54, **4**; **5** die aufrechte z-Achse oder die wagrechte x-Achse (§ 54, Fig. 125; 126) als *innere Achse* zu, je nachdem $\gamma < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < \alpha$. Wir unterscheiden sie kurz als *aufrechte* und *liegende Kegel.* Um sie auch in der Bezeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$. Danach zerfällt das System (1) in die beiden Reihen:

(4) $$\frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 0, \quad \gamma < \mu < \beta;$$

(5) $$\frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 0, \quad \beta < \nu < \alpha,$$

von denen die erste alle aufrechten, die zweite alle liegenden Kegel enthält.

4. Grenzformen und Veränderung der konfokalen Kegel. Für $\mu = \gamma$ fallen oberer und unterer Mantel des *aufrechten* Kegels (4) in der xy-Ebene zusammen (Fig. 184 stellt einen Oktanten des Raumes dar). Mit wachsendem μ heben sie sich aus dieser heraus und ziehen sich nach oben und unten immer mehr gegen die die z-Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der zx-Ebene zusammen, in die sie für $\mu = \beta$ hineinfallen. Die die x-Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der zx-Ebene stellt die Grenzform $\nu = \beta$ des *liegenden* Kegels (5) dar, dessen beide Mäntel sich mit wachsendem ν aus diesem Gebiet herausheben und für $\nu = \alpha$ von beiden Seiten her in die yz-Ebene hineinfallen.

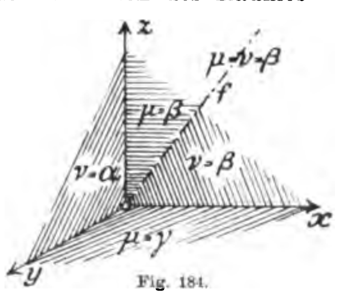


Fig. 184.

5. Die durch einen Strahl des Bündels bestimmten Kegel. In der Gleichung (1) können x, y, z statt als *Punktkoordinaten im Raume* auch als *homogene Strahlenkoordinaten im Bündel* des Punktes O (I § 49, **6**) gelten. Um in dieser Auffassung die Kegel des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Strahl

$x:y:z$ des Bündels gehen, hat man die in τ *quadratische* Gleichung (1) oder:

(6) $$f(\tau) = (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 = 0$$

nach τ aufzulösen.

Da nun:

$$f(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)z^2 > 0, \quad f(\beta) = -(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)y^2 < 0,$$
$$f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)x^2 > 0,$$

so hat diese Gleichung stets zwei *reelle Wurzeln*, von denen die eine zwischen γ und β liegt und daher mit μ, die andere zwischen β und α liegt und daher mit ν zu bezeichnen ist.

I. *Durch jeden Strahl des Bündels geht stets ein aufrechter und ein liegender Kegel des konfokalen Systems.*

Nur für einen jeden der beiden Fokalstrahlen fallen die beiden Wurzeln μ und ν in dem Werte β zusammen.

6. Die durch zwei ungleichnamige Kegel bestimmten Strahlen. *Zwischen den Koordinaten $x:y:z$ eines Strahles und den Parametern μ, ν der durch ihn gehenden Kegel besteht nach* (6) *die in τ identische Gleichung:*

(7) $$(\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(\tau - \mu)(\tau - \nu).$$

Hieraus folgt mit $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ und der Abkürzung:

(8) $$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda:$$

(9) $$x^2 = \lambda \frac{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad y^2 = \lambda \frac{(\beta - \mu)(\beta - \nu)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}, \quad z^2 = \lambda \frac{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Wenn daher μ und ν den Ungleichungen bei (4) und (5) entsprechend gegeben werden, so ergeben sich aus (9) vier nur in den Vorzeichen verschiedene *reelle* Wertsysteme $x:y:z$.

II. *Irgend zwei ungleichnamige Kegel des konfokalen Systems schneiden sich stets in vier symmetrisch gegen die Koordinatenebenen gelegenen Strahlen des Bündels.*

Da nach 5, I durch jeden Strahl stets zwei und nur zwei ungleichnamige Kegel gehen, so folgt:

III. *Zwei gleichnamige Kegel des konfokalen Systems haben keinen (reellen) Strahl gemein.*

7. Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Kegel. Ein gemeinsamer Strahl x, y, z der beiden ungleichnamigen Kegel μ und ν

genügt den beiden Gleichungen (4) und (5), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(10)\quad (\mu-\nu)\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}+\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}\right\}=0.$$

Diese bedeutet aber nach § 71, (3), daß die Tangentialebenen der beiden Kegel längs des Strahles zueinander senkrecht sind (I § 42, (5)), oder kurz:

IV. *Irgend zwei ungleichnamige Kegel des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer vier Schnittlinien senkrecht.*

8. Gleichung des konfokalen Systems in Ebenenkoordinaten. Die Gleichung des Kegels (1) lautet nach § 71, (8) in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w im Bündel (I § 49, 5):

$$(11)\quad (\alpha-\tau)u^2+(\beta-\tau)v^2+(\gamma-\tau)w^2=0$$

(für laufende Ebenenkoordinaten u, v, w, s im Raume kommt noch die zweite Gleichung $s=0$ hinzu, § 71, (9)), oder:

$$(12)\quad (\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2)-\tau(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Diese Gleichung setzt sich aus den Gleichungen zweier Kegel zweiter Klasse:

$$(13)\quad \alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2=0,\quad u^2+v^2+w^2=0,$$

von denen der zweite der § 84, (10) betrachtete imaginäre Kugelkegel ist, zusammen und ist in dem Parameter τ linear. Hieraus folgt sofort:

V. *Eine gegebene Ebene u, v, w des Bündels wird immer von einem und nur von einem Kegel des konfokalen Systems berührt.*

Ausgenommen sind nur die vier imaginären Ebenen:

$$(14)\quad u^2 : v^2 : w^2=\beta-\gamma : \gamma-\alpha : \alpha-\beta,$$

welche gemeinsame Tangentialebenen der beiden Flächen (13) und daher aller Flächen (11) sind.

Alle Kegel des konfokalen Systems haben vier gemeinsame imaginäre Tangentialebenen.

9. Begriff der Kegelschar. Sind überhaupt die Gleichungen zweier Kegel zweiter Klasse im Bündel (§ 80, (1')):

$$(15)\quad F(u, v, w)=0,\quad G(u, v, w)=0,$$

so nennt man die Gesamtheit aller Kegel:

$$(16)\quad F(u, v, w)-\tau\, G(u, v, w)=0$$

eine *Kegelschar.* Alle Kegel der Schar berühren die vier gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Grundkegel (15). Sonst wird jede Ebene des Bündels nur von einem Kegel der Schar berührt (§ 32, 8).

VI. *Das System konfokaler Kegel ist eine Kegelschar.*[100])

10. Die Strahlenpaare der Schar. Die Schar (11) enthält, den Werten $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ entsprechend, drei *Strahlenpaare* (§ 80, **9**):

(17) $$(\beta-\alpha)v^2 + (\gamma-\alpha)w^2 = 0, \quad (\gamma-\beta)w^2 + (\alpha-\beta)u^2 = 0,$$
$$(\alpha-\gamma)u^2 + (\beta-\gamma)v^2 = 0,$$

von denen jedes in einer der drei Hauptebenen liegt, aber nur das *mittlere reell* ist.

Es ist das *Paar der Brennlinien* (3), aber nicht wie dort in Punktbezüglich Strahlenkoordinaten, sondern *in Ebenenkoordinaten* im Bündel oder, unter Hinzufügung der Gleichung $s = 0$, im Raume dargestellt.

11. Ort der Strahlen mit gleichen Parameterwerten τ. Die Diskriminante der in τ quadratischen Gleichung (6):

$$D = \{(\beta+\gamma)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 + (\alpha+\beta)z^2\}^2$$
$$- 4\{x^2+y^2+z^2\}\{\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2\}$$

zerfällt nach der Identität:

$$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

in die Faktoren:

(18) $$D = (\sqrt{\beta-\gamma}\,x + i\sqrt{\alpha-\gamma}\,y + \sqrt{\alpha-\beta}\,z)$$
$$\times(\sqrt{\beta-\gamma}\,x + i\sqrt{\alpha-\gamma}\,y - \sqrt{\alpha-\beta}\,z)$$
$$\times(\sqrt{\beta-\gamma}\,x - i\sqrt{\alpha-\gamma}\,y + \sqrt{\alpha-\beta}\,z)$$
$$\times(\sqrt{\beta-\gamma}\,x - i\sqrt{\alpha-\gamma}\,y - \sqrt{\alpha-\beta}\,z).$$

Der Ort der Strahlen, deren Parameterwerte τ gleich werden, die Schnittkurvenenveloppe der Kegelschar (§ 32, **10**), *wird daher von den vier Ebenen* (14) *gebildet, die sich in den drei Strahlenpaaren* (17) *schneiden.* Das eine dieser Strahlenpaare, das der Brennstrahlen, bildet den einzigen reellen Bestandteil der Enveloppe.

12. Ort der Polstrahlen einer Ebene. Der Polstrahl der Ebene:

(19) $$ux + vy + wz = 0$$

des Bündels (I § 49, (7)) in bezug auf den Kegel zweiter Klasse (11) ist nach § 84, (8):

(20) $$\varrho x = (\alpha-\tau)u, \quad \varrho y = (\beta-\tau)v, \quad \varrho z = (\gamma-\tau)w.$$

Durch Elimination von τ (und ϱ) folgt hieraus als Ort der Polstrahlen der Ebene (19) in bezug auf alle Kegel τ:

(21) $$\begin{vmatrix} x & \alpha u & u \\ y & \beta v & v \\ z & \gamma w & w \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)vwx + (\gamma-\alpha)wuy + (\alpha-\beta)uvz = 0,$$

also eine Ebene, die auf der Ebene (19) senkrecht steht (I § 42, (5)).

Ist τ_0 derjenige Kegel der Schar (11), der nach 8, V die Ebene (19) berührt, so ist der Berührungsstrahl der Polstrahl der Ebene (19) in bezug auf τ_0 (§ 80, 4) und daher dem Ort (21) angehörig. Es folgt also (§ 32, **12**):

I. *Der Ort der Polstrahlen einer Ebene* $\Pi = u, v, w$ *in bezug auf alle Kegel der Schar* (11) *ist eine Ebene* Π', *die Normalebene der Ebene* Π *längs des Berührungsstrahles des von ihr berührten Kegels der Schar.*[101])

13. Senkrechte harmonische Polarebenen. Zwei *zueinander senkrechte* harmonische Polarebenen u, v, w und u', v', w' des Kegels (11) haben nach § 84, (8) den beiden Gleichungen:

$$(\alpha - \tau) u u' + (\beta - \tau) v v' + (\gamma - \tau) w w' = 0, \tag{22}$$

$$u u' + v v' + w w' = 0 \tag{23}$$

zu genügen. Diese liefern bei gegebenem u, v, w, unabhängig von τ, für u', v', w' die Koeffizienten von (21).

II. *Eine Ebene* Π *des Bündels hat in bezug auf alle Kegel der Schar* (11) *dieselbe senkrechte harmonische Polarebene* Π' (§ 32, **13**, II). Es ist die unter **12**, I bestimmte Ebene Π'.[82])

§ 119. Das Hauptebenenproblem der Tangentialebenenpaare beim Kegel.

1. Begriff der elliptischen Koordinaten. Die Parameter μ und ν der beiden nach § 118, **5** durch einen Strahl x, y, z des Bündels gehenden Kegel des konfokalen Systems § 118, (1) heißen die *elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel.*[103])

Sie sind bei gegebenen homogenen Koordinaten x, y, z des Strahles durch die quadratische Gleichung § 118, (6) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 118, (9) den Strahl x, y, z vierdeutig.

2. Elliptische Koordinaten besonderer Strahlen. Aus § 118, (6) oder § 118, **4** ergibt sich insbesondere:

Für alle Strahlen der Ebene $x = 0$ ist: $\gamma < \mu < \beta$, $\nu = \alpha$. Die Strahlen der Ebene $y = 0$ zerfallen in solche, die durch die Fokallinien f, f' von der z-Achse, und solche, die durch f, f' von der x-Achse getrennt werden; für jene ist: $\gamma < \mu < \beta$, $\nu = \beta$, für diese $\mu = \beta$, $\beta < \nu < \alpha$. Für die *Fokalstrahlen* f, f' selbst ist: $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ (Fig. 184). Für alle Strahlen der Ebene $z = 0$ ist: $\mu = \gamma$, $\beta < \nu < \alpha$.

Die x-Achse hat die Koordinaten: $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$, die y-Achse: $\mu = \gamma$, $\nu = \alpha$, die z-Achse: $\mu = \beta$, $\nu = \alpha$.

Die Fokalstrahlen sind die einzigen mit zwei *gleichen* elliptischen Koordinaten $\mu = \nu = \beta$.

3. Identische Gleichungen zwischen homogenen und elliptischen Koordinaten. Bezeichnen wir mit T die linke Seite der Gleichung § 118, (1), so ist nach der Definition der elliptischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 118, (7):

$$(1) \qquad T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = \frac{\lambda(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)},$$

wo λ die Bedeutung § 118, (8) hat.

Die Gleichung (1) *besteht zwischen den homogenen* $x:y:z$ *und den elliptischen Koordinaten* μ, ν *des laufenden Strahles im Bündel identisch in* τ.

Mit $\tau = \mu, \nu$ folgt:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha - \mu} + \dfrac{y^2}{\beta - \mu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \mu} = 0, \\ \dfrac{x^2}{\alpha - \nu} + \dfrac{y^2}{\beta - \nu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \nu} = 0, \end{cases}$$

wie § 118, (4), (5).

Weiter ergibt sich durch Subtraktion jeder der beiden Gleichungen (2) von (1):

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} \\ \qquad = \dfrac{T}{\tau - \mu} = \dfrac{\lambda(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} \\ \qquad = \dfrac{T}{\tau - \nu} = \dfrac{\lambda(\tau - \mu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Glied dieser Identitäten bezüglich mit $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} = \dfrac{\lambda(\mu - \nu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \dfrac{1}{m^2}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \nu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} = \dfrac{\lambda(\nu - \mu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \dfrac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo $1 : m^2$ und $1 : n^2$ als Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke dienen.

Durch Subtraktion folgt ferner aus den beiden Identitäten (3):

$$(5) \qquad \frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} = \frac{T}{(\tau-\mu)(\tau-\nu)},$$

und aus (3) und (4):

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)^2}+\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\mu)^2}=\dfrac{T}{(\tau-\mu)^2}-\dfrac{1}{m^2(\tau-\mu)},\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\nu)^2}+\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\nu)^2}=\dfrac{T}{(\tau-\nu)^2}-\dfrac{1}{n^2(\tau-\nu)}. \end{cases}$$

4. Einführung eines neuen Koordinatensystems im Bündel. Die Richtungskosinus irgendeines *bestimmten* Strahles $\xi = x, y, z$ in bezug auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem $Oxyz (= OXYZ)$ im Bündel sind:

$$(7)\qquad \alpha_1 = lx,\quad \beta_1 = ly,\quad \gamma_1 = lz,$$

wo:

$$(8)\qquad \frac{1}{l^2} = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda.$$

Die Tangentialebenen der beiden durch ξ gehenden Kegel μ und ν (§ 118, (4), (5)) längs ξ sind nach § 71, (3) in laufenden Strahlenkoordinaten X, Y, Z:

$$(9)\qquad \frac{xX}{\alpha-\mu}+\frac{yY}{\beta-\mu}+\frac{zZ}{\gamma-\mu}=0,\quad \frac{xX}{\alpha-\nu}+\frac{yY}{\beta-\nu}+\frac{zZ}{\gamma-\nu}=0.$$

Die im Anfangspunkt O auf ihnen errichteten Normalen η und ζ haben daher die Richtungskosinus:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{mx}{\alpha-\mu},\quad \beta_2=\frac{my}{\beta-\mu},\quad \gamma_2=\frac{mz}{\gamma-\mu};\\ \alpha_3 &= \frac{nx}{\alpha-\nu},\quad \beta_3=\frac{ny}{\beta-\nu},\quad \gamma_3=\frac{nz}{\gamma-\nu}, \end{aligned}$$

wo $1 : m^2$ und $1 : n^2$ die Bedeutung (4) haben.

Die drei Strahlen ξ, η, ζ bilden ein neues rechtwinkliges Achsensystem im Bündel, dessen $\xi\zeta$- und $\xi\eta$-Ebene die Tangentialebenen der beiden durch den gegebenen Strahl $\xi = x, y, z$ gehenden Kegel μ und ν des konfokalen Systems sind.

Zwischen den alten X, Y, Z und neuen Koordinaten ξ, η, ζ des laufenden Strahles bestehen die *Transformationsformeln* (I § 37, (2)):

$$(11)\qquad \begin{cases} X = x\left(l\xi+\dfrac{m\eta}{\alpha-\mu}+\dfrac{n\zeta}{\alpha-\nu}\right),\\ Y = y\left(l\xi+\dfrac{m\eta}{\beta-\mu}+\dfrac{n\zeta}{\beta-\nu}\right),\\ Z = z\left(l\xi+\dfrac{m\eta}{\gamma-\mu}+\dfrac{n\zeta}{\gamma-\nu}\right). \end{cases}$$

5. Tangentialebenenpaar durch einen Bündelstrahl an einen Kegel des konfokalen Systems. Das durch den Strahl x, y, z an den Kegel:

$$(12)\qquad R = \frac{X^2}{\alpha-\tau}+\frac{Y^2}{\beta-\tau}+\frac{Z^2}{\gamma-\tau}=0$$

gelegte Tangentialebenenpaar hat nach § 71, (14) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung:

(13) $$TR - S^2 = 0,$$

wo die Abkürzungen T und R in (1) und (12) bereits eingeführt sind, S aber die Bedeutung hat:

(14) $$S = \frac{xX}{\alpha - \tau} + \frac{yY}{\beta - \tau} + \frac{zZ}{\gamma - \tau}.$$

6. Darstellung von R und S in den neuen Koordinaten. Durch die Substitution (11) wird:

$$R = \left(\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau}\right) l^2\xi^2$$
$$+ \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)^2}\right) m^2\eta^2$$
$$+ \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)^2} + \cdots\right) n^2\zeta^2 + \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \cdots\right) 2mn\eta\zeta$$
$$+ \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \cdots\right) 2nl\zeta\xi + \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \cdots\right) 2lm\xi\eta$$

oder nach (1), (6), (5) und (3):

$$R = T\left(l^2\xi^2 + \frac{m^2\eta^2}{(\tau - \mu)^2} + \frac{n^2\zeta^2}{(\tau - \nu)^2}\right) - \left(\frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu}\right)$$
$$+ 2T\left(\frac{mn\eta\zeta}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)} + \frac{nl\zeta\xi}{\tau - \nu} + \frac{lm\xi\eta}{\tau - \mu}\right),$$

(15) $$R = T\left(l\xi + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\zeta}{\tau - \nu}\right)^2 - \left(\frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu}\right).$$

Ebenso wird:

$$S = \left(\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \cdots\right) l\xi + \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \cdots\right) m\eta + \left(\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \cdots\right) n\zeta$$

oder nach (1) und (3):

(16) $$S = T\left(l\xi + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\zeta}{\tau - \nu}\right).$$

7. Die Hauptebenengleichung des durch einen Bündelstrahl an einen Kegel gelegten Tangentialebenenpaares. Mit den Werten (15) und (16) nimmt die Gleichung (13) die Form an:

(17) $$\frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0.$$

Dies ist die Gleichung des durch den Strahl μ, ν an den Kegel τ des konfokalen Systems gelegten Tangentialebenenpaares in bezug auf das neue Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$.

Die Form der Gleichung zeigt, daß die Ebenen $\eta = 0$ und $\zeta = 0$, die Tangentialebenen der beiden durch den Strahl μ, ν gehenden

Kegel längs des Strahles, zugleich die Hauptebenen (Winkelhalbierungsebenen) des durch den Strahl an einen beliebigen Kegel τ des konfokalen Systems gelegten Tangentialebenenpaares sind, oder (§ 33, 8):

I. *Die Winkel zwischen den beiden durch einen Strahl μ, ν des Bündels an den Kegel τ gelegten Tangentialebenen werden von den Tangentialebenen der Kegel μ, ν längs des Strahles halbiert.*[102])

8. Das Fokalebenenpaar eines Strahles. Das Ebenenpaar (17) ist *reell*, wenn:

$$(18) \qquad \mu < \tau < \nu .$$

Es ist reell für *alle* Strahlen μ, ν, wenn $\tau = \beta$ ist, wo nach § 118, 10 der Kegel τ in das Fokalstrahlenpaar zerfällt, also das Tangentialebenenpaar:

$$(19) \qquad \frac{\eta^2}{\beta - \mu} - \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0$$

aus den Verbindungsebenen des Strahles μ, ν mit den beiden Fokalstrahlen, *den Fokalebenen des Strahles* μ, ν, besteht (§ 33, (20)).

II. *Die Winkel zwischen den beiden Fokalebenen eines Strahles μ, ν werden von den Tangentialebenen der Kegel μ, ν längs des Strahles halbiert.*

Dieses Resultat kann, unabhängig vom konfokalen System, als eine Eigenschaft des *einzelnen elliptischen Kegels* so ausgesprochen werden:[64])

III. *Die Tangentialebene und die Normalebene längs einer Erzeugenden eines elliptischen Kegels halbieren die Winkel der „Fokalebenen" der Erzeugenden, ihrer Verbindungsebenen mit den Brennstrahlen des Kegels* (§ 13, 4).

9. Eigenschaft der Brennstrahlen. Da somit an einer Erzeugenden des Kegels die beiden Fokalebenen und Tangential- und Normalebene vier harmonische Ebenen bilden (I § 5, 8, II), so ergibt sich im Durchschnitt mit der zx-Ebene (I § 52, (23)):

Tangentialebene und Normalebene des elliptischen Kegels schneiden die Hauptebene der größten Öffnung in zwei zu den Brennstrahlen harmonischen Geraden (§ 20, 6).[81])

Tangential- und Normalebene eines elliptischen Kegels sind nach § 118, 13, II; 12 I zugleich *zwei senkrechte harmonische Polarebenen* in bezug auf alle konfokalen Kegel.

10. Ort der Achsen rechtwinkliger Tangentialebenenpaare. Die beiden Ebenen des Paares (17) sind rechtwinklig, also die Gleichung (17) wird:

(20) $$\eta^2 - \zeta^2 = 0,$$

wenn:

(21) $$\tau - \mu + \tau - \nu = 0.$$

Betrachten wir nun τ, also den Kegel:

(22) $$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0$$

als gegeben, so stellt die Gleichung (21) den Ort aller Strahlen μ, ν dar, durch die zwei rechtwinklige Tangentialebenen an den Kegel (22) gehen.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $-\tau$ in der in τ identischen Gleichung § 118, (7) ergibt sich aber zwischen den gemeinen und elliptischen Koordinaten eines Strahles die Beziehung:

(23) $$(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\mu + \nu)$$

oder mit Einführung des festen Wertes von τ aus (22):

$$(\beta - \tau + \gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau + \alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau + \beta - \tau)z^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(\mu - \tau + \nu - \tau).$$

Der Ort (21) hat daher in gemeinen Koordinaten die Gleichung:

(24) $$(\beta - \tau + \gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau + \alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau + \beta - \tau)z^2 = 0.$$

Der Ort der Strahlen des Bündels, von denen an den Kegel (22) *zwei rechtwinklige Tangentialebenen gehen, ist der Kegel* (24).[66])

11. Die Brennstrahlen als Achsen von Involutionen rechtwinkliger harmonischer Polarebenen. Die Gleichung (17) erhält die Form:

(25) $$\eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

wenn $\mu = \nu$, also nach 2 für die Brennstrahlen.

I. *Die Involution harmonischer Polarebenen an einer Fokallinie und nur an einer solchen ist eine Involution rechtwinkliger Ebenen.*

Da nun eine Involution rechtwinkliger Ebenen von einer zur Achse senkrechten Ebene in einer Involution rechtwinkliger Strahlen geschnitten wird, so folgt (I § 52, (23)) mit Rücksicht auf § 77, **1**; § 17, **1**; § 20, 4, I:

II. *Jeder zu einer Fokallinie senkrechte ebene Schnitt eines elliptischen Kegels hat auf dieser Fokallinie einen Brennpunkt.*[185])

§ 120. Das System konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide.

1. Begriff des konfokalen Systems. Die eigentliche Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung § 55, (1):

(1′) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1, \quad e^2 > d^2,$$

ist durch ihre Scheitelpunkte $x = \pm a$ und Hauptbrennpunkte $x = \pm d$ und $x = \pm e$ (§ 55, (5); (4)) vollständig bestimmt.

Konzentrische koachsiale Mittelpunktsflächen mit denselben Hauptbrennpunkten und verschiedenen Scheitelpunkten heißen nach § 55, **10** *konfokal (und konfokal gelegen).*

Durch die Gleichung (1′) wird daher bei festen d^2 und e^2 und veränderlichem a^2 *ein System konfokaler Mittelpunktsflächen* dargestellt.

2. Gleichung des konfokalen Systems. Der Symmetrie wegen setzen wir mit $\alpha > \beta > \gamma$:

(2′) $\quad a^2 = \alpha - \tau,\ d^2 = \alpha - \beta,\ e^2 = \alpha - \gamma;\quad f^2 = e^2 - d^2 = \beta - \gamma.$

Die Gleichung des konfokalen Systems[99]) lautet dann:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1, \quad \alpha > \beta > \gamma, \tag{1}$$

wo bei festen α, β, γ der *Parameter* τ sich von $-\infty$ bis ∞ bewegt:

$$-\infty < \tau < \infty. \tag{2}$$

Die gemeinsamen *inneren, äußeren* und *zweiten* (§ 55, (4′)) *Hauptbrennpunkte* sind:

$$B_0, B_0' = \pm\sqrt{\alpha - \beta},\ 0,\ 0;\quad C_0, C_0' = \pm\sqrt{\alpha - \gamma},\ 0,\ 0; \tag{3}$$
$$C_1, C_1' = 0,\ \pm\sqrt{\beta - \gamma},\ 0,$$

und die gemeinsamen Fokalkegelschnitte, *Fokalellipse* und *Fokalhyperbel* (§ 55, (9)):

(4) $\quad \dfrac{x^2}{\alpha - \gamma} + \dfrac{y^2}{\beta - \gamma} = 1,\ z = 0;\qquad$ (5) $\quad \dfrac{x^2}{\alpha - \beta} - \dfrac{z^2}{\beta - \gamma} = 1,\ y = 0.$

Die *Scheitelpunkte* der einzelnen Fläche sind:

$$A_0, A_0' = \pm\sqrt{\alpha - \tau},\ 0,\ 0. \tag{6}$$

3. Unterscheidung der drei Arten von Flächen. Je nachdem (§ 55, (3)): $-\infty < \tau < \gamma$ oder $\gamma < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < \alpha$ oder $\alpha < \tau < +\infty$ ist die Fläche (1) ein Ellipsoid oder ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid.

Um die drei reellen Arten auch in der Bezeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich $\tau = \lambda$, $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$. Danach *zerfällt das System* (1) *in die drei Reihen*:

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1, \quad -\infty < \lambda < \gamma, \tag{7}$$

$$\frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1, \quad \gamma < \mu < \beta, \tag{8}$$

$$\frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 1, \quad \beta < \nu < \alpha, \tag{9}$$

von denen die erste alle Ellipsoide, die zweite alle ein- und die dritte alle zweischaligen Hyperboloide des Systems enthält.

4. Veränderlichkeit und Grenzformen des konfokalen Systems. Während λ von $-\infty$ bis γ sich bewegt (über λ_1, λ_2 λ_3 in Fig. 185), zieht sich das Ellipsoid (7) aus einer unendlich großen Kugel gegen die Fokalellipse c, die es nach § 55, 7 beständig einschließt, zusammen, bis es für $\lambda = \gamma$ in den innerhalb der Fokalellipse gelegenen Teil der Ebene $z = 0$ hineinklappt. Der außerhalb der Fokalellipse gelegene Teil stellt das einschalige Hyperboloid $\mu = \gamma$ dar. Dieses zieht sich bei zunehmendem μ (über μ_1, μ_2, μ_3 in Fig. 185) gegen die Fokalhyperbel b, die es nach § 55, 7 immer einschließt, zusammen, bis es für $\mu = \beta$ in den auf der konvexen Seite der Fokalhyperbel gelegenen Teil der Ebene $y = 0$ hineinfällt. Der auf der konkaven Seite der Fokalhyperbel gelegene stellt die beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloides $\nu = \beta$ dar. Diese nähern sich bei wachsendem ν (über ν_1, ν_2, ν_3 in Fig. 185) von beiden Seiten her der yz-Ebene, in der sie für $\nu = \alpha$ zusammenfallen.

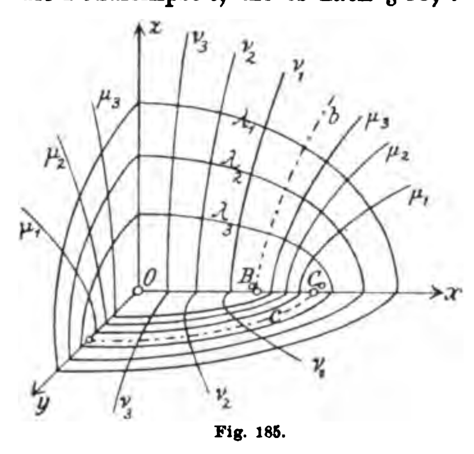


Fig. 185.

5. Die durch einen Punkt des Raumes bestimmten Flächen. Um diejenigen Flächen des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt x, y, z des Raumes gehen, hat man die in τ *kubische* Gleichung (1) oder:

$$(10)\qquad f(\tau) = (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau) = 0$$

nach τ aufzulösen.

Da nun:

$$(11)\qquad f(-\infty) = -\infty,\ f(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)z^2 > 0,\quad f(\beta) = -(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)y^2 < 0,\ f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)x^2 > 0,$$

so hat die Gleichung (10) stets *drei reelle Wurzeln*, die zwischen den Grenzen $-\infty$ und γ, γ und β, β und α liegen und daher nach den Festsetzungen zu (7)—(9) bezüglich mit λ, μ und ν zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt des Raumes gehen stets drei Flächen des konfokalen Systems, je ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid.*

6. Die durch drei ungleichnamige Flächen bestimmten Punkte. *Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes und den Parametern λ, μ, ν der durch ihn gehenden Flächen besteht nach 5 die in τ identische Gleichung:*

$$(12)\quad \begin{aligned}(\beta-\tau)(\gamma-\tau)x^2+(\gamma-\tau)(\alpha-\tau)y^2+(\alpha-\tau)(\beta-\tau)z^2\\ -(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)=(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu).\end{aligned}$$

Aus ihr folgt mit $\tau=\alpha, \beta, \gamma$:

$$(13)\quad \begin{gathered} x^2=\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad y^2=\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},\\ z^2=\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.\end{gathered}$$

Wenn daher λ, μ, ν den Ungleichungen bei (7)—(9) entsprechend gegeben werden, so ergeben sich aus (13) stets acht, nur in den Vorzeichen verschiedene, *reelle* Wertsysteme x, y, z (§ 32, 6).

II. *Irgend drei ungleichnamige Flächen des konfokalen Systems schneiden sich stets in acht symmetrisch gegen die Koordinatenebenen gelegenen Punkten.*

Da nach I durch einen Punkt stets drei und nur drei ungleichnamige Flächen gehen, so folgt:

III. *Zwei gleichnamige Flächen des konfokalen Systems haben keinen (reellen) Punkt gemein.*

7. Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Flächen. Ein gemeinsamer Punkt x, y, z der beiden Flächen μ und ν genügt den beiden Gleichungen (8) und (9), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(14)\quad (\mu-\nu)\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}+\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}\right\}=0.$$

Diese bedeutet aber nach § 70, (3), daß die Tangentialebenen der beiden Flächen im Punkte x, y, z zueinander senkrecht sind oder kurz, da Gleiches mit ν, λ und λ, μ für μ, ν gilt (§ 32, 7):

IV. *Zwei ungleichnamige Flächen des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer Durchschnittslinie überall senkrecht.*

V. *Drei ungleichnamige Flächen schneiden sich in jedem ihrer acht Schnittpunkte* (13) *untereinander senkrecht;* oder auch:

Die Schnittkurve zweier ungleichnamiger Flächen wird von einer dritten ungleichnamigen Fläche senkrecht geschnitten.

Die Schnittkurve der ungleichnamigen Flächen $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$ ist nach 4 die Fokalellipse, der Flächen $\mu = \beta$ und $\nu = \beta$ die Fokalhyperbel. Hier folgt also:

VI. *Die Fokalellipse wird von allen zweischaligen Hyperboloiden, die Fokalhyperbel von allen Ellipsoiden senkrecht geschnitten.*

Die Schnittpunkte sind nach § 58, 7; § 60, 7 die Kreispunkte der Flächen.

8. Das konfokale System als Flächenschar. Sind:

(15) $$F(u, v, w) = 0, \quad G(u, v, w) = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen zweiter Klasse (§ 75, (1) mit $s = 1$), so heißt die Gesamtheit aller durch die Gleichung:

(16) $$F(u, v, w) - \tau\, G(u, v, w) = 0$$

mit dem Parameter τ dargestellten Flächen eine *Schar* von Flächen zweiter Klasse. Die Flächen (15) werden als *Grundflächen* der Schar bezeichnet.

Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (10) in Ebenenkoordinaten:

(17) $$(\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 = 1$$

oder:

(18) $$(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - 1) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

I. *Das System der konfokalen Flächen ist daher eine Flächenschar, von deren beiden Grundflächen*[100]*:*

(19) $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - 1 = 0,$ (20) $u^2 + v^2 + w^2 = 0$

die eine der imaginäre Kugelkreis (§ 84, (9')) *ist.*

Jede *gemeinsame* Tangentialebene der beiden Grundflächen (19) und (20) ist nach (18) auch Tangentialebene *aller* Flächen der Schar. Solche Ebenen sind sämtlich imaginär.

Für jede andere Ebene gibt die Gleichung (18) einen bestimmten Wert von τ, also:

II. *Jede Ebene, die nicht gemeinsame Tangentialebene der beiden Grundflächen ist, wird von einer bestimmten Fläche der Schar berührt.*

9. Kegelschnitte der Schar. Unter den Flächen der Schar (17) befinden sich außer dem Kugelkreis (20), der dem Werte $\tau = \infty$ entspricht, drei weitere *Kegelschnitte*, entsprechend den Werten $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ (§ 53, (35)):

(21) $$(\beta - \alpha)v^2 + (\gamma - \alpha)w^2 = 1, \quad (\alpha - \beta)u^2 + (\gamma - \beta)w^2 = 1,$$
$$(\alpha - \gamma)u^2 + (\beta - \gamma)v^2 = 1.$$

Die beiden letzteren von diesen sind die *Fokalhyperbel* und *Fokalellipse,* während die erste als *imaginäre Fokalellipse* bezeichnet sei.[144])

Die drei Fokalkegelschnitte sind hiernach die neben dem imaginären Kugelkreis in der Schar enthaltenen uneigentlichen Flächen zweiter Klasse.

Bei der Darstellung des Systems in *Ebenenkoordinaten* treten also die *Fokalkurven selbst* als Grenzformen auf (§ 79, **5**), während bei der Darstellung in *Punktkoordinaten* die von ihnen aus- und eingeschlossenen Stücke der *Hauptebenen*, bezüglich diese selbst als Grenzformen sich ergeben (§ 32, **11**).

10. Die Schnittkurvenenveloppe der Schar. Diejenige *Raumkurve vierter Ordnung,* in der eine Fläche τ der einfach unendlichen Flächenschar:

$$(22) \qquad f(x, y, z, \tau) = \frac{x^2}{\alpha-\tau} + \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} - 1 = 0$$

von ihrer benachbarten $\tau + d\tau$ im Momente des Zusammenfalls geschnitten wird, heißt die *„ausgezeichnete Kurve"* der Fläche τ. Sie ist durch die Gleichung (22) in Verbindung mit der Gleichung:

$$(23) \qquad \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{x^2}{(\alpha-\tau)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\tau)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)^2} = 0$$

dargestellt.

Der *Ort aller ausgezeichneten Kurven* ist die *„Schnittkurvenenveloppe"* der Schar. In jedem Punkte x, y, z der ausgezeichneten Kurve der Fläche τ hat die Enveloppe jedesmal dieselbe Tangentialebene wie die Fläche τ selbst, so daß die Koordinaten dieser Tangentialebene werden:

$$(24) \qquad u = -\frac{x}{\alpha-\tau}, \quad v = -\frac{y}{\beta-\tau}, \quad w = -\frac{z}{\gamma-\tau}.$$

Man erhält daher die Bedingungen für die Tangentialebenen der Enveloppe längs der ausgezeichneten Kurve der Fläche τ, indem man aus den fünf Gleichungen (22), (23), (24) die Koordinaten x, y, z des Berührungspunktes eliminiert. Nun folgt aus (24):

$$(25) \qquad x = -(\alpha-\tau)u, \quad y = -(\beta-\tau)v, \quad z = -(\gamma-\tau)w$$

und damit aus (22) und (23):

$$(26) \qquad (\alpha-\tau)u^2 + (\beta-\tau)v^2 + (\gamma-\tau)w^2 - 1 = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Da diese beiden Bedingungen aber, *von τ unabhängig werdend,* auf (19), (20) zurückkommen, so folgt (§ 32, **10**):

Die Schnittkurvenenveloppe der Flächenschar (17) *wird von den gemeinsamen Tangentialebenen aller Flächen der Schar umhüllt.*

Als Umhüllungsgebilde von einfach unendlich vielen Ebenen ist sie aber eine *abwickelbare Linienfläche.*[100])

Sie ist in *Ebenenkoordinaten* unmittelbar durch die beiden Gleichungen (19), (20) dargestellt. Um ihre Gleichung in ***Punktkoordinaten*** zu erhalten, ordnet man die in x, y, z, t homogen gemachte Gleichung (10) nach Potenzen von τ:

$$f(\tau) = P\tau^3 + Q\tau^2 + R\tau + S = 0, \tag{27}$$

wo:

$$\begin{aligned} P &= t^2, \\ Q &= x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha + \beta + \gamma)t^2, \\ R &= -\{(\beta+\gamma)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 + (\alpha+\beta)z^2\} + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)t^2, \\ S &= \beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2 - \alpha\beta\gamma t^2, \end{aligned}$$

und bildet durch Elimination von τ aus (27) und:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 3P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0 \tag{28}$$

die Gleichung (§ 32, (22)):

$$(9PS - QR)^2 - 4(3PR - Q^2)(3QS - R^2) = 0. \tag{29}$$

Sie ist, da P, Q, R, S vom zweiten Grade in x, y, z, t sind, ihrerseits vom achten Grade.

Die Schnittkurvenenveloppe (29) *der Schar* (17) *ist eine Fläche achter Ordnung.*

Sie ist, da die linke Seite von (29) die Diskriminante der kubischen Gleichung (10) darstellt, zugleich der Ort der Punkte, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung gleich sind. Die einzigen reellen Punkte dieser Art sind diejenigen der Fokalellipse $\lambda = \mu = \gamma$ und der Fokalhyperbel $\mu = \nu = \beta$ (§ 32, **10**).[144]

11. Der Ort der Pole einer Ebene. Der Pol einer gegebenen Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \tag{30}$$

in bezug auf die Fläche (17) hat nach § 82, (5′) die Koordinaten:

$$x = -(\alpha - \tau)u, \quad y = -(\beta - \tau)v, \quad z = -(\gamma - \tau)w. \tag{31}$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem τ eine gerade Linie dar, deren Richtungskosinus sich wie $u:v:w$ verhalten (I § 43, (1)), die also auf (30) senkrecht steht. Auf ihr liegen die Pole der Ebene (30) in bezug auf die verschiedenen Flächen τ, also auch der Berührungspunkt der Ebene (30) mit der sie berührenden Fläche τ_0 der Schar (8, II).

I. *Der Ort der Pole einer Ebene in bezug auf die Flächen der Schar* (17) *ist eine gerade Linie, die Normale der Ebene in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Fläche der Schar* (§ 32, **12**).[101]

Ausgenommen sind die drei Hauptebenen und die unendlich ferne Ebene, die in bezug auf *alle* Flächen der Schar *denselben* Pol haben.

12. Der Achsenkomplex des konfokalen Systems. Der Achsenkomplex der Fläche (1) wird nach § 85, (8) mit Rücksicht auf § 85, (7) unabhängig von τ:

$$\alpha p_{23} p_{14} + \beta p_{31} p_{24} + \gamma p_{12} p_{34} = 0. \tag{32}$$

II. *Alle Flächen des konfokalen Systems haben denselben Achsenkomplex.*

Da die rechten Seiten der Gleichungen § 85, (5); (15); (16) nur die Differenzen der Halbachsenquadrate α, β, γ enthalten, so werden sie für die Gleichung (1) unabhängig von τ. Es folgt also:

III. *Eine Ebene hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems denselben konjugierten Normalstrahl* (§ 32, **13**, II).

Er ist nach dem Begriff der Achse in § 85, **1** gerade der Ort der Pole der Ebene aus **11**, I. Umgekehrt:

IV. *Eine dem Komplex* (32) *angehörige Achse hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems dieselbe konjugierte Normalebene, also auch denselben Fußpunkt* (§ 85, 5).

13. Die Normalen des konfokalen Systems. Dagegen ist der konjugierte Pol, den eine Fläche τ des Systems der Achse p_{kl} zuordnet, nach § 85, (13):

$$x = -\frac{(\alpha - \tau) p_{23} p_{14}}{(\beta - \gamma) p_{24} p_{34}}, \quad y = -\frac{(\beta - \tau) p_{31} p_{24}}{(\gamma - \alpha) p_{34} p_{14}}, \quad z = -\frac{(\gamma - \tau) p_{12} p_{34}}{(\alpha - \beta) p_{14} p_{24}}, \tag{33}$$

also von τ abhängig. Die Bedingung, daß er in der konjugierten Normalebene § 85, (15) der Achse liegt (I § 45, (10)), wird in τ linear. Es gibt also zu jeder Achse eine Fläche τ, welche der Achse einen in ihrer konjugierten Normalebene liegenden konjugierten Pol zuordnet, so daß die Achse nach § 85, 7 Normale der Fläche in diesem Pole wird. Jede Achse ist also Normale einer Fläche τ und jede Normale nach § 85, 7 eine Achse.

V. *Der Achsenkomplex einer jeden Fläche des konfokalen Systems besteht aus den Normalen sämtlicher Flächen des Systems.*

14. Ebenes Polarsystem in den Hauptebenen. Eine Ebene u, v, w schneidet die Koordinatenebene $x = 0$ in der Geraden v, w (I § 45, **1**); der zur Ebene konjugierte Normalstrahl § 85, (5) schneidet die Ebene $x = 0$ in dem Punkte (I § 48, (9')):

$$y = \frac{p_{12}}{p_{14}} = (\alpha - \beta) v, \quad z = -\frac{p_{31}}{p_{14}} = (\alpha - \gamma) w. \tag{34}$$

Dieses ist aber nach § 20, (5') der Pol der Geraden v, w in bezug auf den ersten Kegelschnitt (21):

Eine Ebene und ihr konjugierter Normalstrahl, insbesondere Tangentialebene und zugehörige Normale bei irgendeiner Fläche (1), *schneiden eine jede der drei Hauptebenen in Polare und Pol des in ihr liegenden Fokalkegelschnittes* (21) (§ 20, **6**).[81]

15. Senkrechte harmonische Polarebenen. Zwei zueinander senkrechte harmonische Polarebenen in bezug auf die Fläche (1) sind nach § 82, (7') durch die Bedingungen verbunden:

$$(35) \qquad (\alpha-\tau)uu' + (\beta-\tau)vv' + (\gamma-\tau)ww' = 1,$$

$$(36) \qquad uu' + vv' + ww' = 0,$$

von denen die erste infolge der zweiten *von τ unabhängig* wird. Bei gegebener Ebene $\Pi = u, v, w$ bilden die den Gleichungen (35), (36) entsprechenden Ebenen $\Pi' = u', v', w'$ ein Büschel, dessen Achse (I § 48, (1'); (3')) die Koordinaten § 85, (5) hat.

Eine beliebige Ebene Π hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems dieselben senkrechten harmonischen Polarebenen, die ein Büschel an dem konjugierten Normalstrahl der Ebene Π bilden (§ 32, **13**, II).

16. Die Linienkoordinatengleichung des konfokalen Systems. Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (23) in Linienkoordinaten:

$$(37) \quad \varphi(\tau) = (\alpha-\tau)p_{23}^2 + (\beta-\tau)p_{31}^2 + (\gamma-\tau)p_{12}^2 - (\beta-\tau)(\gamma-\tau)p_{14}^2 \\ - (\gamma-\tau)(\alpha-\tau)p_{24}^2 - (\alpha-\tau)(\beta-\tau)p_{34}^2 = 0.$$

Da die Gleichung in τ quadratisch ist, so folgt:

Eine gegebene Gerade wird von zwei Flächen des konfokalen Systems berührt (über ihre Realität s. § 122, **3**).

Ihre Art hängt davon ab, ob die Gerade p die xy-Ebene innerhalb oder außerhalb der Fokalellipse und die zx-Ebene innerhalb (auf der konkaven Seite) oder außerhalb der Fokalhyperbel schneidet. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= -(\alpha-\beta)p_{31}^2 - (\alpha-\gamma)p_{12}^2 - (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)p_{14}^2 < 0,\\
\varphi(\beta) &= \quad (\alpha-\beta)p_{23}^2 - (\beta-\gamma)p_{12}^2 + (\beta-\gamma)(\alpha-\beta)p_{24}^2 \lesseqgtr 0,\\
\varphi(\gamma) &= \quad (\alpha-\gamma)p_{23}^2 + (\beta-\gamma)p_{31}^2 - (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)p_{34}^2 \lesseqgtr 0,\\
\varphi(-\infty) &= -\infty < 0.
\end{aligned}$$

Nun sind aber (I § 48, (9')) $p_{31}, -p_{23}, p_{34}$ die homogenen Koordinaten x, y, t des Schnittpunktes P' der Geraden p mit der xy-Ebene,

$-p_{12}, p_{23}, p_{24}$ diejenigen x, z, t des Schnittpunktes P'' mit der zx-Ebene. Mit Rücksicht auf (4) und (5) liegt daher P' innerhalb oder außerhalb der Fokalellipse, je nachdem $\varphi(\gamma) < 0$ oder > 0, und P'' innerhalb (auf der konkaven Seite) oder außerhalb der Fokalhyperbel, je nachdem $\varphi(\beta) < 0$ oder > 0.

Liegt daher P' außerhalb der Fokalellipse und P'' außerhalb der Fokalhyperbel, so daß $\varphi(\gamma) > 0$ und $\varphi(\beta) > 0$, so hat die quadratische Gleichung (37) eine Wurzel $\tau = \lambda$ und eine Wurzel $\tau = \nu$; die Gerade wird von einem Ellipsoid und einem zweischaligen Hyperboloid berührt.

Liegt P' außerhalb und P'' innerhalb, so daß $\varphi(\gamma) > 0$, $\varphi(\beta) < 0$, so ergeben sich zwei Wurzeln $\tau = \lambda$ und $\tau = \mu$, liegt P' innerhalb und P'' außerhalb, zwei Wurzeln $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$.

Liegen dagegen P' und P'' beide innerhalb, so daß $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$, $\varphi(-\infty)$ alle < 0 sind, so müssen die beiden reellen Wurzeln zwischen γ und β liegen, also die Gerade von zwei einschaligen Hyperboloiden berührt werden, da zwei konfokale Ellipsoide oder zwei zweischalige Hyperboloide keine gemeinsame Tangente haben können.

§ 121. Das Hauptachsenproblem des Berührungskegels.

1. Begriff der elliptischen Koordinaten. Die Parameter λ, μ, ν der drei nach § 120, 5 durch einen Punkt x, y, z gehenden Flächen heißen die *elliptischen Koordinaten des Punktes.*[103])

Sie sind bei gegebenen Koordinaten x, y, z des Punktes durch die kubische Gleichung § 120, (10) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 120, (13) den Punkt x, y, z achtdeutig.

2. Elliptische Koordinaten besonderer Punkte. Für die Punkte einer *Hauptebene* hat im allgemeinen *eine* elliptische Koordinate einen der Grenzwerte γ, β, α: in der Ebene $z = 0$ ist innerhalb der Fokalellipse $\lambda = \gamma$, außerhalb $\mu = \gamma$; in der zx-Ebene auf der konvexen Seite der Fokalhyperbel $\mu = \beta$, auf der konkaven $\nu = \beta$; in der yz-Ebene überall $\nu = \alpha$ (Fig. 185).

Für die Punkte eines *Fokalkegelschnittes* und nur für diese sind zwei elliptische Koordinaten gleich, für die Ellipse $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, für die Hyperbel $\mu = \beta$, $\nu = \beta$.

Für die Punkte einer *Hauptachse* haben im allgemeinen zwei elliptische Koordinaten einen der Grenzwerte γ, β, α: auf der x-Achse innerhalb $B_0 B_0' : \lambda = \gamma$, $\mu = \beta$, zwischen B_0 und C_0, B_0' und $C_0' : \lambda = \gamma$, $\nu = \beta$, außerhalb $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$; auf der y-Achse innerhalb der Scheitel-

punkte $C_1 C_1'$ der kleinen Achse der Fokalellipse: $\lambda = \gamma$, $\nu = \alpha$, außerhalb $\mu = \gamma$, $\nu = \alpha$; auf der z-Achse $\mu = \beta$, $\nu = \alpha$.

Die elliptischen Koordinaten des *Mittelpunktes* und der *Hauptbrennpunkte* sind:

$$O: \lambda = \gamma,\ \mu = \beta,\ \nu = \alpha; \quad B_0, B_0': \lambda = \gamma,\ \mu = \beta,\ \nu = \beta;$$
$$C_0, C_0': \lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = \beta; \quad C_1, C_1': \lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = \alpha.$$

3. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und elliptischen Koordinaten. Bezeichnen wir mit T die linke Seite der Gleichung § 120, (1), so ist nach der Definition der elliptischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 120, (12):

$$(1) \qquad T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den gemeinen x, y, z und den elliptischen Koordinaten λ, μ, ν des laufenden Punktes identisch in τ.

Mit $\tau = \lambda, \mu, \nu$ folgt:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha - \lambda} + \dfrac{y^2}{\beta - \lambda} + \dfrac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{\alpha - \mu} + \dfrac{y^2}{\beta - \mu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \mu} - 1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{\alpha - \nu} + \dfrac{y^2}{\beta - \nu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \nu} - 1 = 0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren $\tau - \lambda$, $\tau - \mu$, $\tau - \nu$.

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)} = \dfrac{T}{\tau - \lambda} = \dfrac{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} = \dfrac{T}{\tau - \mu} = \dfrac{(\tau - \nu)(\tau - \lambda)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} = \dfrac{T}{\tau - \nu} = \dfrac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}; \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Gliede dieser Identitäten bezüglich mit $\tau = \lambda, \mu, \nu$:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} = \dfrac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} = \dfrac{1}{l^2}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} = \dfrac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \dfrac{1}{m^2}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \nu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} = \dfrac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \dfrac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo $1:l^2$, $1:m^2$, $1:n^2$ als Abkürzungen je für die beiden gleichen

Ausdrücke dienen; ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (3) mit $\tau = \nu$ oder der dritten mit $\tau = \mu$:

$$(5)\qquad \frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} = 0, \cdots, \cdots$$

Die Punkte deuten zwei weitere Formeln an, die durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν entstehen.

Durch Subtraktion je zweier Formeln (3) folgt:

$$(6)\qquad \frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} = \frac{T}{(\tau-\mu)(\tau-\nu)}, \cdots, \cdots$$

und aus der ersten dieser drei mit $\tau = \lambda$:

$$(7)\qquad \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} = 0.$$

Durch Subtraktion je entsprechender Gleichungen (3) und (4) ergibt sich:

$$(8)\qquad \frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)^2} = \frac{T}{(\tau-\lambda)^2} - \frac{1}{(\tau-\lambda)l^2}, \cdots, \cdots$$

(zyklische Vertauschung von λ, μ, ν und l, m, n). Endlich gibt die Subtraktion der Gleichung (5) von der zweiten und dritten (4) die beiden folgenden und ihre zyklischen Vertauschungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha-\mu)^2(\alpha-\nu)} + \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2(\beta-\nu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)^2(\gamma-\nu)} = \dfrac{1}{(\mu-\nu)m^2}, \cdots, \cdots \\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)^2} = \dfrac{1}{(\nu-\mu)n^2}, \cdots, \cdots \end{cases}$$

4. Das Achsensystem der drei Flächennormalen. *Die Tangentialebenen der drei durch einen bestimmten Punkt $P = x, y, z$ des Raumes gehenden Flächen λ, μ, ν* § 120, (7)—(9) sind nach § 70, (3) in laufenden Koordinaten X, Y, Z in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem $Oxyz = OXYZ$:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{xX}{\alpha-\lambda} + \dfrac{yY}{\beta-\lambda} + \dfrac{zZ}{\gamma-\lambda} - 1 = 0, \\ \dfrac{xX}{\alpha-\mu} + \dfrac{yY}{\beta-\mu} + \dfrac{zZ}{\gamma-\mu} - 1 = 0, \\ \dfrac{xX}{\alpha-\nu} + \dfrac{yY}{\beta-\nu} + \dfrac{zZ}{\gamma-\nu} - 1 = 0. \end{cases}$$

Die *Normalen ξ, η, ζ dieser drei Ebenen* im Punkte P haben die Richtungskosinus:

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{lx}{\alpha - \lambda}, & \beta_1 = \dfrac{ly}{\beta - \lambda}, & \gamma_1 = \dfrac{lz}{\gamma - \lambda}, \\ \alpha_2 = \dfrac{mx}{\alpha - \mu}, & \beta_2 = \dfrac{my}{\beta - \mu}, & \gamma_2 = \dfrac{mz}{\gamma - \mu}, \\ \alpha_3 = \dfrac{nx}{\alpha - \nu}, & \beta_3 = \dfrac{ny}{\beta - \nu}, & \gamma_3 = \dfrac{nz}{\gamma - \nu}, \end{cases}$$

wo l^2, m^2, n^2 die unter (4) eingeführten Werte haben und die positiven Wurzeln l, m, n die Längen der von O auf die Ebenen (10) gefällten Perpendikel bedeuten (I § 41, (13)).

Das neue Achsensystem $P\xi\eta\zeta$ ist nach § 120, 7 ebenso wie das alte $OXYZ$ *rechtwinklig*. Zwischen den alten X, Y, Z und neuen Koordinaten ξ, η, ζ des *laufenden* Punktes bestehen die Relationen (I § 37, (13)):

$$(12)\qquad \begin{cases} X - x = x\left(\dfrac{l\xi}{\alpha - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\alpha - \mu} + \dfrac{n\zeta}{\alpha - \nu}\right), \\ Y - y = y\left(\dfrac{l\xi}{\beta - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\beta - \mu} + \dfrac{n\zeta}{\beta - \nu}\right), \\ Z - z = z\left(\dfrac{l\xi}{\gamma - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\gamma - \mu} + \dfrac{n\zeta}{\gamma - \nu}\right). \end{cases}$$

5. Berührungskegel einer Fläche des konfokalen Systems. Der von einem Punkte $P = x, y, z$ an die Fläche:

$$(13)\qquad \frac{X^2}{\alpha - \tau} + \frac{Y^2}{\beta - \tau} + \frac{Z^2}{\gamma - \tau} = 1$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 70, (11) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung:

$$(14)\qquad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{(X - x)^2}{\alpha - \tau} + \dfrac{(Y - y)^2}{\beta - \tau} + \dfrac{(Z - z)^2}{\gamma - \tau}, \\ S = \dfrac{x(X - x)}{\alpha - \tau} + \dfrac{y(Y - y)}{\beta - \tau} + \dfrac{z(Z - z)}{\gamma - \tau}, \\ T = \dfrac{x^2}{\alpha - \tau} + \dfrac{y^2}{\beta - \tau} + \dfrac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 \quad \text{(wie in (1))}. \end{cases}$$

6. Darstellung von R und S in den neuen Koordinaten. Durch die Substitution (12) wird:

$$\begin{aligned} R = &\left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)^2}\right\} l^2\xi^2 \\ &+ \left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \cdots\right\} m^2\eta^2 + \left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)^2} + \cdots\right\} n^2\zeta^2 \\ &+ 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \cdots\right\} mn\eta\zeta + 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)(\alpha - \lambda)} + \cdots\right\} nl\zeta\xi \\ &+ 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)} + \cdots\right\} lm\xi\eta \end{aligned}$$

oder nach (8) und (6):

$$R = \left\{\frac{T}{(\tau-\lambda)^2} - \frac{1}{(\tau-\lambda)l^2}\right\} l^2\xi^2 + \cdots + \cdots + 2\frac{T}{(\tau-\mu)(\tau-\nu)} mn\eta\zeta + \cdots + \cdots$$

oder:

$$(16)\quad R = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\zeta}{\tau-\nu}\right\}^2 - \left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu} + \frac{\zeta^2}{\tau-\nu}\right\}.$$

Ebenso wird:

$$S = \left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)} + \cdots\right\} l\xi + \left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)} + \cdots\right\} m\eta + \left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\nu)} + \cdots\right\} n\zeta$$

und nach (3):

$$(17)\quad S = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\zeta}{\tau-\nu}\right\}.$$

7. Die Hauptachsengleichung des Berührungskegels. Mit den Werten (16) und (17) nimmt die Gleichung (14) die Form an:

$$(18)\quad \frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu} + \frac{\zeta^2}{\tau-\nu} = 0.$$

Dies ist die Gleichung des vom Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ an die Fläche τ des konfokalen Systems gelegten Berührungskegels in bezug auf das neue Koordinatensystem $P\xi\eta\zeta$.

Die Form der Gleichung zeigt:

Der von einem Punkte P des Raumes an eine Fläche τ des konfokalen Systems gelegte Berührungskegel hat als Hauptachsen die Normalen ξ, η, ζ der drei durch den Punkt P gehenden Flächen λ, μ, ν des Systems (§ 33, 8).[102])

Da die Fläche τ in (13) als *beliebige Mittelpunktsfläche* gelten kann, durch die das konfokale System bestimmt wird, so ist damit das *Hauptachsenproblem des Berührungskegels* einer Mittelpunktsfläche allgemein gelöst.

8. Die Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids. Die Tangentialebene des einschaligen Hyperboloids:

$$(19)\quad \frac{X^2}{\alpha-\mu} + \frac{Y^2}{\beta-\mu} + \frac{Z^2}{\gamma-\mu} = 1,$$

das durch den Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ hindurchgeht, hat statt der zweiten (10) auch die Gleichung:

$$(20)\quad \frac{x(X-x)}{\alpha-\mu} + \frac{y(Y-y)}{\beta-\mu} + \frac{z(Z-z)}{\gamma-\mu} = 0,$$

wobei:

$$(21)\quad \frac{x^2}{\alpha-\mu} + \frac{y^2}{\beta-\mu} + \frac{z^2}{\gamma-\mu} = 1.$$

Der laufende Punkt X, Y, Z der beiden Erzeugenden des Hyperboloids μ, die durch $P = x, y, z$ hindurchgehen, genügt beiden Gleichungen (19) und (20) (§ 67, (28)). Infolge von (10) und (21) kann aber die Gleichung (19) auch in der Form:

$$(22) \qquad \frac{(X-x)^2}{\alpha-\mu} + \frac{(Y-y)^2}{\beta-\mu} + \frac{(Z-z)^2}{\gamma-\mu} = 0$$

geschrieben werden, so daß *die Erzeugenden durch* (20) *und* (22) *dargestellt sind.*

9. Die Hauptachsengleichung der Erzeugenden. Durch die Transformation (12) wird nun aus (20) mit Rücksicht auf (5) und (4):

$$(23) \qquad \eta = 0;$$

ferner aus (22):

$$\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\lambda)^2} + \cdots\right\} l^2 \xi^2 + \left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)^3} + \cdots\right\} m^2 \eta^2$$
$$+ \left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)^2} + \cdots\right\} n^2 \zeta^2 + 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\mu)^2(\alpha-\nu)} + \cdots\right\} mn\eta\zeta$$
$$+ 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \cdots\right\} nl\zeta\xi + 2\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)^2} + \cdots\right\} lm\xi\eta = 0$$

und nach (9) und (7), indem überdies $\eta = 0$ gesetzt wird[102]):

$$(24) \qquad \frac{\xi^2}{\mu-\lambda} + \frac{\zeta^2}{\mu-\nu} = 0.$$

I. *Dies ist die Gleichung der Erzeugenden des Hyperboloids μ im Punkte λ, μ, ν in bezug auf die Normalen* ξ und ζ *der beiden Flächen λ und ν.*

II. Diese Normalen sind also die *Hauptachsen* (*Halbierungslinien*) der Erzeugenden.

III. Ebenso sind die Normalen der Flächen μ und ν oder λ und μ die Hauptachsen der *imaginären Linienpaare*, in denen das *Ellipsoid* λ oder das *zweischalige Hyperboloid* ν von ihren Tangentialebenen im Punkte λ, μ, ν geschnitten werden.

10. Das Hauptachsenproblem eines einer Tangentialebene parallelen Schnittes. Für die Fläche:

$$(25) \qquad 2g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

und die der Tangentialebene im Punkte $P = x, y, z$ parallele Ebene:

$$(26) \qquad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - s = 0$$

sind die mit:

$$(27) \qquad u = g_1 = \frac{x}{a^2}, \quad v = g_2 = \frac{y}{b^2}, \quad w = g_3 = \frac{z}{c^2}, \; s$$

geränderten Determinanten § 115, (4), (8), (9):

$$(28)\qquad A^u_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2}(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2) = -\frac{1}{a^2b^2c^2},$$

$$(29)\qquad A'^u_{44} = A^u_{44}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2}{a^2b^2c^2}$$
$$= -\frac{1}{a^2b^2c^2}\{(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\},$$

$$(30)\qquad A^u = -A^u_{44} - \frac{s^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1 - s^2}{a^2b^2c^2}.$$

Damit ist die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$ des ebenen Schnittes (25), (26) nach § 109, (11):

$$(31)\qquad -G^2\sigma^2 - A'^u_{44}\sigma + A^u_{44} = 0, \quad G^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

und die auf seine Hauptachsen η, ζ und seinen Mittelpunkt bezogene Gleichung des Schnittes (§ 112, (18)):

$$(32)\qquad \sigma_1\eta^2 + \sigma_2\zeta^2 = -\frac{A^u}{A^u_{44}} = 1 - s^2.$$

Setzt man nun, um dies auf ein Ellipsoid λ des konfokalen Systems und die Tangentialebene im Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ anzuwenden:

$$a^2 = \alpha - \lambda, \quad b^2 = \beta - \lambda, \quad c^2 = \gamma - \lambda; \quad G^2 = \frac{1}{l^2} = \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)}$$

nach (4), und benutzt die erste der durch Gleichsetzen der beiderseitigen Koeffizienten aus der Identität § 120, (12) entstehenden Gleichungen:

$$(33)\qquad \begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma) - (x^2 + y^2 + z^2) = \lambda + \mu + \nu, \\ (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - \{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\} \\ \qquad\qquad = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu, \\ \alpha\beta\gamma - (\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2) = \lambda\mu\nu, \end{cases}$$

so erhält man:

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = \mu - \lambda + \nu - \lambda$$

und danach für die Gleichung (31):

$$\sigma^2 - \frac{(\mu - \lambda) + (\nu - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}\sigma + \frac{1}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)} = 0.$$

Daraus folgt aber:

$$(34)\qquad \sigma_1 = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\nu - \lambda}.$$

Die Hauptachsen η und ζ sind dabei nach § 110, 6 parallel den gleichbezeichneten Halbierungslinien der imaginären Erzeugenden des Ellipsoides λ im Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ (9, III).

Das Ellipsoid λ wird daher von der seiner Tangentialebene im Punkte λ, μ, ν parallelen Ebene:

(35) $$\frac{xX}{\alpha-\lambda}+\frac{yY}{\beta-\lambda}+\frac{zZ}{\gamma-\lambda}-s=0$$

in der Kurve:

(36) $$\frac{\eta^2}{\mu-\lambda}+\frac{\zeta^2}{\nu-\lambda}=1-s^2$$

geschnitten, wo die vom Mittelpunkt der Kurve ausgehenden Achsen η und ζ die Richtung α_2, β_2, γ_2 und α_3, β_3, γ_3 in (11) *haben.*

Die Annahme $s=1$ oder 0 führt auf die Tangentialebene selbst, wie in (24), oder die parallele Diametralebene.

11. Die Hauptkrümmungsmittelpunkte. Die beiden *Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids λ* im Punkte λ, μ, ν sind nach § 110, (23):

(37) $$\varrho_1=\frac{\lambda-\mu}{l}, \quad \varrho_2=\frac{\lambda-\nu}{l},$$

positiv gerechnet nach § 110, (25) in der Richtung der ξ-Achse in (11). Für den zu ϱ_1 gehörigen Krümmungsmittelpunkt ist daher:

$$x_1-x=\varrho_1\alpha_1, \quad y_1-y=\varrho_1\beta_1, \quad z_1-z=\varrho_1\gamma_1$$

oder nach (11) und (37):

(38) $$x_1=\frac{\alpha-\mu}{\alpha-\lambda}x, \quad y_1=\frac{\beta-\mu}{\beta-\lambda}y, \quad z_1=\frac{\gamma-\mu}{\gamma-\lambda}z.$$

Dies ist aber der Pol der ersten Ebene (10) in bezug auf die Fläche (21) (§ 120, **11**, I). Es folgt also:

Die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte des Ellipsoides λ im Punkte $P=\lambda, \mu, \nu$ sind die Pole der Tangentialebene des Ellipsoides λ in P in bezug auf die beiden Hyperboloide μ und ν.[181])

§ 122. Tangentialkegel, Tangenten und Tangentialebenenpaare.

1. Das System konfokaler Berührungskegel an einem Punkte. Der von einem Punkte $P=\lambda, \mu, \nu$ an die Fläche:

(1) $$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=1$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 121, (18) die Gleichung:

(2) $$\frac{\xi^2}{\lambda-\tau}+\frac{\eta^2}{\mu-\tau}+\frac{\zeta^2}{\nu-\tau}=0,$$

während die Erzeugenden des Hyperboloids μ, die durch P gehen, nach § 121, (23); (24) durch die Gleichungen:

(3) $$\frac{\xi^2}{\lambda-\mu}+\frac{\zeta^2}{\nu-\mu}=0, \quad \eta=0$$

dargestellt sind.

Bei festem λ, μ, ν $(\nu > \mu > \lambda)$ und veränderlichem τ bilden aber nach § 118, (1); (3) die Kegel (2) ein System konfokaler Kegel mit den Brennlinien (3).

Die von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ an die Flächen τ des konfokalen Systems (1) *gelegten Berührungskegel* (2) *bilden ein System konfokaler Kegel, deren Hauptebenen die Tangentialebenen der drei durch P selbst gehenden Flächen $\tau = \lambda, \mu, \nu$ des Systems* (1) *in P und deren Fokallinien die Erzeugenden der Fläche $\tau = \mu$ in P sind.*[102])

2. Verschiedene Formen der Berührungskegel an einem Punkte. Die Kegel (2) sind reell für $\nu > \tau > \lambda$. Es geht daher von P ein *reeller* Berührungskegel an jedes Ellipsoid und zweischalige Hyperboloid, *außerhalb* dessen P liegt (§ 120, **4**), und an jedes einschalige Hyperboloid des konfokalen Systems (1).

Für das Hyperboloid $\tau = \mu$ zerfällt der Kegel, als Ebenengebilde aufgefaßt, in ein reelles, für das Ellipsoid $\tau = \lambda$ und Hyperboloid $\tau = \nu$ in ein imaginäres *Strahlenpaar* (§ 118, (17)).

Für die Fokalkegelschnitte $\tau = \gamma$ und $\tau = \beta$ (§ 120, (21)) ist die Bedingung $\nu > \tau > \lambda$ nach § 120, **3** erfüllt. Ihre Berührungskegel:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\lambda - \gamma} + \dfrac{\eta^2}{\mu - \gamma} + \dfrac{\zeta^2}{\nu - \gamma} = 0, \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{\lambda - \beta} + \dfrac{\eta^2}{\mu - \beta} + \dfrac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0 \end{cases}$$

sind die vom Punkte P über der Fokalellipse und Fokalhyperbel errichteten Kegel. Sie heißen die beiden (reellen) *Fokalkegel des Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$.

3. Zwei Flächen des konfokalen Systems, die eine gegebene Gerade berühren. Zu jedem *„Kegel τ“* des Systems (2) gehört eine *„Fläche τ“* des Systems (1) und umgekehrt. Die *Erzeugenden des Kegels τ* sind die durch den Punkt P gehenden *Tangenten der Fläche τ.*

Jede gegebene Gerade p des Bündels bei P ist nach § 118, **5** Erzeugende zweier (ungleichnamiger) reeller Kegel $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ des Systems (2), also auch Tangente der entsprechenden Flächen $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$. Da aber jede gegebene Gerade p des Raumes als Bestandteil des Bündels an einem Punkte P auf ihr angesehen werden kann, so folgt allgemein:

I. *Jede Gerade des Raumes wird von zwei reellen Flächen des konfokalen Systems* (1) *berührt* (§ 120, **16**).

Diese zwei Flächen sind nach § 118, **5** im allgemeinen verschieden und fallen nur dann zusammen, wenn $\tau_1 = \tau_2 = \mu$ ist, also die Gerade Fokallinie des Kegels (1) und Erzeugende der Fläche μ ist.

II. *Wenn eine Gerade Erzeugende eines Hyperboloids μ des Systems* (1) *ist, so fallen die beiden sie berührenden Flächen in dem Hyperboloid μ zusammen.*

4. Gerade an einem Punkte, die zwei gegebene Flächen berühren. An zwei gegebene Flächen τ_1 und τ_2 des Systems (1) gehen nach (2) vom Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ die zwei Berühungskegel:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\lambda-\tau_1} + \dfrac{\eta^2}{\mu-\tau_1} + \dfrac{\zeta^2}{\nu-\tau_1} = 0, \\ \dfrac{\xi^2}{\lambda-\tau_2} + \dfrac{\eta^2}{\mu-\tau_2} + \dfrac{\zeta^2}{\nu-\tau_2} = 0. \end{cases}$$

Da deren vier gemeinsame Erzeugende gemeinsame Tangenten der Flächen τ_1 und τ_2 sind, so folgt[186]):

I. *Durch einen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes gehen an zwei gegebene Flächen des konfokalen Systems* (1) *vier gemeinsame Tangenten.*

Sie sind nach § 118, 6, II *reell*, wenn die beiden Kegel (5) *ungleichnamige* Kegel des Systems (2) sind, also wenn:

$$(6)\qquad \lambda < \tau_1 < \mu < \tau_2 < \nu.$$

Zwischen den Koordinaten ξ, η, ζ des laufenden Punktes Q der vier Tangenten und den Parametern τ_1, τ_2 bestehen die Beziehungen § 118, (9) mit Verwandlung von $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, x, y, z$ in $\nu, \mu, \lambda, \tau_1, \tau_2, \zeta, \eta, \xi$. Setzt man also (I § 43, 1):

$$(7)\qquad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = PQ$$

und nimmt als positive Richtung jeder der vier Tangenten diejenige, die mit der ξ-Achse, also nach § 121, (11) der *äußeren* Normale des Ellipsoides λ (§ 33, Fig. 86), einen spitzen Winkel bildet, so folgt:

II. *Die vier gemeinsamen Tangenten, die vom Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ an die beiden Flächen τ_1 und τ_2 des konfokalen Systems gelegt werden können, haben in bezug auf das Achsensystem der drei Normalen ξ, η, ζ im Punkte P die Parameterdarstellung:*

$$(8)\qquad \begin{gathered} \xi = \sqrt{\frac{(\lambda-\tau_1)(\lambda-\tau_2)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}\,\sigma, \quad \eta = \varepsilon_2\sqrt{\frac{(\mu-\tau_1)(\mu-\tau_2)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}\,\sigma, \\ \zeta = \varepsilon_3\sqrt{\frac{(\nu-\tau_1)(\nu-\tau_2)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}\,\sigma, \end{gathered}$$

wo $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$, σ die relative Entfernung des laufenden Punktes Q der einzelnen Tangente von dem Ausgangspunkte P, und die Koeffizienten von σ die Richtungskosinus der letzteren sind.

Daher halbiert die ξ-Achse die Innenwinkel der Paare $\varepsilon_2\varepsilon_3 = ++$ und $--$, $+-$ und $-+$, die η-Achse die Außenwinkel der Paare

$++$ und $-+$, $+-$ und $--$, die ζ-Achse die Außenwinkel der Paare $++$ und $+-$, $-+$ und $--$, oder wie wir kurz sagen mögen:

III. *Die Normalen der drei durch einen Punkt gehenden Flächen* λ, μ, ν *des konfokalen Systems halbieren die Winkel je zweier Paare der von dem Punkte an zwei andere Flächen* τ_1, τ_2 *gehenden gemeinsamen Tangenten* (§ 33, 8).

5. Die vier Fokalstrahlen eines Punktes. Die beiden Fokalkegel (4) sind, da die Bedingung (6) mit $\tau_1 = \gamma$ und $\tau_2 = \beta$ stets erfüllt ist, ungleichnamige Kegel des Systems (2). Sie schneiden sich also stets in vier reellen Strahlen.

Diese vier Strahlen, die gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalkegelschnitte durch den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$, *heißen die vier Fokalstrahlen des Punktes.*

Ihre Parameterdarstellung ergibt sich aus (8) mit $\tau_1 = \beta$, $\tau_2 = \gamma$:

$$(9) \quad \xi = \sqrt{\frac{(\lambda-\gamma)(\lambda-\beta)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}\,\sigma, \quad \eta = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(\mu-\gamma)(\mu-\beta)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}\,\sigma, \quad \zeta = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{(\nu-\gamma)(\nu-\beta)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}\,\sigma.$$

6. Orthogonalität der scheinbaren Umrisse zweier konfokaler Flächen. Die *Tangentialebenen des Kegels* τ *sind die mit Rücksicht auf* 3 *durch den Punkt* P *gehenden Tangentialebenen der Fläche* τ. Der Berührungspunkt einer solchen Tangentialebene mit der Fläche τ liegt auf ihrer Berührungsgeraden mit dem Kegel τ, die in diesem Punkte Tangente der Fläche τ ist.

Längs einer gemeinsamen Erzeugenden p der Kegel τ_1 und τ_2 in (5) sind nach § 118, 7 die Tangentialebenen der Kegel senkrecht zueinander. Da nun diese Ebenen zugleich die Tangentialebenen der Fläche τ_1 und τ_2 in den Berührungspunkten mit der gemeinsamen Tangente p sind, so folgt:

I. *Die Tangentialebenen zweier Flächen des konfokalen Systems* (1) *in den Berührungspunkten mit einer gemeinsamen Tangente sind zueinander senkrecht.*

II. Sind daher mit (6) die vier durch P gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen τ_1 und τ_2 reell, so schneiden sich für ein in P befindliches Auge in der Richtung jeder dieser vier Tangenten die scheinbaren Umrisse der Flächen τ_1 und τ_2 senkrecht.[187]

Insbesondere folgt für $\tau_1 = \gamma$, $\tau_2 = \beta$:

III. *Die beiden Fokalkegelschnitte haben für einen beliebigen Augenpunkt im allgemeinen vier scheinbare Schnittpunkte mit senkrechtem Durchschnitt.*

7. Das Hauptebenenproblem des durch eine Gerade gehenden Tangentialebenenpaares. Die beiden Tangentialebenen der Fläche τ, die durch eine gegebene Gerade p am Punkte P hindurchgehen, sind nach 6 zugleich die Tangentialebenen des Kegels τ, die durch p gehen. Diese aber haben nach § 119, 7 als Hauptebenen die Tangentialebenen der beiden Kegel τ_1 und τ_2 des Systems (2), die durch p gehen und nach 6 zugleich die Tangentialebenen der Flächen τ_1 und τ_2 des Systems (1) sind, die die Gerade p berühren. Da die durch P gehende Gerade als beliebige Gerade des Raumes gelten kann, so folgt:

Das durch eine gegebene Gerade an eine bestimmte Fläche des konfokalen Systems (1) *gelegte Tangentialebenenpaar hat als Hauptebenen die zueinander senkrechten Tangentialebenen derjenigen beiden Flächen des Systems* (1), *welche die Gerade berühren, in den bezüglichen Berührungspunkten.*

Damit ist (vgl. § 121, 7) das *Hauptebenenproblem der Tangentialebenenpaare* für eine beliebige Mittelpunktsfläche gelöst.

8. Berührungskegel, die Rotationskegel sind. Bei festem τ stellt die Gleichung (2) alle Berührungskegel dar, die mit wechselnder Spitze $P = \lambda, \mu, \nu$ an eine bestimmte Fläche (1) gelegt sind. Der Kegel (2) ist immer dann und nur dann ein Rotationskegel, wenn zwei von den elliptischen Koordinaten λ, μ, ν des Punktes P gleich sind. Dies tritt nach § 121, 2 nur ein für die Punkte der Fokalellipse, wo $\lambda = \mu = \gamma$, und der Fokalhyperbel, wo $\mu = \nu = \beta$ ist.

I. *Die Fokalkegelschnitte eines Ellipsoids oder Hyperboloids sind der Ort der Spitzen derjenigen Berührungskegel der Fläche, die Rotationskegel sind.*

Bei einem Punkte $P = \gamma, \gamma, \nu$ der Fokalellipse ist die ζ-Achse die Rotationsachse des Kegels (2) und diese ist Normale des zweischaligen Hyperboloids ν und Tangente der Fokalellipse in P (§ 120, 7, VI).

II. *Die Rotationsachse des Kegels ist jedesmal die Tangente des Fokalkegelschnittes in der Spitze des Kegels.*

In dieser Tangente fallen die Fokallinien (3) zusammen. Sie ist Erzeugende des Hyperboloids $\mu = \gamma$ oder $\mu = \beta$.

Insbesondere gilt der Satz:

III. *Jeder Fokalkegelschnitt ist der Ort der Spitzen der über dem andern errichteten Rotationskegel.*[144])

9. Gleichseitige und dual gleichseitige Berührungskegel. Der Kegel (2) ist ein gleichseitiger, wenn (§ 71, (29)):

$$\frac{1}{\lambda-\tau}+\frac{1}{\mu-\tau}+\frac{1}{\nu-\tau}=0.$$

Dafür kann man schreiben:

$$(\mu-\tau)(\nu-\tau)+(\nu-\tau)(\lambda-\tau)+(\lambda-\tau)(\mu-\tau)=0$$

oder:

(10) $$(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)-2(\lambda+\mu+\nu)\tau+3\tau^2=0,$$

und mit Rücksicht auf § 121, (33):

$$\{-(\beta+\gamma)x^2-(\gamma+\alpha)y^2-(\alpha+\beta)z^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\}$$
$$+2\{x^2+y^2+z^2-\alpha-\beta-\gamma\}\tau+3\tau^2=0,$$

oder auch:

(11) $$\{(\beta-\tau)+(\gamma-\tau)\}x^2+\{(\gamma-\tau)+(\alpha-\tau)\}y^2+\{(\alpha-\tau)+(\beta-\tau)\}z^2$$
$$=(\beta-\tau)(\gamma-\tau)+(\gamma-\tau)(\alpha-\tau)+(\alpha-\tau)(\beta-\tau).$$

Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel der Fläche:

(12) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist daher (§ 100, (17)) *die Fläche*[66]*):*

(13) $$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$$

Der Kegel (2) ist ein dual gleichseitiger, wenn (§ 71, (30)):

(14) $$\lambda-\tau+\mu-\tau+\nu-\tau=0$$

oder:

$$\alpha+\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu=\alpha-\tau+\beta-\tau+\gamma-\tau,$$

und mit Rücksicht auf § 121, (33):

(15) $$x^2+y^2+z^2=\alpha-\tau+\beta-\tau+\gamma-\tau.$$

Der Ort der Spitzen dual gleichseitiger Berührungskegel der Fläche (12) *ist daher* (§ 100, (18)) *die Kugel:*

(16) $$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2.$$

10. Fokalachsen der Ellipsoide und Hyperboloide. Ist $P=\lambda,\mu,\nu$ irgendein Punkt einer Geraden p, so ist das durch p an die Fläche τ des Systems (1) gelegte Tangentialebenenpaar dasselbe, wie das durch die Gerade p an den Kegel τ des Systems (2) gelegte Tangentialebenenpaar. Dieses aber ist von der Form § 119, (25), wenn die Gerade Fokallinie des Systems (2) also nach 1 Erzeugende des Hyperboloids μ ist.

Diejenigen Geraden, an denen die von der Fläche (1) *bestimmte Involution harmonischer Polarebenen eine Involution rechtwinkliger Ebenen*

ist, sind die Erzeugenden der zur Fläche (1) *konfokalen einschaligen Hyperboloide.*

Diese Geraden (§ 20, 4, I) heißen *Fokalachsen* der Fläche (1).

11. Direkte Bestimmung der Fokalachsen der Mittelpunktsflächen. Die Involution harmonischer Polarebenen, welche die Mittelpunktsfläche:

$$(17)\qquad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - s^2 = 0$$

an der Schnittlinie g der beiden Ebenen u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 bestimmt, hat nach § 77, (4) die Gleichung:

$$(18)\qquad (\alpha u_1^2 + \beta v_1^2 + \gamma w_1^2 - s_1^2) + (\alpha u_1 u_2 + \beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 - s_1 s_2)(\lambda' + \lambda'') + (\alpha u_2^2 + \beta v_2^2 + \gamma w_2^2 - s_2^2)\lambda'\lambda'' = 0.$$

Die beiden Ebenen $u_1 + \lambda' u_2$, $v_1 + \lambda' v_2$, $w_1 + \lambda' w_2$, $s_1 + \lambda' s_2$ und $u_1 + \lambda'' u_2$, $v_1 + \lambda'' v_2$, $w_1 + \lambda'' w_2$, $s_1 + \lambda'' s_2$ sind entsprechende Ebenen der Involution, wenn ihre Parameter λ' und λ'' durch die Gleichung (18) verknüpft sind. Die Involution ist eine Involution *rechtwinkliger* Ebenen, wenn für zwei entsprechende Ebenen (I § 42, (5)):

$$(u_1 + \lambda' u_2)(u_1 + \lambda'' u_2) + (v_1 + \lambda' v_2)(v_1 + \lambda'' v_2) + (w_1 + \lambda' w_2)(w_1 + \lambda'' w_2) = 0,$$

oder:

$$(19)\qquad (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)(\lambda' + \lambda'') + (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\lambda'\lambda'' = 0.$$

Die Gleichung (18) hat die Form (19) immer dann und nur dann, wenn mit irgendeinem Faktor τ:

$$\begin{aligned} \alpha u_1^2 + \beta v_1^2 + \gamma w_1^2 - s_1^2 &= \tau(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2),\\ \alpha u_1 u_2 + \beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 - s_1 s_2 &= \tau(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2),\\ \alpha u_2^2 + \beta v_2^2 + \gamma w_2^2 - s_2^2 &= \tau(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2), \end{aligned}$$

oder auch, wenn wir zugleich $s_1 = s_2 = 1$ nehmen:

$$(20)\qquad \begin{cases} (\alpha - \tau)u_1^2 + (\beta - \tau)v_1^2 + (\gamma - \tau)w_1^2 - 1 = 0,\\ (\alpha - \tau)u_1 u_2 + (\beta - \tau)v_1 v_2 + (\gamma - \tau)w_1 w_2 - 1 = 0,\\ (\alpha - \tau)u_2^2 + (\beta - \tau)v_2^2 + (\gamma - \tau)w_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dies sind aber nach § 82, (14'); (15') die Bedingungen dafür, daß die Gerade g eine Erzeugende der Fläche:

$$(21)\qquad (\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 - 1 = 0$$

ist.

I. *Die Fokalachsen einer Mittelpunktsfläche sind die Erzeugenden aller zu ihr konfokalen Flächen.*[177])

Zu diesen gehören auch die Tangenten der drei Fokalkegelschnitte für $\tau = \alpha, \beta, \gamma$, in (20). Denn zwei durch eine solche Tangente

gehende Ebenen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 sind, wie die Gleichungen (20) verlangen, beide Tangentialebenen des Fokalkegelschnittes, und jede geht durch den Berührungspunkt der andern.

II. *Durch einen Punkt des Raumes gehen nach* § 120, 5, I *im Allgemeinen sechs Fokalachsen, von denen zwei reell sind.*

III. Die Fokalachsen der Fläche sind nach § 84, 5, II auch diejenigen Geraden, an denen die Fläche und der imaginäre Kugelkreis dieselbe Involution harmonischer Polarebenen bestimmen.

§ 123. Das System konfokaler Paraboloide.

1. Begriff des konfokalen Systems. Durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x' - p = 0 \tag{1'}$$

wird nach § 56, 10 bei festem e und veränderlichem p ein *System konfokaler Paraboloide* dargestellt.

Wir setzen der Symmetrie wegen mit $\beta > \gamma$:

$$p = \beta - \tau, \quad p - e = \gamma - \tau; \quad e = \beta - \gamma, \quad x' = x + \frac{\beta}{2}\,. \tag{2'}$$

Die *Gleichung des konfokalen Systems*[99]) lautet dann:

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0, \quad \beta > \gamma, \tag{1}$$

wo bei festem β, γ der Parameter τ sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt:

$$-\infty < \tau < +\infty. \tag{2}$$

Der gemeinsame *linke* und *rechte Hauptbrennpunkt* aller Paraboloide (1) ist nach § 56, (3):

$$B_0 = -\frac{\beta}{2},\ 0,\ 0; \quad C_0 = -\frac{\gamma}{2},\ 0,\ 0, \tag{3}$$

und die gemeinsamen *Fokalparabeln*, die *linke* und *rechte*, sind nach § 56, (7):

$$\frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma = 0,\ z = 0; \tag{4}$$ $$\frac{z^2}{\beta - \gamma} - 2x - \beta = 0,\ y = 0. \tag{5}$$

Der *Scheitelpunkt* des einzelnen Paraboloids ist nach § 56, (4):

$$A_0 = -\frac{\tau}{2},\ 0,\ 0. \tag{6}$$

2. Unterscheidung der drei Arten von Paraboloiden. Je nachdem $-\infty < \tau < \gamma$ oder $\gamma < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < +\infty$ ist das Paraboloid (1) nach § 56, (2) ein linkes elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein rechtes elliptisches. Um diese drei Arten auch in der Be-

zeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich $\tau = \lambda$, $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$. Danach *zerfällt das System* (1) *in die drei Reihen:*

(7) $$\frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \quad -\infty < \lambda < \gamma,$$

(8) $$\frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} + 2x + \mu = 0, \quad \gamma < \mu < \beta,$$

(9) $$\frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} + 2x + \nu = 0, \quad \beta < \nu < +\infty,$$

von denen die erste alle linken elliptischen, die zweite alle hyperbolischen und die dritte alle rechten elliptischen Paraboloide des Systems enthält.

3. Veränderlichkeit und Grenzformen des konfokalen Systems. Während λ von $-\infty$ bis γ sich bewegt (über λ_1, λ_2, λ_3 in Fig. 186), zieht sich das linke elliptische Paraboloid (7) gegen die linke Fokalparabel c, die es nach § 56, 7 beständig einschließt, zusammen, bis es für $\lambda = \gamma$ in das Innere dieser Parabel (4) in der Ebene $z = 0$ zusammenklappt. Das Äußere der Parabel (4) stellt das hyperbolische Paraboloid $\mu = \gamma$ dar. Dieses zieht sich bei zunehmendem μ (über μ_1, μ_2, μ_3 in Fig. 186) gegen die rechte Fokalparabel b zusammen, bis es für $\mu = \beta$ in das Äußere dieser Parabel (5) zusammenklappt. Das Innere der Parabel (5) stellt dann das rechte elliptische Paraboloid $\nu = \beta$ dar, das sich bei zunehmendem ν (über ν_1, ν_2, ν_3 in Fig. 186) um die rechte Fokalparabel, die es beständig umschließt, weiter und weiter ausdehnt.

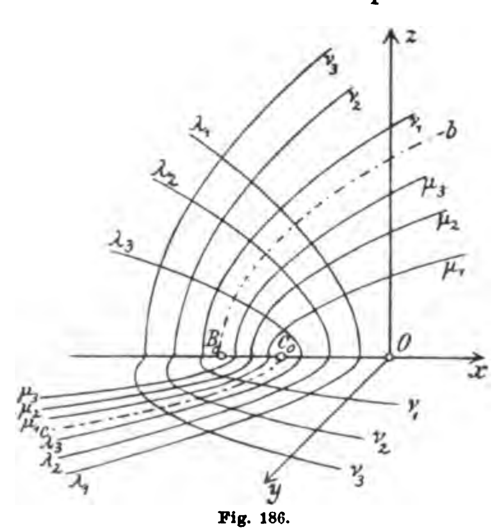


Fig. 186.

4. Die durch einen Punkt des Raumes bestimmten Paraboloide. Um diejenigen Flächen des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt x, y, z des Raumes gehen, hat man die in τ *kubische* Gleichung (1) oder:

(10) $$f(\tau) = (\gamma - \tau)y^2 + (\beta - \tau)z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau)(2x + \tau) = 0$$

nach τ aufzulösen.

Da nun:

(11) $f(-\infty) = -\infty,\quad f(\gamma) = (\beta-\gamma)z^2 > 0,\quad f(\beta) = -(\beta-\gamma)y^2 < 0,$
$$f(+\infty) = +\infty,$$

so hat die Gleichung (10) stets *drei reelle Wurzeln*, die zwischen den Grenzen $-\infty$ und γ, γ und β, β und $+\infty$ liegen und daher nach den Festsetzungen zu (7)—(9) bezüglich mit λ, μ und ν zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt des Raumes gehen stets drei Paraboloide des konfokalen Systems, je ein linkes elliptisches, ein hyperbolisches und ein rechtes elliptisches.*

5. Die durch drei ungleichnamige Paraboloide bestimmten Punkte. *Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes und den Parametern λ, μ, ν der durch ihn gehenden Paraboloide besteht nach 4 die in τ identische Gleichung:*

(12)
$$(\gamma-\tau)y^2 + (\beta-\tau)z^2 + (\beta-\tau)(\gamma-\tau)(2x+\tau) = (\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu).$$

Aus ihr folgt durch Vergleichung der Koeffizienten von τ^2 und mit $\tau = \beta$ und $\tau = \gamma$:

(13)
$$x = \frac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2},\quad y^2 = -\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{\beta-\gamma},$$
$$z^2 = -\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{\gamma-\beta}.$$

Wenn daher λ, μ, ν den Ungleichungen bei (7)—(9) entsprechend gegeben werden, so folgen aus (13) stets vier, nur in den Vorzeichen von y und z verschiedene, reelle Wertsysteme x, y, z.

II. *Irgend drei ungleichnamige Paraboloide des konfokalen Systems schneiden sich stets in vier symmetrisch gegen die beiden Hauptebenen gelegenen Punkten.*

III. *Zwei gleichnamige Paraboloide des Systems haben keinen (reellen) Punkt gemein.*

6. Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Paraboloide. Ein gemeinsamer Punkt x, y, z der beiden Flächen μ und ν genügt den beiden Gleichungen (8) und (9), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

(14)
$$(\mu-\nu)\left\{\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} + 1\right\} = 0.$$

Diese bedeutet aber nach § 70, (26), daß die Tangentialebenen der beiden Flächen im Punkte x, y, z zueinander senkrecht sind. Dasselbe gilt mit zyklischer Vertauschung von λ, μ, ν:

IV. *Zwei ungleichnamige Paraboloide des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer Durchschnittslinie überall senkrecht.*

V. *Drei ungleichnamige Paraboloide schneiden sich in jedem ihrer vier Schnittpunkte* (13) *untereinander senkrecht.*

VI. *Die linke Fokalparabel wird von allen rechten, die rechte von allen linken elliptischen Paraboloiden senkrecht geschnitten.*

Die Schnittpunkte sind nach § 61, 7 die Kreispunkte der Paraboloide.

7. Das konfokale System als Flächenschar. Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (32) in Ebenenkoordinaten:

(15) $$(\beta-\tau)v^2+(\gamma-\tau)w^2+2us-\tau u^2=0$$

oder:

(16) $$(\beta v^2+\gamma w^2+2us)-\tau(u^2+v^2+w^2)=0.$$

I. *Das System der konfokalen Flächen ist daher nach* § 120, (16) *eine Flächenschar, von deren beiden Grundflächen*[100]*):*

(17) $\beta v^2+\gamma w^2+2us=0,$ (18) $u^2+v^2+w^2=0$

die eine der imaginäre Kugelkreis ist (§ 120, (20)).

Jede *gemeinsame* Tangentialebene der beiden Grundflächen (17) und (18) ist nach (16) auch gemeinsame Tangentialebene *aller* Flächen der Schar. Solche Ebenen sind außer der unendlich fernen Ebene $u=0,\ v=0,\ w=0,\ s=1$ sämtlich imaginär.

II. *Jede Ebene, die nicht gemeinsame Tangentialebene der beiden Grundflächen ist, wird von einer bestimmten Fläche der Schar berührt.*

8. Kegelschnitte der Schar. Unter den Flächen der Schar (15) befinden sich außer dem Kugelkreis (18), der doppelt zählend (§ 120, **9**) dem Werte $\tau=\infty$ entspricht, zwei weitere *Kegelschnitte*, entsprechend den Werten $\tau=\beta,\ \gamma$[144]):

(19) $(\gamma-\beta)w^2+2us-\beta u^2=0,\quad (\beta-\gamma)v^2+2us-\gamma u^2=0.$

Es sind die beiden *Fokalparabeln* (4), (5) als umhüllt von ihren Tangentialebenen gedacht (§ 13, (42); § 53, (35)).

9. Die Schnittkurvenenveloppe der Schar. Wie § 120, **10** ergibt sich auch hier, daß *die Schnittkurvenenveloppe der Schar* (15) *von deren gemeinsamen Tangentialebenen umhüllt wird* und in *Ebenenkoordinaten* durch die beiden Gleichungen (17), (18) dargestellt wird.

Um ihre Gleichung in *Punktkoordinaten* zu erhalten, ordnet man die in x, y, z, t homogen gemachte Gleichung (10) nach Potenzen von τ:

(20) $$f(\tau)=P\tau^3+Q\tau^2+R\tau+S=0,$$

wo:
$$P = t^2, \quad Q = \{-(\beta+\gamma)t + 2x\}t = Q't,$$
$$R = -(y^2+z^2) + \beta\gamma t^2 - 2(\beta+\gamma)xt, \quad S = \gamma y^2 + \beta z^2 + 2\beta\gamma xt.$$
Damit wird die Gleichung § 120, (29):

(21) $$\{(9St - Q'R)^2 - 4(3R - Q'^2)(3QS - R^2)\}t^2 = 0.$$

Die Schnittkurvenenveloppe zerfällt also in eine Fläche sechster Ordnung und die doppelte unendlich ferne Ebene (§ 34, (21)).

10. Der Ort der Pole einer Ebene. Der Pol einer gegebenen Ebene:

(22) $$ux + vy + wz + s = 0$$

in bezug auf die Fläche (15) hat nach § 83, (5') die Koordinaten:

(23) $$x = \frac{s}{u} - \tau, \quad y = (\beta - \tau)\frac{v}{u}, \quad z = (\gamma - \tau)\frac{w}{u}.$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem τ eine gerade Linie dar, deren Richtungskosinus sich wie $u:v:w$ verhalten (I § 43, (1)), die also auf (22) senkrecht steht. Wie § 120, **11** folgt daher:

I. *Der Ort der Pole einer Ebene in bezug auf die Paraboloide der Schar* (15) *ist eine gerade Linie, die Normale der Ebene in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Fläche der Schar.*[101])

Ausgenommen sind die zwei Hauptebenen und die unendlich ferne Ebene, die in bezug auf *alle* Flächen der Schar *denselben* Pol haben.

11. Der Achsenkomplex des konfokalen Systems. Der Achsenkomplex der Fläche (1) wird nach § 85, (39) unabhängig von τ:

(24) $$p_{23}p_{14} + (\beta - \gamma)p_{24}p_{34} = 0.$$

II. *Alle Flächen des konfokalen Systems haben denselben Achsenkomplex.*

Da beim Übergang von der Bezeichnung § 85, (34) zu der hier in (1) gebrauchten $\beta, \gamma, a, \beta + a, \gamma + a$ durch $\beta - \tau, \gamma - \tau, \tau, \beta, \gamma$ zu ersetzen sind, so werden die rechten Seiten der Formeln § 85, (38); (44) für die Gleichung (1) *unabhängig von* τ.

Die Sätze § 120, **12**, III und IV *gelten also auch für das System konfokaler Paraboloide.* Auch ergibt sich für dieses ebenso wie in § 120, **13**:

V. *Der Achsenkomplex einer jeden Fläche des konfokalen Systems besteht aus den Normalen sämtlicher Flächen.*

Endlich folgt mit Rücksicht auf § 83, (7') der Satz § 120, **15**.

12. Ebenes Polarsystem in den Hauptebenen. Eine Ebene u, v, w schneidet die Koordinatenebene $z = 0$ in der Geraden u, v (I § 45, **1**);

der zur Ebene konjugierte Normalstrahl § 85, (38) schneidet die Ebene $z = 0$ in dem Punkte (I § 48, (9')):

$$(25)\qquad x = \frac{p_{31}}{p_{34}} = -\left(\gamma - \frac{1}{u}\right), \quad y = -\frac{p_{23}}{p_{34}} = (\beta - \gamma)\frac{v}{u}\,.$$

Dieses ist aber nach § 20, (40') der Pol der Geraden u, v in bezug auf die zweite Parabel (19):

Eine Ebene und ihr konjugierter Normalstrahl, insbesondere Tangentialebene und zugehörige Normale bei irgendeiner Fläche (1), *schneiden eine jede der beiden Hauptebenen in Polare und Pol der in ihr liegenden Fokalparabel.*[81])

13. Die Linienkoordinatengleichung des konfokalen Systems. Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (41) in Linienkoordinaten:

$$(26)\qquad p_{23}^2 - 2(\gamma - \tau)p_{12}p_{34} + 2(\beta - \tau)p_{31}p_{34} - (\beta - \tau)(\gamma - \tau)p_{14}^2 + (\gamma - \tau)\tau p_{24}^2 + (\beta - \tau)\tau p_{34}^2 = 0.$$

Eine gegebene Gerade wird von zwei Flächen des konfokalen Systems berührt.

§ 124. Das Hauptachsenproblem des Berührungskegels.

1. Begriff der parabolischen Koordinaten. Die Parameter λ, μ, ν der drei nach § 123, 4 durch einen Punkt x, y, z gehenden Paraboloide heißen die *parabolischen Koordinaten des Punktes.*

Sie sind bei gegebenen Koordinaten x, y, z des Punktes durch die kubische Gleichung § 123, (10) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 123, (13) den Punkt x, y, z vierdeutig.

2. Parabolische Koordinaten besonderer Punkte. Für die Punkte einer *Hauptebene* hat im allgemeinen eine parabolische Koordinate einen der Grenzwerte β, γ: in der Ebene $z = 0$ ist innerhalb der linken Fokalparabel $\lambda = \gamma$, außerhalb $\mu = \gamma$; in der Ebene $y = 0$ außerhalb der rechten Fokalparabel $\mu = \beta$, innerhalb $\nu = \beta$ (Fig. 186).

Für die Punkte einer *Fokalparabel* und nur für diese sind zwei parabolische Koordinaten gleich, für die linke $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, für die rechte $\mu = \beta$, $\nu = \beta$.

Für die Punkte der *Hauptachse* ist links von B_0: $\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$; zwischen B_0 und C_0: $\lambda = \gamma$, $\nu = \beta$; rechts von C_0: $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$.

Für die Hauptbrennpunkte selbst ist:

$$B_0 : \lambda = \gamma,\ \mu = \beta,\ \nu = \beta; \quad C_0 : \lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = \beta.$$

3. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und parabolischen Koordinaten. Bezeichnen wir mit T die linke Seite der

Gleichung § 123, (1), so ist nach der Definition der parabolischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 123, (12):

(1) $$T = \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den gemeinen x, y, z und den parabolischen Koordinaten λ, μ, ν des laufenden Punktes identisch in τ.

Mit $\tau = \lambda, \mu, \nu$ folgt:

(2) $$\begin{cases} \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \\ \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} + 2x + \mu = 0, \\ \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} + 2x + \nu = 0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren $\tau - \lambda$, $\tau - \mu$, $\tau - \nu$:

(3) $$\begin{cases} \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)} + 1 = \frac{T}{\tau - \lambda} = \frac{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} + 1 = \frac{T}{\tau - \mu} = \frac{(\tau - \nu)(\tau - \lambda)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} + 1 = \frac{T}{\tau - \nu} = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}; \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Gliede dieser Identitäten bezüglich mit $\tau = \lambda, \mu, \nu$:

(4) $$\begin{cases} \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} + 1 = \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} = \frac{1}{l^2}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} + 1 = \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \frac{1}{m^2}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} + 1 = \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo $1 : l^2$, $1 : m^2$, $1 : n^2$ als Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke dienen; ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (3) mit $\tau = \nu$ oder der dritten mit $\tau = \mu$:

(5) $$\frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} + 1 = 0, \cdots, \cdots.$$

Die Punkte deuten, wie auch im Folgenden, die zyklische Vertauschung von λ, μ, ν, bezüglich auch von l^2, m^2, n^2 an.

Durch Subtraktion je zweier Formeln (3) folgt:

(6) $$\frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = \frac{T}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}, \cdots, \cdots$$

und aus der ersten dieser drei mit $\tau = \lambda$:

$$(7)\qquad \frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} = 0.$$

Durch Subtraktion je zweier entsprechender Gleichungen (3) und (4) ergibt sich:

$$(8)\qquad \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)^2} = \frac{T}{(\tau-\lambda)^2} - \frac{1}{(\tau-\lambda)l^2}, \ldots, \ldots.$$

Endlich gibt die Subtraktion der Gleichung (5) von der zweiten und dritten (4) die beiden folgenden und ihre zyklischen Vertauschungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2(\beta-\nu)} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)^2(\gamma-\nu)} = \dfrac{1}{(\mu-\nu)m^2}, \ldots, \ldots, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)^2} + \dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)^2} = \dfrac{1}{(\nu-\mu)n^2}, \ldots, \ldots. \end{cases}$$

4. Das Achsensystem der drei Flächennormalen. *Die Tangentialebenen der drei durch einen bestimmten Punkt $P = x, y, z$ des Raumes gehenden Paraboloide λ, μ, ν* § 123, (7)—(9) sind nach § 70, (26) in laufenden Koordinaten X, Y, Z in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem $Oxyz = OXYZ$:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{yY}{\beta-\lambda} + \dfrac{zZ}{\gamma-\lambda} + X + x + \lambda = 0, \\ \dfrac{yY}{\beta-\mu} + \dfrac{zZ}{\gamma-\mu} + X + x + \mu = 0, \\ \dfrac{yY}{\beta-\nu} + \dfrac{zZ}{\gamma-\nu} + X + x + \nu = 0. \end{cases}$$

Die *Normalen ξ, η, ζ dieser drei Ebenen* im Punkte P haben die Richtungskosinus:

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = l, \quad \beta_1 = \dfrac{ly}{\beta-\lambda}, \quad \gamma_1 = \dfrac{lz}{\gamma-\lambda}, \\ \alpha_2 = m, \quad \beta_2 = \dfrac{my}{\beta-\mu}, \quad \gamma_2 = \dfrac{mz}{\gamma-\mu}, \\ \alpha_3 = n, \quad \beta_3 = \dfrac{ny}{\beta-\nu}, \quad \gamma_3 = \dfrac{nz}{\gamma-\nu}, \end{cases}$$

wo l^2, m^2, n^2 die unter (4) eingeführten Werte haben und l, m, n die positiven Wurzeln bedeuten mögen.

Das neue Achsensystem $P\xi\eta\zeta$ ist nach § 123, 6 ebenso wie das alte $OXYZ$ *rechtwinklig*. Zwischen den alten X, Y, Z und den neuen Koordinaten ξ, η, ζ des *laufenden* Punktes bestehen die Relationen (I § 37, (13)):

$$(12)\quad \begin{cases} X-x = l\xi + m\eta + n\zeta, \\ Y-y = y\left(\frac{l\xi}{\beta-\lambda} + \frac{m\eta}{\beta-\mu} + \frac{n\zeta}{\beta-\nu}\right), \\ Z-z = z\left(\frac{l\xi}{\gamma-\lambda} + \frac{m\eta}{\gamma-\mu} + \frac{n\zeta}{\gamma-\nu}\right). \end{cases}$$

5. Berührungskegel eines Paraboloids des konfokalen Systems. Der von einem Punkte $P = x, y, z$ an die Fläche:

$$(13)\quad \frac{Y^2}{\beta-\tau} + \frac{Z^2}{\gamma-\tau} + 2X + \tau = 0$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 70, (33) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung:

$$(14)\quad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15)\quad \begin{cases} R = \frac{(Y-y)^2}{\beta-\tau} + \frac{(Z-z)^2}{\gamma-\tau}, \\ S = \frac{y(Y-y)}{\beta-\tau} + \frac{z(Z-z)}{\gamma-\tau} + (X-x), \\ T = \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} + 2x + \tau \quad \text{(wie in (1))}. \end{cases}$$

6. Darstellung von R und S in den neuen Koordinaten. Durch die Substitution (12) wird:

$$R = \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)^2}\right\} l^2\xi^2 + \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)^2} + \cdots\right\} m^2\eta^2$$
$$+ \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)^2} + \cdots\right\} n^2\zeta^2 + 2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \cdots\right\} mn\eta\zeta$$
$$+ 2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)(\beta-\lambda)} + \cdots\right\} nl\zeta\xi + 2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} \cdots\right\} lm\xi\eta$$

oder nach (8) und (6):

$$R = \left\{\frac{T}{(\tau-\lambda)^2} - \frac{1}{(\tau-\lambda)l^2}\right\} l^2\xi^2 + \cdots + \cdots + 2\frac{T}{(\tau-\mu)(\tau-\nu)} mn\eta\zeta + \cdots + \cdots$$

oder:

$$(16)\quad R = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\zeta}{\tau-\nu}\right\}^2 - \left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu} + \frac{\zeta^2}{\tau-\nu}\right\}.$$

Ebenso wird:

$$S = \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)} + 1\right\} l\xi + \cdots + \cdots$$

oder nach (3):

$$(17)\quad S = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\zeta}{\tau-\nu}\right\}.$$

7. Die Hauptachsengleichung des Berührungskegels. Mit den Werten (16) und (17) nimmt die Gleichung (14) die Form an:

$$(18) \qquad \frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}+\frac{\zeta^2}{\tau-\nu}=0.$$

Dies ist die Gleichung des vom Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ an die Fläche τ des konfokalen Systems gelegten Berührungskegels in bezug auf das neue Koordinatensystem $P\xi\eta\zeta$.

Der von einem Punkte P des Raumes an eine Fläche τ des konfokalen Systems gelegte Berührungskegel hat als Hauptachsen die Normalen ξ, η, ζ der drei durch den Punkt P gehenden Paraboloide λ, μ, ν des Systems.[102])

8. Die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids. Die Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids:

$$(19) \qquad \frac{Y^2}{\beta-\mu}+\frac{Z^2}{\gamma-\mu}+2X+\mu=0,$$

das durch den Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ hindurchgeht, hat statt der zweiten (10) auch die Gleichung:

$$(20) \qquad \frac{y(Y-y)}{\beta-\mu}+\frac{z(Z-z)}{\gamma-\mu}+(X-x)=0,$$

wobei:

$$(21) \qquad \frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu=0.$$

Der laufende Punkt X, Y, Z der beiden Erzeugenden des Paraboloids μ, die durch $P = x, y, z$ hindurchgehen, genügt (§ 67, (28)) den beiden Gleichungen (19) und (20). Infolge von (10) und (21) kann aber die Gleichung (19) auch in der Form:

$$(22) \qquad \frac{(Y-y)^2}{\beta-\mu}+\frac{(Z-z)^2}{\gamma-\mu}=0$$

geschrieben werden, so daß *die Erzeugenden durch* (20) *und* (22) *dargestellt sind.*

9. Die Hauptachsengleichung der Erzeugenden. Durch die Transformation (12) wird nun aus (20) mit Rücksicht auf (5) und (4):

$$(23) \qquad \eta=0$$

und aus (22):

$$\left\{\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\lambda)^2}+\cdots\right\}l^2\xi^2+\left\{\frac{y^2}{(\beta-\mu)^3}+\cdots\right\}m^2\eta^2+\left\{\frac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)^2}+\cdots\right\}n^2\zeta^2$$
$$+2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\mu)^2(\beta-\nu)}+\cdots\right\}mn\eta\zeta+2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\cdots\right\}nl\zeta\xi$$
$$+2\left\{\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)^2}+\cdots\right\}lm\xi\eta=0$$

und nach (9) und (7), indem überdies $\eta = 0$ gesetzt wird:

$$\frac{\xi^2}{\mu - \lambda} + \frac{\zeta^2}{\mu - \nu} = 0. \tag{24}$$

Dies ist die Gleichung der Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids μ *im Punkte* λ, μ, ν *in bezug auf die Normalen der beiden Flächen* λ *und* ν.

Diese Normalen sind also die *Hauptachsen* (Halbierungslinien) der Erzeugenden.

Ebenso sind die Normalen der Flächen μ und ν oder λ und μ die Hauptachsen der *imaginären Linienpaare,* in denen die *elliptischen* Paraboloide λ oder ν von ihren Tangentialebenen im Punkte λ, μ, ν geschnitten werden.

Ebene Schnitte, die zu einer solchen Tangentialebene parallel sind, haben nach § 110, **6** dieselben Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten (§ 121, (36)).

§ 125. Tangentialkegel, Tangenten und Tangentialebenenpaare.

1. Das System konfokaler Berührungskegel an einem Punkte. Der von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ an die Fläche:

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0 \tag{1}$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 124, (18) die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{\lambda - \tau} + \frac{\eta^2}{\mu - \tau} + \frac{\zeta^2}{\nu - \tau} = 0, \tag{2}$$

während die Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids μ, die durch P gehen, nach § 124, (23); (24) durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi^2}{\lambda - \mu} + \frac{\zeta^2}{\nu - \mu} = 0, \quad \eta = 0 \tag{3}$$

dargestellt sind.

Daher gilt auch hier der Satz § 122, **1**.

Der Kegel (2) ist reell für $\nu > \tau > \lambda$. Es geht daher von P ein reeller Berührungskegel an jedes linke und rechte Paraboloid, außerhalb dessen P liegt (§ 123, **3**), und an jedes hyperbolische Paraboloid des Systems (1).

Für das hyperbolische Paraboloid $\tau = \mu$ zerfällt der Kegel (§ 122, **2**) in ein reelles, für die elliptischen Paraboloide $\tau = \lambda$ und ν in ein imaginäres Strahlenpaar.

Die durch die beiden Gleichungen § 122, (4) im vorliegenden Falle dargestellten *Fokalkegel des Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ sind die über den beiden Fokalparabeln errichteten Kegel.

2. Die vier Fokalstrahlen eines Punktes. Die in § 122, **3**—**4** abgeleiteten Sätze gelten auch für das konfokale System der Paraboloide, nur daß an Stelle des einschaligen Hyperboloids μ in dem Satze § 122, **3**, II das hyperbolische Paraboloid eintritt.

Die Gleichungen der vier gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalparabeln können statt in der Form § 122, (9) nach § 124, (4) auch in der Form:

(4) $$\xi = l\sigma, \quad \eta = \varepsilon_2 m\sigma, \quad \zeta = \varepsilon_3 n\sigma$$

dargestellt werden. Entsprechend § 122, **4** ist auch hier als positive Richtung jeder der vier Transversalen diejenige genommen, die mit der ξ-Achse, also nach § 124, (11) der äußeren Normale des linken elliptischen Paraboloides λ (§ 35, Fig. 88), einen spitzen Winkel bildet.

Da aber nach § 124, (11) l, m, n die Richtungskosinus der x-Achse gegen $P\xi\eta\zeta$ sind, so ergibt sich, daß *die eine der vier gemeinsamen Transversalen* ($\varepsilon_2, \varepsilon_3 = 1$) *stets der x-Achse parallel und gleichgerichtet ist.* Es ist diejenige die von P nach *dem gemeinsamen unendlich fernen Punkt der beiden Fokalparabeln* läuft.

Von dieser Transversale abgesehen, sind also noch *drei Fokalstrahlen* $\varepsilon_2, \varepsilon_3 = +, -;\ -+;\ --$ dem Punkte P eigentümlich.

Die übrigen Sätze § 122, **4**—**8** und **10** übertragen sich auch auf die konfokalen Paraboloide.

3. Gleichseitige und dual gleichseitige Berührungskegel. Die Bedingung § 122, (10) für einen gleichseitigen Kegel (2) wird, mit Rücksicht auf die aus der Identität § 123, (12) folgenden Formeln:

(5) $$\begin{cases} \beta + \gamma - 2x = \lambda + \mu + \nu, \\ \beta\gamma - 2(\beta + \gamma)x - y^2 - z^2 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu, \\ -2\beta\gamma x - \gamma y^2 - \beta z^2 = \lambda\mu\nu: \end{cases}$$

$$\{-y^2 - z^2 + \beta\gamma - 2(\beta + \gamma)x\} + 2(2x - \beta - \gamma)\tau + 3\tau^2 = 0$$

oder auch:

(6) $$y^2 + z^2 + \{(\beta - \tau) + (\gamma - \tau)\}(2x + \tau) - (\beta - \tau)(\gamma - \tau) = 0.$$

Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel des Paraboloids:

(7) $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

ist daher (§ 100, (21)) *das Rotationsparaboloid*[66]*):*

(8) $$y^2 + z^2 + 2(b^2 + c^2)x - b^2c^2 = 0.$$

Die Bedingung § 122, (14) wird nach (5):

(9) $$(\beta - \tau) + (\gamma - \tau) - (2x + \tau) = 0.$$

Der Ort der Spitzen dual gleichseitiger Berührungskegel des Paraboloids (7) *ist daher* (§ 100, (22)) *die Ebene:*

(10) $$b^2 + c^2 - 2x = 0.$$

4. Die Fokalachsen der Paraboloide. Die Involution harmonischer Polarebenen, welche das Paraboloid:

(11) $$\beta v^2 + \gamma w^2 + 2us = 0$$

an der Schnittlinie g der beiden Ebenen u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 bestimmt, hat nach § 77, (4) die Gleichung:

$$(\beta v_1^2 + \gamma w_1^2 + 2u_1 s_1) + (\beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 + u_1 s_2 + u_2 s_1)(\lambda' + \lambda'') + (\beta v_2^2 + \gamma w_2^2 + 2u_2 s_2)\lambda'\lambda'' = 0.$$

Der Vergleich mit § 122, (19) gibt für eine Involution rechtwinkliger Ebenen die Bedingungen:

(12) $$\left\{\begin{array}{l} (\beta - \tau)v_1^2 + (\gamma - \tau)w_1^2 + 2u_1 s_1 - \tau u_1^2 = 0, \\ (\beta - \tau)v_1 v_2 + (\gamma - \tau)w_1 w_2 + u_1 s_2 + u_2 s_1 - \tau u_1 u_2 = 0, \\ (\beta - \tau)v_2^2 + (\gamma - \tau)w_2^2 + 2u_2 s_2 - \tau u_2^2 = 0. \end{array}\right.$$

Dies sind aber nach § 83, (13'); (14') die Bedingungen dafür, daß die Gerade g eine Erzeugende der Fläche:

(13) $$(\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 + 2us - \tau u^2 = 0$$

ist, also nach § 123, (15):

Die Fokalachsen eines Paraboloids sind die Erzeugenden aller zu ihm konfokalen Paraboloide.

II. Kapitel.

Die Amiot- Mac Cullaghschen und Jacobischen Fokaleigenschaften.

§ 126. Schräge Abstände und Abstandsprodukte.

1. Der schräge Abstand eines Punktes von einer Geraden. Eine zur z-Achse des rechtwinkligen Systems $Oxyz$ parallele Gerade p sei durch die Gleichungen:

(1) $$x = x_1, \quad y = y_1$$

gegeben und ein durch die x-Achse (Fig. 187) oder y-Achse gehendes Ebenenpaar bezüglich durch die Gleichungen:

(2) $\beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0,$ (2') $\alpha^2 x^2 - \gamma^2 z^2 = 0.$

Die Richtungskosinus der Normale einer Ebene des Paares verhalten sich wie:

(3) $0 : \beta : \pm\gamma,$ (3') $\alpha : 0 : \pm\gamma.$

Ist nun x_1, y_1, z_1 der Endpunkt des schrägen Abstandes s eines Punktes $P = x, y, z$ von der Geraden (1), parallel einer der beiden Ebenen (2) (Fig. 187), bezüglich (2') gemessen, so wird:

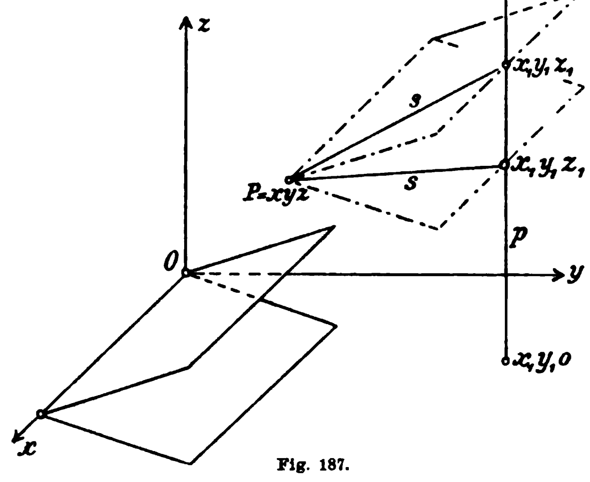


Fig. 187.

(4) $s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$

während z_1 durch die Bedingung bestimmt ist, daß s zur Richtung (3) oder (3') senkrecht ist, also:

(5) $\beta(y - y_1) \pm \gamma(z - z_1) = 0,$
(5') $\alpha(x - x_1) \pm \gamma(z - z_1) = 0.$

Eliminiert man mittels (5) oder (5') $z - z_1$ aus (4), so folgt unabhängig von der Wahl des Vorzeichens in (5), (5'):

(6) $s^2 = (x - x_1)^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)(y - y_1)^2,$ (6') $s^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$

Das Quadrat der beiden einander gleichen schrägen Abstände s eines Punktes x, y, z von der Geraden (1), *gemessen parallel den beiden Ebenen* (2) (Fig. 187) *oder* (2') *hat bezüglich den Wert* (6) *oder* (6').

2. Deutung eines gegebenen Ausdruckes als schrägen Abstand. Ist umgekehrt ein Ausdruck von der Form:

(7) $$N^2 = l^2(x - x_1)^2 + m^2(y - y_1)^2$$

gegeben, so muß man zum Vergleich mit (6) und (6') die beiden Fälle unterscheiden:

(8) $$m^2 > l^2 \quad \text{oder} \quad l^2 > m^2.$$

Setzt man dementsprechend:

(9) $N^2 = l^2\left\{(x - x_1)^2 + \frac{m^2}{l^2}(y - y_1)^2\right\}$, (9') $N^2 = m^2\left\{\frac{l^2}{m^2}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right\}$,

so gehen die eingeklammerten Ausdrücke (9) und (9') in (6) und (6') über mit:

$$\frac{m^2}{l^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \quad \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{m^2 - l^2}{l^2}; \quad \frac{l^2}{m^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \quad \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{l^2 - m^2}{m^2}.$$

Der Ausdruck (7) *ist also bis auf einen konstanten Faktor das Quadrat des schrägen Abstandes s des Punktes x, y, z von der zur z-Achse parallen Geraden* (1), *und zwar wird, je nachdem* $m^2 > l^2$ *oder* $l^2 > m^2$ *ist:*

(10) $$l^2(x - x_1)^2 + m^2(y - y_1)^2 = l^2 s^2 \quad \textit{oder} \quad m^2 s^2,$$

wo s bezüglich parallel dem Ebenenpaar:

(11) $(m^2 - l^2)y^2 - l^2z^2 = 0$ *oder* $(l^2 - m^2)x^2 - m^2z^2 = 0$

gemessen ist.

Mit Vertauschung von y und z folgt ebenso:

Der Ausdruck:

(12) $$l^2(x - x_1)^2 + n^2(z - z_1)^2$$

ist bis auf einen konstanten Faktor das Quadrat des schrägen Abstandes s des Punktes x, y, z von der zur y-Achse parallelen Geraden:

(13) $$x = x_1, \quad z = z_1,$$

und zwar wird, je nachdem $n^2 > l^2$ oder $l^2 > n^2$ ist:

(14) $l^2(x - x_1)^2 + n^2(z - z_1)^2 = l^2s^2$ *oder* n^2s^2,

wo s bezüglich parallel dem Ebenenpaar:

(15) $(n^2 - l^2)z^2 - l^2y^2 = 0$ *oder* $(l^2 - n^2)x^2 - n^2y^2 = 0$

gemessen ist.

3. Anwendung auf den elliptischen Zylinder. Setzt man in (7), (10) und (11):

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad l^2 = \frac{1}{a^2}, \quad m^2 = \frac{1}{b^2}; \quad a^2 > b^2,$$

so nehmen die Gleichungen (10) und (11) die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{s^2}{a^2}, \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \frac{1}{a^2}z^2 = 0.$$

Bedeutet daher s den schrägen Abstand des laufenden Punktes x, y, z von der z-Achse, parallel zu einer der beiden Ebenen:

(16) $$(a^2 - b^2)y^2 - b^2z^2 = 0, \quad a^2 > b^2,$$

gemessen, so besteht identisch in x, y, z die Gleichung:

(17) $$a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = s^2 - a^2.$$

Aus dieser Identität folgt:

Der elliptische Zylinder:

(18) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2,$$

ist der Ort der Punkte, deren schräger Abstand s von der z-Achse, parallel zu einer der Ebenen (16) *gemessen, den festen Wert a hat.*

Die den Ebenen (16) parallelen Ebenen bilden die *zwei Scharen von Kreisschnittebenen* des elliptischen Zylinders (§ 59, (26)).

4. Das Produkt der Abstände eines Punktes von zwei Ebenen. Ein Paar von Ebenen, die der z-Achse parallel sind (Fig. 188), sei durch die Gleichung:

(19) $$\alpha^2(x - x_1)^2 - \beta^2(y - y_1)^2 = 0$$

gegeben. Die senkrechten Abstände r_1 und r_2 eines Punktes $P = x, y, z$ von ihnen sind alsdann (I § 41, (6)):

$$r_1 = \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad r_2 = \frac{\alpha(x - x_1) - \beta(y - y_1)}{\varepsilon_2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

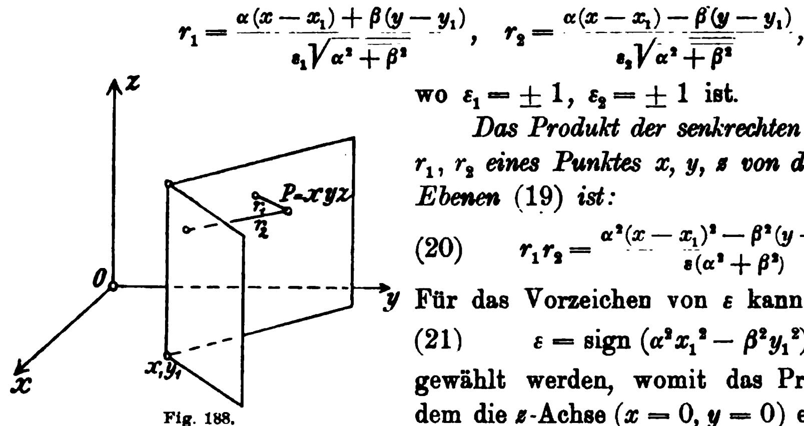


Fig. 188.

wo $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ ist.

Das Produkt der senkrechten Abstände r_1, r_2 eines Punktes x, y, z von den beiden Ebenen (19) *ist:*

(20) $$r_1 r_2 = \frac{\alpha^2(x - x_1)^2 - \beta^2(y - y_1)^2}{\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Für das Vorzeichen von ε kann:

(21) $$\varepsilon = \operatorname{sign}(\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 y_1^2)$$

gewählt werden, womit das Produkt in dem die z-Achse ($x = 0$, $y = 0$) enthaltenden Winkelraume der Ebenen positiv ist.

5. Deutung eines gegebenen Ausdruckes als Abstandsprodukt. Ist umgekehrt ein Ausdruck von der Form:

(22) $$N^2 = l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2$$

gegeben, so ergibt sich aus (20):

Der Ausdruck (22) *ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der Abstände r_1 und r_2 des Punktes x, y, z von den durch die Achse:*

(23) $$x = x_1, \quad y = y_1$$

gehenden Ebenen:

(24) $$l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = 0,$$

und zwar wird:

(25) $$l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = \varepsilon(l^2 + m^2) r_1 r_2.$$

Hier ist:

(26) $$\varepsilon = \operatorname{sign}\{l^2(x_0 - x_1)^2 - m(y_0 - y_1)^2\},$$

wenn das Produkt in dem eine gegebene Gerade $x = x_0$, $y = y_0$ enthaltenden Winkelraume der Ebenen (24) positiv gilt.

Mit Vertauschung von y und z folgt ebenso:

Der Ausdruck:

(27) $$l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2$$

ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der Abstände r_1 und r_2 des Punktes x, y, z von den durch die Achse:

(28) $$x = x_1, \quad z = z_1$$

gehenden Ebenen:

(29) $$l^2(x-x_1)^2 - n^2(z-z_1)^2 = 0,$$

und zwar wird:

(30) $$l^2(x-x_1)^2 - n^2(z-z_1)^2 = \varepsilon(l^2+n^2)r_1r_2.$$

Hier ist:

(31) $$\varepsilon = \operatorname{sign}\{l^2(x_0-x_1)^2 - n^2(z_0-z_1)^2\},$$

wenn das Produkt in dem die Gerade $x=x_0$, $z=z_0$ enthaltenden Winkelraume der Ebenen (29) positiv gilt.

6. Anwendung auf den hyperbolischen Zylinder. Setzt man in (23), (24), (25):

$$x_1 = 0,\quad y_1 = 0,\quad l^2 = \frac{1}{a^2},\quad m^2 = \frac{1}{b^2},$$

so nehmen die Gleichungen (25) und (24) die Form an:

(32) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)r_1r_2,$$ (33) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

wobei das Produkt r_1r_2 in dem die Ebene $y=0$ enthaltenden Winkelraum positiv gilt.

Aus der Identität:

(34) $$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right\} = r_1r_2 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

folgt alsdann:

Der hyperbolische Zylinder:

(35) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist der Ort eines Punktes, für den das Produkt der Abstände r_1, r_2 von zwei festen Ebenen (33) *den konstanten Wert $a^2b^2 : a^2+b^2$ hat* (§ 1, **11**).

Die Ebenen (33) sind die *Asymptotenebenen* des Zylinders (§ 53, (31)).

§ 127. Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

1. Eine auf zwei konfokale Flächen mit Mittelpunkt bezügliche Identität. Die beiden Flächen:

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1\ (a^2>b^2>c^2),$$ (2) $$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2} = 1\ (a'^2>b'^2>c'^2)$$

sollen konfokal sein, sodaß (§ 55, (24)):

(3) $$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2,$$

wo h^2 den gemeinsamen Wert der drei Differenzen bezeichnet.

Sind nun x, y, z und x_0, y_0, z_0 irgend zwei Punkte des Raumes, so ist:

$$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$
$$=(a^2-a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{a'^2}\right)+(b^2-b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y_0^2}{b'^2}\right)+(c^2-c'^2)\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{z_0^2}{c'^2}\right).$$

Da aber:

$$(a^2-a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{a'^2}\right)=(x-x_0)^2-\left(\frac{a'}{a}x-\frac{a}{a'}x_0\right)^2,$$

so folgt:

I. *Sind die Flächen* (1) *und* (2) *konfokal und bezeichnet* h^2 *den gemeinsamen Wert der drei Differenzen* (3), *so besteht identisch in* x, y, z *und* x_0, y_0, z_0 *die Gleichung:*

$$(4)\qquad h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$
$$=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}$$
$$-\left\{\left(\frac{a'}{a}x-\frac{a}{a'}x_0\right)^2+\left(\frac{b'}{b}y-\frac{b}{b'}y_0\right)^2+\left(\frac{c'}{c}z-\frac{c}{c'}z_0\right)^2\right\}.$$

Wird c^2 durch $-c^2$ ersetzt, also c durch ci, so ändert sich auf der rechten Seite der Identität (4) das Vorzeichen des dritten Quadrats in der zweiten Klammer. Wird aber gleichzeitig c^2 durch $-c^2$ und c'^2 durch $-c'^2$ ersetzt, so ändert sich die rechte Seite von (4) nicht. Entsprechendes gilt für b^2 und b'^2.

2. Die Identität des Amiot-Mac Cullaghschen Satzes. Ordnet man dem Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ durch die Beziehung:

$$(5)\qquad \frac{x_1}{a^2}=\frac{x_0}{a'^2},\quad \frac{y_1}{b^2}=\frac{y_0}{b'^2},\quad \frac{z_1}{c^2}=\frac{z_0}{c'^2}$$

einen Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1$ als *entsprechenden Punkt* zu, so nimmt (4) die Form an:

$$(6)\qquad h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$
$$=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}$$
$$-\left\{\frac{a'^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}.$$

Ist endlich $P_0 = x_0, y_0, z_0$ ein Punkt des Hauptschnittes:

$$(7)\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,\quad z=0 \qquad\text{oder}\quad (7')\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,\quad y=0,$$

der Fläche (2), so ergibt sich:

II. *Ist* $P_0 = x_0, y_0, 0$ *oder* $P_0 = x_0, 0, z_0$ *ein Punkt des Hauptschnittes* $z = 0$ *oder* $y = 0$ *der Fläche* (2) *und wird ein entsprechender Punkt* $P_1 = x_1, y_1, 0$ *oder* $P_1 = x_1, 0, z_1$ *der Hauptebene definiert durch:*

(8) $x_1 = \frac{a^2}{a'^2} x_0, \quad y_1 = \frac{b^2}{b'^2} y_0$ *oder* (8′) $x_1 = \frac{a^2}{a'^2} x_0, \quad z_1 = \frac{c^2}{c'^2} z_0,$

so ist identisch in x, y, z:

(9)
$$h^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2\} - \left\{\frac{a'^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2}(y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2} z^2\right\},$$

(9′)
$$h^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \{(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2\} - \left\{\frac{a'^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} y^2 + \frac{c'^2}{c^2}(z - z_1)^2\right\}.$$

3. Ausartung der zweiten Fläche. Mit $c'^2 = 0$ oder $b'^2 = 0$ (§ 120, 4) wird nach (3):

$h^2 = c^2,\ a'^2 = a^2 - c^2,\ b'^2 = b^2 - c^2$ oder $h^2 = b^2,\ a'^2 = a^2 - b^2,\ c'^2 = c^2 - b^2,$

und die Hauptschnitte (7), (7′) gehen in die Fokalellipse oder Fokalhyperbel (§ 55, (10)):

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0$$

der Fläche (1) über. Setzt man alsdann noch (§ 55, (6)):

$$b^2 = a^2 - d^2, \quad c^2 = a^2 - e^2,$$

und damit bezüglich:

$h^2 = a^2 - e^2,\ a'^2 = e^2,\ b'^2 = e^2 - d^2$ oder $h^2 = a^2 - d^2,\ a'^2 = d^2,\ c'^2 = d^2 - e^2,$

so ergibt sich als Sonderfall von II:

III. *Ist* $P_0 = x_0, y_0, 0$ *oder* $P_0 = x_0, 0, z_0$ *ein Punkt der Fokalellipse, bezüglich Fokalhyperbel:*

(10) $\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad z = 0,$ (10′) $\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad y = 0$

der Fläche:

(11)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt $P_1 = x_1, y_1, 0$ *oder* $P_1 = x_1, 0, z_1$ *in der Ebene des Fokalkegelschnittes durch die Formeln:*

(12) $x_1 = \frac{a^2}{e^2} x_0, \quad y_1 = \frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2} y_0$ *oder* (12′) $x_1 = \frac{a^2}{d^2} x_0, \quad z_1 = \frac{a^2 - e^2}{d^2 - e^2} z_0$

zugeordnet, so ist identisch in x, y, z (§ 4, (27)):

(13)
$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\}$$
$$= \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2\} - \left\{\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y - y_1)^2\right\}.$$

(13′)
$$(a^2 - d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\}$$
$$= \{(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2\} - \left\{\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2\right\}.$$

4. Abhängigkeit des Punktes P_1 von P_0. Die Gleichungen des ersten und zweiten Hauptschnittes der Fläche (11) lauten:

$$(14)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}=1,\qquad (14')\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}=1.$$

Die Polare irgend eines Punktes x_1, y_1 oder x_1, z_1 in bezug auf diesen ist nach § 20, (6):

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{a^2-d^2}=1,\qquad \frac{x_1 x}{a^2}+\frac{z_1 z}{a^2-e^2}=1.$$

Die Polare des Punktes (12) oder (12′) wird folglich:

$$(15)\qquad \frac{x_0 x}{e^2}+\frac{y_0 y}{e^2-d^2}=1,\qquad (15')\qquad \frac{x_0 x}{d^2}+\frac{z_0 z}{d^2-e^2}=1.$$

Dies ist aber nach § 13, (3) die Tangente im Punkte x_0, y_0 der Fokalellipse (10) oder im Punkte x_0, z_0 der Fokalhyperbel (10′). Somit ergibt sich auch umgekehrt (§ 18, 4):

I. *Der Punkt P_1 in* (12) *oder* (12′) *ist der Pol der im Punkte $P_0 = x_0, y_0$ oder x_0, z_0 an die Fokalellipse* (Fig. 189) *oder Fokalhyperbel gelegten Tangente in bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt der Fläche.*

Der Fokalkegelschnitt und zugehörige Hauptschnitt sind nach § 55, 7 konfokal, der Ort der Pole einer Geraden aber in bezug auf ein System konfokaler Kegelschnitte ist nach § 32, **12** die Normale der Geraden in ihrem Berührungspunkt mit dem von ihr berührten Kegelschnitt des konfokalen Systems. Daraus folgt:

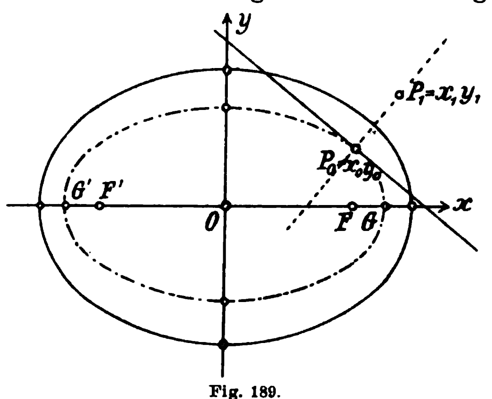


Fig. 189.

II. *Die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P_0 und P_1 steht in P_0 auf der Tangente der Fokalellipse* (Fig. 189), *beziehungsweise Fokalhyperbel senkrecht.*

5. Brennpunkt und Direktrix. Die im Punkte (12) auf der xy-Ebene oder die im Punkte (12′) auf der xz-Ebene errichtete Senkrechte mit den Gleichungen:

$$(16)\qquad x = x_1 = \frac{a^2}{e^2}x_0,\quad y = y_1 = \frac{a^2-d^2}{e^2-d^2}y_0,$$

$$(16')\qquad x = x_1 = \frac{a^2}{d^2}x_0,\quad z = z_1 = \frac{a^2-e^2}{d^2-e^2}z_0$$

heißt die *dem Brennpunkte $P_0 = x_0, y_0$ oder x_0, z_0* (§ 55, 6, 3. Absatz) *entsprechende Direktrix.*[14])

Die einem Punkte P_0 eines Fokalkegelschnittes entsprechende Direktrix ist die auf der Ebene des letzteren errichtete Senkrechte p_0 (Fig. 190), *deren Fußpunkt P_1 der Pol der Tangente des Fokalkegelschnittes in P_0 mit Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist.*

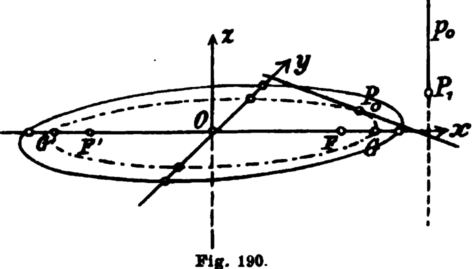


Fig. 190.

Zu den Scheitelpunkten:

(17) $G, G' = \pm e, 0, 0;$

$H, H' = 0, \pm\sqrt{e^2 - d^2}, 0;$

$F, F' = \pm d, 0, 0$

der Fokalellipse und Fokalhyperbel gehören nach (16); (16′) die Direktrizen:

$$(18)\quad x = \pm\frac{a^2}{e},\ y = 0;\qquad x = 0,\ y = \pm\frac{a^2 - d^2}{\sqrt{e^2 - d^2}};\qquad x = \pm\frac{a^2}{d},\ z = 0,$$

also die Direktrizen der drei *Hauptschnitte* $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ der Fläche (11) im Sinne von § 4, (24).

Da die Brennpunkte $x_0, y_0, 0$ und $x_0, 0, z_0$ den Gleichungen (10) und (10′) genügen, so erfüllen die Punkte der Geraden (16) und (16′) die Gleichungen:

$$(19)\quad \frac{e^2x^2}{a^4} + \frac{e^2 - d^2}{(a^2 - d^2)^2}y^2 = 1;\qquad (19')\quad \frac{d^2x^2}{a^4} + \frac{d^2 - e^2}{(a^2 - e^2)^2}z^2 = 1.$$

Der Ort der Direktrizen aller Punkte der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist der elliptische Zylinder (19) *oder der hyperbolische* (19′).

Die Strahlenkoordinaten p_{kl} der Tangente (15) oder (15′) sind (I § 48, (3)):

$$0,\ 0,\ 1,\ \frac{y_0}{e^2 - d^2},\ -\frac{x_0}{e^2},\ 0;\qquad 0,\ 1,\ 0,\ -\frac{z_0}{d^2 - e^2},\ 0,\ \frac{x_0}{d^2},$$

und die Strahlenkoordinaten p'_{kl} der Direktrix (16) oder (16′):

$$-\frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2}y_0,\ \frac{a^2}{e^2}x_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1;\qquad \frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}z_0,\ 0,\ \frac{a^2}{d^2}x_0,\ 0, -1,\ 0.$$

Sie entsprechen nach § 82, (10) den Beziehungen reziproker Polaren der Fläche (11):

$$\varrho p'_{23} = -\frac{p_{14}}{a^2},\qquad \varrho p'_{31} = -\frac{p_{24}}{a^2 - d^2},\qquad \varrho p'_{12} = -\frac{p_{34}}{a^2 - e^2},$$

$$\varrho p'_{14} = \frac{p_{23}}{(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)},\qquad \varrho p'_{24} = \frac{p_{31}}{a^2(a^2 - e^2)},\qquad \varrho p'_{34} = \frac{p_{12}}{a^2(a^2 - d^2)}.$$

Die Direktrix eines Punktes P_0 der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist die reziproke Polare der Tangente des Fokalkegelschnittes in ihm.

Da beide reziproken Polaren aufeinander senkrecht stehen, gehören sie nach § 85, 6; 8 dem *Achsenkomplex* der Fläche an.

6. Die Unterscheidung der Amiot-Mac Cullaghschen Fokaleigenschaften. Das erste Glied auf der rechten Seite der Identitäten (13) und (13') ist das Quadrat des Abstandes $r = \overline{PP_0}$ des laufenden Punktes $P = x, y, z$ von dem Brennpunkt $P_0 = x_0, y_0, 0$ oder $P_0 = x_0, 0, z_0$. Das zweite Glied dagegen ist nach § 126, 2; 5 bis auf einen konstanten Faktor m entweder das Quadrat des schrägen Abstandes s des Punktes P von der Direktrix p_0 oder das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von zwei durch p_0 gehenden Ebenen. Infolgedessen hat die Gleichung (11) eine der beiden Bedeutungen:

$$r^2 = m^2 s^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = m^2 r_1 r_2,$$

welche die *Mac Cullagsche* oder *Amiotsche Fokaleigenschaft* enthalten.

Welche von den beiden Bedeutungen zutrifft, hängt von den Vorzeichen der Koeffizienten in den zweiten Gliedern der rechten Seiten von (13) und (13') ab und ist daher für die verschiedenen Arten der Mittelpunktsflächen verschieden.

7. Das Ellipsoid. Unter der Voraussetzung:

$$a^2 > e^2 > d^2$$

folgt mit:

$$l^2 = \frac{e^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}; \quad l^2 - m^2 = \frac{d^2(a^2 - e^2)}{a^2(a^2 - d^2)}, \quad l^2 > m^2,$$

aus § 126, (10):

$$\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y - y_1)^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} s^2;$$

und mit:

$$l^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}; \quad l^2 + n^2 = \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)},$$

aus § 126, (30):

$$\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2 = \varepsilon \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)} r_1 r_2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') *die Identitäten* (§ 4, (28)):

$$(20) \quad \begin{cases} (a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = r^2 - \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} s^2, \\ (a^2 - d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = r^2 - \varepsilon \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)} r_1 r_2, \end{cases}$$

wo r den Abstand des laufenden Raumpunktes $P = x, y, z$ von einem festen Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der Fokalellipse, bezüglich $P_0 = x_0, 0, z_0$ der Fokalhyperbel; s den schrägen Abstand des Punktes P von der Direktrix des Punktes P_0, parallel den Ebenen (§ 126, (11)):

$$(21) \qquad d^2 \frac{x^2}{a^2} - (e^2 - d^2)\frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0$$

gemessen; und r_1, r_2 die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix gehenden Ebenen (§ 126, (29)):

$$(22) \qquad d^2\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - (e^2-d^2)\frac{(z-z_1)^2}{a^2-e^2} = 0$$

bedeuten.

Die Ebenen (21) sind nach § 58, (21') die Hauptkreisschnittebenen; die Ebenen (22) sind diesen parallel.

I. *Für jeden Punkt des Ellipsoides* (11) *mit* $a^2 > e^2 > d^2$ *ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte* P_0 *der Fokalellipse und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich* $\sqrt{e^2-d^2} : \sqrt{a^2-d^2}$, *also auch unabhängig von* P_0.

II. *Für jeden Punkt des Ellipsoides* (1) *ist das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der Fokalhyperbel und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich* $e^2(a^2-d^2) : a^2(a^2-e^2)$.

Der erste Satz enthält die *Mac Cullaghsche*, der zweite die *Amiotsche* Fokaleigenschaft.[16])

Wählt man als Punkt P_0 den Scheitelpunkt H oder H' der kleinen Achse der Fokalellipse in (17), so liegt die entsprechende Direktrix (18) in der yz-Ebene parallel der z-Achse. Für die Punkte P des Hauptschnittes:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 1$$

geht daher der den Hauptkreisschnittebenen, also der y-Achse parallele Abstand s in den *senkrechten* Abstand von der Direktrix über. *In dem Satze I ist also die Brennpunkt-Direktrixeigenschaft* § 4, 6 *des genannten Hauptschnittes unmittelbar enthalten.*

8. Das einschalige Hyperboloid. Unter der Voraussetzung:

$$e^2 > a^2 > d^2$$

folgt mit:

$$l^2 = \frac{e^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}; \qquad m^2 - l^2 = \frac{d^2(e^2-a^2)}{a^2(a^2-d^2)}, \quad m^2 > l^2,$$

aus § 126, (10):

$$\frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2 + \frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}(y-y_1)^2 = \frac{e^2}{a^2}s^2;$$

und mit:

$$l^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}; \qquad n^2 - l^2 = \frac{e^2(a^2-d^2)}{a^2(e^2-a^2)} > 0, \quad n^2 > l^2,$$

aus § 126, (14):

$$\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}(z-z_1)^2=\frac{d^2}{a^2}s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13′) die *Identitäten:*

$$(23)\quad\begin{cases}(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}-1\right\}=r^2-\frac{e^2}{a^2}s^2,\\(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}-1\right\}=r^2-\frac{d^2}{a^2}s^2,\end{cases}$$

wo r den Abstand des laufenden Punktes $P=x,y,z$ von einem festen Punkte $P_0=x_0,y_0,0$ der Fokalellipse, bezüglich $P_0=x_0,0,z_0$ der Fokalhyperbel, und s den schrägen Abstand des Punktes P von der Direktrix des Punktes P_0, parallel den Ebenen:

$$(24)\qquad d^2\frac{y^2}{a^2-d^2}-e^2\frac{z^2}{e^2-a^2}=0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (24) sind nach § 59, (21′) die Hauptkreisschnittebenen.

Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist daher das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der Fokalellipse oder Fokalhyperbel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich $e:a$ bezüglich $d:a$.

Beide Sätze enthalten die *Mac Cullaghsche* Fokaleigenschaft; die *Amiotsche* fehlt.

9. Das zweischalige Hyperboloid. Unter der Voraussetzung:

$$e^2>d^2>a^2$$

folgt mit:

$$l^2=\frac{e^2}{a^2},\ m^2=\frac{e^2-d^2}{d^2-a^2};\quad l^2+m^2=\frac{d^2(e^2-a^2)}{a^2(d^2-a^2)},$$

aus § 126, (25):

$$\frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2-\frac{e^2-d^2}{d^2-a^2}(y-y_1)^2=\varepsilon\frac{d^2(e^2-a^2)}{a^2(d^2-a^2)}r_1r_2;$$

und mit:

$$l^2=\frac{d^2}{a^2},\ n^2=\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2};\quad l^2-n^2=\frac{e^2(d^2-a^2)}{a^2(e^2-a^2)},\ l^2>n^2,$$

aus § 126, (14):

$$\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}(z-z_1)^2=\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13′) die *Identitäten:*

$$(25)\quad\begin{cases}(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{d^2-a^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}-1\right\}=r^2-\varepsilon\frac{d^2(e^2-a^2)}{a^2(d^2-a^2)}r_1r_2,\\(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{d^2-a^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}-1\right\}=r^2-\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}s^2,\end{cases}$$

wo r den Abstand des laufenden Punktes x, y, z von einem festen Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der Fokalellipse, bezüglich $P_0 = x_0, 0, z_0$ der Fokalhyperbel; r_1, r_2 die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix des Punktes P_0 gehenden Ebenen:

$$(26) \qquad e^2\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - (e^2 - d^2)\frac{(y-y_1)^2}{d^2 - a^2} = 0;$$

s den schrägen Abstand des Punktes P von der Direktrix des Punktes P_0, parallel den Ebenen:

$$(27) \qquad e^2\frac{x^2}{a^2} - (e^2 - d^2)\frac{y^2}{d^2 - a^2} = 0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (27) sind nach § 60, (21′) die Hauptkreisschnittebenen, die Ebenen (26) diesen parallel.

I. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist daher das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der Fokalellipse und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreischnittebenen konstant, gleich* $d^2(e^2 - a^2) : a^2(d^2 - a^2)$.

II. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der Fokalhyperbel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich* $\sqrt{e^2 - d^2} : \sqrt{e^2 - a^2}$.

Der erste Satz enthält die *Amiotsche*, der zweite die *Mac Cullaghsche* Fokaleigenschaft.

10. Ebene Schnitte durch Brennpunkt und Direktrix. Sei Π die durch den Brennpunkt P_0 und die Direktrix p_0 gelegte Ebene, die Normalebene im Punkte P_0 der Fokalkurve (Fig. 189), und S ein Punkt der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene Π.

Dann liegt die Entfernung r der Punkte S und P_0 in der Ebene Π; ebenso aber die schräge Entfernung s des Punktes S von der Direktrix p_0. Sie fällt in die Schnittlinie der Ebene Π mit einer durch S gelegten Kreisschnittebene. Daher sind die *schrägen* Entfernungen s aller Punkte S von p_0 untereinander parallel und somit den *senkrechten* Entfernungen s_0 von p_0 proportional. Ferner aber ist jede der beiden senkrechten Entfernungen r_1 und r_2 des Punktes S von den durch die Direktrix gehenden Ebenen proportional der in der Ebene Π liegenden senkrechten Entfernung s_0 von der Direktrix selbst, also das Produkt $r_1 r_2$ proportional s_0^2.

Die Schnittkurve ist folglich der Ort eines Punktes S, für den

das Verhältnis der Entfernung r von P_0 und der senkrechten Entfernung s_0 von p_0 konstant ist. Es folgt daher nach § 4, 5:[185])

Ist P_0 für das Ellipsoid oder das ein- oder zweischalige Hyperboloid ein Punkt der Fokalellipse oder Fokalhyperbel, so schneidet die in P_0 errichtete Normalebene der Fokalkurve die Fläche in einem Kegelschnitt, für den P_0 ein Brennpunkt ist.

11. Allgemeine Grundlage der Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaft. Setzt man den in der Identität (13) oder (13′) in der zweiten Klammer rechts stehenden Ausdruck gleich Null, also:

$$(28)\quad \frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}(y-y_1)^2=0,\quad \frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{d^2-e^2}{a^2-e^2}(z-z_1)^2=0,$$

so erhält man beidemal die Gleichung eines reellen oder imaginären Ebenenpaares, dessen Achse die dem Brennpunkte P_0 entsprechende Direktrix (16) oder (16′) ist und dessen Ebenen *die dem Brennpunkte P_0 entsprechenden Direktrixebenen* heißen.[14])

Die Identitäten (13) und (13′) sind demnach von der allgemeinen Form:[21])

$$(29)\qquad f=k-UV,$$

wo $f=0$ die Fläche selbst, $k=0$ ein Kugelkegel (§ 69, (19)) mit dem Scheitel-(Mittel-)Punkt P_0 und $U=0$, $V=0$ die Direktrixebenen sind. Mit Rücksicht auf 6 folgt daher:

I. *Je nachdem die dem Brennpunkte P_0 entsprechenden Direktrixebenen imaginär oder reell sind, gilt als Deutung der Identität* (29) *die Mac Cullaghsche oder Amiotsche Fokaleigenschaft.*

Infolge von (29) liegt ferner die Schnittkurve der Fläche $f=0$ mit der Ebene $U=0$ oder $V=0$ auf dem Kugelkegel $k=0$ und ist daher ein Kreis, also mit Rücksicht auf (28):

II. *Die einem Brennpunkte der Fläche zweiter Ordnung entsprechenden Direktrixebenen sind stets zwei derselben Hauptachse parallele Kreisschnittebenen.*

In der Tat sind die Ebenenpaare (28), sowie auch ein drittes, einem Punkte P_0 der imaginären Fokalellipse § 120, 9 entsprechendes, den in § 117, (17) dargestellten drei Ebenenpaaren, mit $b^2=a^2-d^2$, $c^2=a^2-e^2$ parallel.

Infolge von (29) liegen endlich die beiden Kreise K_1 und K_2, in der der Kugelkegel $k=0$ von dem Ebenenpaar $UV=0$ geschnitten wird, auf der Fläche $f=0$. Die beiden Flächen $f=0$ und $k=0$ *berühren sich* daher *in jedem ihrer beiden gemeinsamen Schnittpunkte mit der Direktrix*, da sie hier die Tangenten der beiden Kreise K_1

und K_2 ebenfalls als Tangenten und damit auch die Tangentialebene (§ 67, **4**) gemein haben. Es folgt also:[144])

III. *Jeder Brennpunkt P_0 der Fläche zweiter Ordnung (Punkt der drei Fokalkurven* § 120, **9**) *ist der Scheitelpunkt eines Kugelkegels, der die Fläche in ihren Schnittpunkten mit der entsprechenden Direktrix p_0 doppelt berührt.*

Dieser Satz entspricht dem nach § 13, 8, II und § 20, **3** (zweitem Absatz) geltenden:[2])

IV. *Jeder Brennpunkt eines Kegelschnittes ist der Scheitelpunkt eines Kreisstrahlenpaares, das den Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der entsprechenden Direktrix doppelt berührt.*

12. Anwendung auf ebene Schnitte. Wenn die beiden Flächen $f = 0$ und $k = 0$ sich in den Schnittpunkten mit der Direktrix p_0 berühren, so gilt dies auch von ihren Schnittkurven mit einer durch die Direktrix gehenden Ebene. Der Kugelkegel $k = 0$ wird aber von einer Ebene durch seinen Scheitelpunkt P_0 in einem Kreisstrahlenpaare geschnitten (§ 69, **9**; § 12, **8**). Legt man daher eine Ebene Π durch P_0 und p_0, so schneidet sie die Fläche $f = 0$ in einem Kegelschnitt, für den P_0 der Scheitel eines Kreisstrahlenpaares ist, das den Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit p_0 doppelt berührt. Daher muß P_0 ein Brennpunkt des Kegelschnittes sein. Damit ist wieder der Satz unter **10** aus einem allgemeineren Gesichtspunkt gewonnen.

Um diesen Gedankengang in Formeln zu verwirklichen, transformiert man die aus der Identität (13) folgende Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

$$(30)\quad \{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\}-\left\{\frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}(y-y_1)^2\right\}=0$$

durch die Substitution:

$$(31)\qquad x = x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta,\quad y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta,\quad z = \zeta$$

auf ein neues rechtwinkliges System $P_0\xi\eta\zeta$, dessen ξ-Achse mit:

$$(32)\qquad \alpha_1 = \frac{q x_0}{e^2},\quad \beta_1 = \frac{q y_0}{e^2-d^2};\quad \frac{1}{q^2} = \frac{x_0^2}{e^4} + \frac{y_0^2}{(e^2-d^2)^2}$$

die Normale und dessen $\zeta\xi$-Ebene die Normalebene Π der Fokalellipse (10) im Punkte P_0 ist. Setzt man in der so transformierten Gleichung (30) alsdann $\eta = 0$, so erhält man als Gleichung der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene Π:

$$(33)\qquad (\xi^2+\zeta^2)-\left(\frac{x_0^2}{a^2e^2}+\frac{y_0^2}{(a^2-d^2)(e^2-d^2)}\right)q^2\left(\xi-\frac{a^2-e^2}{q}\right)^2=0.$$

Sie ist also nach § 4, (11) in der Tat ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkt P_0. Das zweite Glied in (33) *muß* hierbei ein vollstän-

diges Quadrat eines in ξ linearen Ausdruckes werden, weil es, für sich gleich Null gesetzt, das Schnittlinienpaar der Ebene $\eta = 0$ mit dem Direktrixebenenpaar darstellt und dieses, da die Ebene $\eta = 0$ durch die Direktrix geht, eine *Doppellinie* wird.[185])

§ 128. Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaft der Paraboloide.

1. Eine auf zwei konfokale Paraboloide bezügliche Identität. Die beiden Flächen:

$$(1)\qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 = 0 \qquad (b^2 > c^2),$$

$$(2)\qquad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} + 2x - b'^2 = 0 \qquad (b'^2 > c'^2)$$

sollen konfokal (und konfokal liegend) sein, so daß (§ 56, **10**):

$$(3)\qquad b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2,$$

wo h^2 den gemeinsamen Wert der beiden Differenzen bezeichnet.

Sind nun x, y, z und x_0, y_0, z_0 irgend zwei Punkte des Raumes, so ist:

$$h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2\right)\right\}$$
$$= 2h^2(x - x_0) - h^4 + (b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2}\right) + (c^2 - c'^2)\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c'^2}\right).$$

Da aber:

$$(b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2}\right) = (y - y_0)^2 - \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0\right)^2,$$

so folgt:

I. *Sind die beiden Flächen* (1) *und* (2) *konfokal und bezeichnet* h *den gemeinsamen Wert der beiden Differenzen* (3), *so besteht identisch in* x, y, z *und* x_0, y_0, z_0 *die Gleichung:*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2\right)\right\} \\ &= \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\} \\ &- \left\{(x - x_0 - h^2)^2 + \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0\right)^2 + \left(\frac{c'}{c}z - \frac{c}{c'}z_0\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Über die Änderung der Formel beim Übergang von c oder c' in ic oder ic' gilt dasselbe, wie § 127, **1**.

2. Die Identität des Amiot-Mac Cullaghschen Satzes. Ordnet man dem Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ durch die Beziehung:

$$(5)\qquad x_1 = x_0 + h^2, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y_0}{b'^2}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z_0}{c'^2}$$

einen Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1$ als entsprechenden Punkt zu, so nimmt (4) die Form an:

$$h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right)-\left(\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}+2x_0-b'^2\right)\right\}$$

$$(6)\qquad =\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}$$

$$-\left\{(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}.$$

Ist endlich $P_0=x_0, y_0, z_0$ ein Punkt des Hauptschnittes:

(7) $\frac{y^2}{b'^2}+2x-b'^2=0,\ z=0$ oder (7′) $\frac{z^2}{c'^2}+2x-b'^2=0,\ y=0,$

des Paraboloides (2), so ergibt sich:

II. *Ist $P_0=x_0, y_0, 0$ oder $P_0=x_0, 0, z_0$ ein Punkt des Hauptschnittes $z=0$ oder $y=0$ des Paraboloides (2) und wird ein entsprechender Punkt $P_1=x_1, y_1, 0$ oder $P_1=x_1, 0, z_1$ der Hauptebene definiert durch:*

(8) $x_1=x_0+h^2,\ y_1=\frac{b^2}{b'^2}y_0,$ (8′) $x_1=x_0+h^2,\ z_1=\frac{c^2}{c'^2}z_0,$

so ist identisch in x, y, z:

$$(9)\qquad h^2\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right)$$

$$=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\}-\left\{(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}z^2\right\},$$

$$(9')\qquad h^2\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right)$$

$$=\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\}-\left\{(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}y^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}.$$

3. Ausartung des zweiten Paraboloides. Mit $c'^2=0$ oder $b'^2=0$ (§ 123, **3**) wird nach (3):

$$h^2=c^2,\ b'^2=b^2-c^2 \qquad \text{oder:} \qquad h^2=b^2,\ c'^2=c^2-b^2,$$

und die Hauptschnitte (7), (7′) gehen in die linke oder rechte Fokalparabel (§ 56, (7)) des Paraboloides (1):

$$\frac{y^2}{b^2-c^2}+2x-(b^2-c^2)=0,\ z=0 \qquad \frac{z^2}{c^2-b^2}+2x=0,\ y=0$$

über. Setzt man alsdann noch:

$$b^2=p,\ c^2=p-e$$

und daher bezüglich:

$$h^2=p-e,\ b'^2=e \qquad \text{oder} \qquad h^2=p,\ c'^2=-e,$$

so ergibt sich als Sonderfall von II:

III. *Ist $P_0=x_0, y_0, 0$ oder $P_0=x_0, 0, z_0$ ein Punkt der linken, bezüglich rechten Fokalparabel:*

(10) $\frac{y^2}{e}+2x-e=0,\ z=0,$ (10′) $-\frac{z^2}{e}+2x=0,\ y=0$

des Paraboloides:

(11) $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt $P_1 = x_1, y_1, 0$ *oder* $P_1 = x_1, 0, z_1$ *in der Ebene der Fokalparabel durch die Formeln:*

(12) $x_1 = x_0 + p - e,\ y_1 = \frac{p}{e} y_0$ *oder* (12′) $x_1 = x_0 + p,\ z_1 = -\frac{p-e}{e} z_0$

zugeordnet, so ist identisch in x, y, z:

(13) $$(p-e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\}$$
$$= \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2\} - \left\{(x-x_1)^2 + \frac{e}{p}(y-y_1)^2\right\},$$

(13′) $$p\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\}$$
$$= \{(x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2\} - \left\{(x-x_1)^2 - \frac{e}{p-e}(z-z_1)^2\right\}.$$

4. Abhängigkeit des Punktes P_1 vom Punkte P_0. Die Gleichung des Hauptschnittes des Paraboloides (11) in der Ebene $z = 0$ oder $y = 0$ lautet:

(14) $$\frac{y^2}{p} + 2x - p = 0,$$ (14′) $$\frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0.$$

Die Polare irgend eines Punktes x_1, y_1 oder x_1, z_1 in bezug auf diesen ist nach § 20, (41):

$$\frac{y_1 y}{p} + x + x_1 - p = 0, \qquad \frac{z_1 z}{p-e} + x + x_1 - p = 0.$$

Die Polare des Punktes (12) oder (12′) wird folglich:

(15) $$\frac{y_0 y}{e} + x + x_0 - e = 0,$$ (15′) $$-\frac{z_0 z}{e} + x + x_0 = 0.$$

Dies ist aber nach § 13, (35) die Tangente im Punkte x_0, y_0 der linken Fokalparabel (10) oder im Punkte x_0, z_0 der rechten Fokalparabel (10′). Somit folgt auch umgekehrt (§ 18, 4):

I. *Der Punkt P_1 in (12) oder (12′) ist der Pol der im Punkte $P_0 = x_0, y_0$ oder $P_0 = x_0, z_0$ an die linke oder rechte Fokalparabel gelegten Tangente in bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt der Fläche.*

Mit Rücksicht auf § 56, 7 und § 34, 11 folgt ebenso, wie in § 127, 4:

II. *Die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P_0 und P_1 steht in P_0 auf der Tangente der Fokalparabel senkrecht.*

5. Brennpunkt und Direktrix. Die im Punkte (12) auf der xy-Ebene oder die im Punkte (12′) auf der xz-Ebene errichtete Senkrechte mit den Gleichungen:

(16) $x = x_0 + p - e,\ y = \frac{p}{e} y_0$ oder (16') $x = x_0 + p,\ z = -\frac{p-e}{e} z_0$

heißt die *dem Brennpunkte* $P_0 = x_0, y_0, 0$ *oder* $P_0 = x_0, 0, z_0$ *entsprechende Direktrix.*[14])

Die einem Punkte P_0 einer Fokalparabel entsprechende Direktrix ist die auf der Ebene der letzteren errichtete Senkrechte p_0, deren Fußpunkt P_1 der Pol der Tangente der Fokalparabel in P_0 mit Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist.

Zu den Scheitelpunkten:

$$(17) \qquad G = \frac{e}{2}, 0, 0; \qquad F = 0, 0, 0$$

der linken und rechten Fokalparabel gehören nach (16), (16') die Direktrizen:

$$(18) \qquad x = p - \frac{e}{2},\ y = 0; \qquad x = p,\ z = 0,$$

also die Direktrizen der Hauptschnittparabeln (14') und (14) im Sinne von § 2, (20).

Da x_0, y_0, bezüglich x_0, z_0 den Gleichungen (10) und (10') genügen, so erfüllen die Punkte der Geraden (16) und (16') die Gleichungen:

$$(19) \quad \frac{ey^2}{p^2} + 2(x-p) + e = 0; \qquad (19') \quad \frac{ez^2}{(e-p)^2} - 2(x-p) = 0.$$

Der Ort der Direktrizen aller Punkte einer Fokalparabel ist ein parabolischer Zylinder, der zur Ebene der Fokalparabel senkrecht steht.

Die Strahlenkoordinaten p_{kl} der Tangente (15) oder (15') sind:

$$0, 0, e - x_0, \frac{y_0}{e}, -1, 0; \qquad 0, -x_0, 0, \frac{z_0}{e}, 0, 1$$

und die Strahlenkoordinaten p'_{kn} der Direktrizen (16) oder (16'):

$$-\frac{py_0}{e}, x_0 + p - e, 0, 0, 0, 1; \qquad \frac{p-e}{e} z_0, 0, x_0 + p, 0, -1, 0.$$

Sie entsprechen nach § 83, (9) den Beziehungen reziproker Polaren des Paraboloides (11):

$$\varrho p'_{23} = -p_{14}, \quad \varrho p'_{31} = -\frac{p_{12}}{p} - p_{24}, \quad \varrho p'_{12} = \frac{p_{31}}{p-e} - p\frac{p_{34}}{p-e},$$

$$\varrho p'_{14} = \frac{p_{23}}{p(p-e)}, \quad \varrho p'_{24} = \frac{p_{34}}{p-e}, \quad \varrho p'_{34} = -\frac{p_{24}}{p}.$$

Die Direktrix eines Punktes P_0 einer Fokalparabel ist die reziproke Polare der Tangente der Fokalparabel in ihm.

6. Das (linke) elliptische Paraboloid. Unter der Voraussetzung:

$$\infty > p > e$$

folgt mit:

$$l^2 = 1, \quad m^2 = \frac{e}{p}, \qquad l^2 - m^2 = \frac{p-e}{p}, \quad l^2 > m^2,$$

aus § 126, (10):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{p}(y - y_1)^2 = \frac{e}{p} s^2$$

und mit:

$$l^2 = 1, \quad n^2 = \frac{e}{p-e}; \qquad l^2 + n^2 = \frac{p}{p-e},$$

aus § 126, (30):

$$(x - x_1)^2 - \frac{e}{p-e}(z - z_1)^2 = \varepsilon \frac{p}{p-e} r_1 r_2 .$$

Daher gelten nach (13) und (13′) die *Identitäten:*

$$(20) \qquad \begin{cases} (p-e)\left\{\dfrac{y^2}{p} + \dfrac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = r^2 - \dfrac{e}{p} s^2, \\ p\left\{\dfrac{y^2}{p} + \dfrac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = r^2 - \dfrac{p}{p-e} r_1 r_2, \end{cases}$$

wo r den Abstand des laufenden Punktes $P = x, y, z$ von einem festen Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der linken, bezüglich $P_0 = x_0, 0, z_0$ der rechten Fokalparabel; s den schrägen Abstand des Punktes P von der Direktrix des Punktes P_0, parallel den Ebenen:

$$(21) \qquad (p-e)x^2 - ez^2 = 0$$

gemessen, und r_1, r_2 die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix gehenden Ebenen:

$$(22) \qquad (p-e)(x - x_1)^2 - e(z - z_1)^2 = 0.$$

bedeuten.

Die Ebenen (21) sind nach § 61, (15) die Hauptkreisschnittebenen, die Ebenen (22) sind diesen parallel.

I. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der inneren Fokalparabel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich* $\sqrt{e} : \sqrt{p}$.

II. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der äußern Fokalparabel und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich* $p : p - e$.

Der erste Satz enthält die *Mac Cullaghsche*, der zweite die *Amiotsche* Fokaleigenschaft.[16]) Die Voraussetzung:

$$0 > p > -\infty,$$

die dem rechten elliptischen Paraboloid entspricht, gibt dieselben Sätze wieder.

7. Das hyperbolische Paraboloid. Unter der Voraussetzung:

$$e > p > 0$$

folgt mit:

$$l^2 = 1, \quad m^2 = \frac{e}{p}; \qquad m^2 - l^2 = \frac{e-p}{p}, \quad m^2 > l^2,$$

aus § 126, (10):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{p}(y - y_1)^2 = s^2$$

und mit:

$$l^2 = 1, \quad n^2 = \frac{e}{e-p}; \qquad n^2 - l^2 = \frac{p}{e-p}, \quad n^2 > l^2,$$

aus § 126, (14):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{e-p}(z - z_1)^2 = s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die *Identitäten*:

$$(23) \quad \begin{cases} (p - e)\left\{\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} + 2x - p\right\} = r^2 - s^2, \\ p\left\{\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} + 2x - p\right\} = r^2 - s^2, \end{cases}$$

wo r den Abstand des laufenden Punktes $P = x, y, z$ von einem festen Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der linken, bezüglich $P_0 = x_0, 0, z_0$ der rechten Fokalparabel und s den schrägen Abstand des Punktes P von der Direktrix des Punktes P_0, parallel den Ebenen:

$$(24) \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} = 0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (24) sind nach § 62, (13) die durch den Scheitelpunkt gehenden Ebenen der geradlinigen Schnitte, die Asymptotenebenen (§ 62, 3).

Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids ist daher der Abstand von einem Brennpunkt gleich dem schrägen, parallel den Ebenen der geradlinigen Schnitte gemessenen Abstand von der zugehörigen Direktrix.

Es ist die *Mac Cullagh*sche Fokaleigenschaft der Fläche.

Wählt man als Punkt P_0 den Scheitelpunkt der rechten Fokalparabel F in (17), so liegt die entsprechende Direktrix (18) in der xy-Ebene, parallel der y-Achse. Für die Punkte P des Hauptschnittes $z = 0$ liegt dann $r = FP$ auch in der Ebene $z = 0$ und geht der *schräge* Abstand s, da er dem Ebenenpaar (24) parallel sein soll, der x-Achse parallel werdend, in den *senkrechten* Abstand über. *In dem Mac Cullaghschen Satze ist daher die Fokaleigenschaft der Parabel* § 2, (7) *enthalten.*

8. Ebene Schnitte durch Brennpunkt und Direktrix. Wie in § 127, **10; 12** ergibt sich:[185])

Ist P_0 für das elliptische oder für das hyperbolische Paraboloid ein Punkt einer der beiden Fokalparabeln, so schneidet die in P_0 errichtete Normalebene der Fokalparabel die Fläche in einem Kegelschnitt, für den P_0 ein Brennpunkt ist.

9. Brennstrahl-Direktrixebenen-Eigenschaft des Kegels. Für den *elliptischen Kegel:*

(25) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 0, \quad e^2 > a^2 > d^2,$$

haben die beiden *Brennlinien* nach § 54, (11) die Gleichungen:

(26) $$x : y : z = \frac{d}{e} : 0 : \frac{\varepsilon\sqrt{e^2-d^2}}{e}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Ihre Polarebenen, welche die *Direktrixebenen*[14]) des Kegels heißen mögen, sind nach § 84, (3) oder (7) in der Hesseschen Normalform:

(27) $$\frac{d(a^2-e^2)x + \varepsilon a^2\sqrt{e^2-d^2}\,z}{e\sqrt{a^2(a^2-d^2)+(e^2-a^2)d^2}} = 0.$$

Das Quadrat des Abstandes ϱ eines beliebigen Raumpunktes $P = x, y, z$ vom Brennstrahl (26) ist (I § 43, (20)):

(28) $$\varrho^2 = \frac{e^2-d^2}{e^2}y^2 + \left(\frac{\varepsilon\sqrt{e^2-d^2}}{e}x - \frac{d}{e}z\right)^2 + \frac{d^2}{e^2}y^2,$$

und das Quadrat des Abstandes δ von der zugehörigen Direktrixebene:

(29) $$\delta^2 = \frac{\left\{d(a^2-e^2)x + \varepsilon a^2\sqrt{e^2-d^2}\,z\right\}^2}{e^2\left\{a^2(a^2-d^2)+(e^2-a^2)d^2\right\}}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

(30) $$\varkappa^2 = \frac{a^2(a^2-d^2)+(e^2-a^2)d^2}{a^2(e^2-a^2)},$$

so wird:

$$\varrho^2 - \varkappa^2\delta^2 = \left\{y^2 + \frac{e^2-d^2}{e^2}x^2 + \frac{d^2}{e^2}z^2\right\} - \left\{\frac{(e^2-a^2)d^2}{a^2e^2}x^2 + \frac{a^2(e^2-d^2)}{e^2(e^2-a^2)}z^2\right\}.$$

Daher besteht identisch in x, y, z die Gleichung:[21])

(31) $$(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2}\right\} = \varrho^2 - \varkappa^2\delta^2$$

oder mit der Bezeichnung § 53, (13):

(32) $$b^2\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\} = \varrho^2 - \varkappa^2\delta^2, \quad a^2 > b^2,$$

wo nunmehr:

(33) $$\varkappa^2 = \frac{a^2b^2 + (a^2-b^2)e^2}{a^2c^2}.$$

Der elliptische Kegel ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von dem Brennstrahl und der zugehörigen Leitebene das konstante Verhältnis $\varkappa$ haben.[16])

Für den Kegel $a^2 = c^2$ in § 54, 8 wird nach (33) $\varkappa^2 = 1$.

§ 129. Das Ivorysche Theorem und die Jacobischen Fokaleigenschaften.

1. Die Identität des Ivoryschen Theorems für die Mittelpunktsflächen. Wenn die beiden Mittelpunktsflächen:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ (2) $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$

konfokal sind und:

(3) $$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2$$

gesetzt wird, so besteht nach § 127, (4) *identisch in* x, y, z *und* x_0', y_0', z_0' die Gleichung:

(4) $$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} - 1\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2\}$$
$$- \left\{\left(\frac{a'}{a}x - \frac{a}{a'}x_0'\right)^2 + \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0'\right)^2 + \left(\frac{c'}{c}z - \frac{c}{c'}z_0'\right)^2\right\}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die beiden Flächen (1) und (2) *gleichartige*, also beide Ellipsoide oder, mit Umkehr der Vorzeichen von c^2 und c'^2, beide einschalige Hyperboloide oder, mit Umkehr der Vorzeichen von b^2, c^2 und b'^2, c'^2, beide zweischalige Hyperboloide seien.

Wir nehmen nun zwischen den Punkten des Raumes die *affine Verwandtschaft:*

(5) $$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}$$

an, vermöge welcher jedem reellen Punkte $P = x, y, z$ ein reeller $P' = x', y', z'$ entspricht, da auch bei Umkehr der Vorzeichen von b^2 und b'^2 oder c^2 und c'^2 die Formeln (5) reell bleiben.

Hiernach kann aber der Inhalt der Gleichung (4) in folgender Weise gefaßt werden:

I. *Sind* $P = x, y, z$, $P' = x', y', z'$ *und* $P_0 = x_0, y_0, z_0$, $P_0' = x_0', y_0', z_0'$ *zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität* (5), *so besteht identisch in* x, y, z *und* x_0', y_0', z_0' *die Gleichung:*

(6) $$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} - 1\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2\} - \{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2\}.$$

2. Das Ivorysche Theorem für die Mittelpunktsflächen. Für zwei entsprechende Punkte P und P' folgt aus (5):

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1.$$

Liegt daher P auf der Fläche (1), so liegt P' auf der Fläche (2) und umgekehrt.

II. *Vermöge der Affinität* (5) *entspricht jedem Punkte der einen der beiden Flächen* (1) *und* (2) *ein Punkt der andern.*

Ist nun $P = x, y, z$ irgendein Punkt der Fläche (1) und $P_0' = x_0', y_0', z_0'$ irgendein Punkt der Fläche (2), so daß auf der linken Seite von (6) die beiden runden Klammern verschwinden, so bleibt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 0 = &\{(x-x_0')^2+(y-y_0')^2+(z-z_0')^2\}\\ &-\{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2\}\end{aligned}$$

oder:

$$(9)\qquad \overline{PP_0'} = \overline{P'P_0}.$$

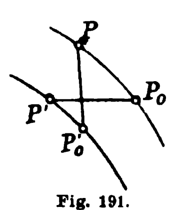


Fig. 191.

III. *Die Entfernung irgend zweier Punkte P und P_0' der beiden gleichartigen konfokalen Mittelpunktsflächen* (1) *und* (2) *ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte P' und P_0 der jedesmal andern Fläche* (Fig. 191).[104])

3. Die Identität des Ivoryschen Theorems für die Paraboloide. Wenn die beiden Paraboloide:

$$(10)\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2=0,\qquad (11)\quad \frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}+2x-b'^2=0$$

konfokal sind und:

$$(12)\qquad b^2-b'^2=c^2-c'^2=h^2$$

gesetzt wird, so besteht nach § 128, (4) identisch in x, y, z und x_0', y_0', z_0' die Gleichung:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right)-\left(\frac{y_0'^2}{b'^2}+\frac{z_0'^2}{c'^2}+2x_0'-b'^2\right)\right\}\\ &=\{(x-x_0')^2+(y-y_0')^2+(z-z_0')^2\}\\ &-\left\{(x-x_0'-h^2)^2+\left(\frac{b'}{b}y-\frac{b}{b'}y_0'\right)^2+\left(\frac{c'}{c}z-\frac{c}{c'}z_0'\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Wir setzen voraus, daß die beiden Paraboloide (10) und (11) *gleichartige*, also beide linke elliptische, beide hyperbolische oder beide rechte elliptische sind.

Wir nehmen alsdann zwischen den Punkten des Raumes die *affine Verwandtschaft:*

(14) $$x = x' + \frac{h^2}{2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}$$

an, vermöge welcher jedem reellen Punkte $P = x, y, z$ ein reeller Punkt $P' = x', y', z'$ entspricht.

Hiermit aber ergibt sich aus (13):

I'. *Sind* $P = x, y, z$, $P' = x', y', z'$ *und* $P_0 = x_0, y_0, z_0$, $P_0' = x_0', y_0', z_0'$ *zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität* (14), *so besteht identisch in* x, y, z *und* x', y', z' *die Gleichung:*

(15) $$h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} + 2x_0' - b'^2\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2\} - \{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2\}.$$

4. Das Ivorysche Theorem für die Paraboloide. Für zwei entsprechende Punkte P und P' folgt aus (14) und (12):

(16) $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 = \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} + 2x' - b'^2.$$

Liegt daher P auf (10), so liegt P' auf (11) und umgekehrt.

II'. *Vermöge der Affinität* (14) *entspricht jedem Punkte der einen der beiden Flächen* (10) *und* (11) *ein Punkt der andern.*

Ist nun $P = x, y, z$ irgendein Punkt des Paraboloides (10) und $P_0' = x_0', y_0', z_0'$ irgendein Punkt des Paraboloides (11), so daß auf der linken Seite von (15) die beiden runden Klammern verschwinden, so bleibt die Gleichung (8) oder die gleichbedeutende (9).

III'. *Die Entfernung irgend zweier Punkte* P *und* P_0' *der beiden gleichartigen konfokalen Paraboloide* (10) *und* (11) *ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte* P' *und* P_0 *der jedesmal andern Fläche.*

5. Feste Längen auf den Erzeugenden beim einschaligen Hyperboloid. Wir denken uns in (1) und (2) c^2 und c'^2 negativ, so daß wir zwei konfokale *einschalige Hyperboloide* vor uns haben. Zwei Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ einer Erzeugenden der Fläche (1) sind nach § 82, (14); (15) durch die Gleichung verbunden:

(17) $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1.$$

Sind nun $P_1' = x_1', y_1', z_1'$ und $P_2' = x_2', y_2', z_2'$ die nach 2, II entsprechenden Punkte der Fläche (2), so geht nach (5) aus (17) hervor:

(18) $$\frac{x_1'^2}{a'^2} + \frac{y_1'^2}{b'^2} + \frac{z_1'^2}{c'^2} = 1, \quad \frac{x_1' x_2'}{a'^2} + \frac{y_1' y_2'}{b'^2} + \frac{z_1' z_2'}{c'^2} = 1, \quad \frac{x_2'^2}{a'^2} + \frac{y_2'^2}{b'^2} + \frac{z_2'^2}{c'^2} = 1,$$

also:

IV. *Zwei Punkten* P_1, P_2 *einer Erzeugenden der einen Fläche* (1) *entsprechen stets zwei Punkte* P_1', P_2' *einer Erzeugenden der andern Fläche* (2).

Multipliziert man nun die aus (17) folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}-\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}-\frac{z_2}{c}\right)^2=0$$

mit h^2, so folgt mit Rücksicht auf (3):

$$(a^2-a'^2)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{a}\right)^2+(b^2-b'^2)\left(\frac{y_1}{b}-\frac{y_2}{b}\right)^2+(c^2-c'^2)\left(\frac{z_1}{c}-\frac{z_2}{c}\right)^2=0$$

oder:

$$a^2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{a}\right)^2+b^2\left(\frac{y_1}{b}-\frac{y_2}{b}\right)^2+c^2\left(\frac{z_1}{c}-\frac{z_2}{c}\right)^2$$
$$=a'^2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{a}\right)^2+b'^2\left(\frac{y_1}{b}-\frac{y_2}{b}\right)^2+c'^2\left(\frac{z_1}{c}-\frac{z_2}{c}\right)^2$$

oder endlich, wenn man rechts nach (5) die Koordinaten von P_1', P_2' einführt und mit $a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2$ kürzt:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_1')^2,$$

also:

(19) $$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1'P_2'}.$$

V. *Die Länge einer Strecke P_1P_2 auf einer Erzeugenden der einen von zwei konfokalen Hyperboloiden ist gleich der Länge der entsprechenden Strecke $P_1'P_2'$ auf einer Erzeugenden der andern* (§ 63, **11**; **12**).

VI. *Jedes aus Erzeugenden gebildete Vierseit des einen Hyperboloides überträgt sich mit unveränderten Seitenlängen auf das andere, also überhaupt auf jedes konfokale Hyperboloid.*[160])

6. Feste Längen auf den Erzeugenden beim hyperbolischen Paraboloid. Wir denken uns in (10) und (11) c^2 und c'^2 negativ, so daß wir zwei konfokale *hyperbolische Paraboloide* vor uns haben. Zwei Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ einer Erzeugenden der Fläche (10) sind nach § 83, (13); (14) durch die Gleichungen verbunden:

(20) $$\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}+2x_1-b^2=0,\quad \frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}+x_1+x_2-b^2=0,$$
$$\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}+2x_2-b^2=0.$$

Sind nun $P_1' = x_1', y_1', z_1'$ und $P_2' = x_2', y_2', z_2'$ die nach **4**, II′ entsprechenden Punkte der Fläche (11), so geht nach (14) aus (20) hervor:

(21) $$\frac{y_1'^2}{b'^2}+\frac{z_1'^2}{c'^2}+2x_1'-b'^2=0,\quad \frac{y_1'y_2'}{b'^2}+\frac{z_1'z_2'}{c'^2}+x_1'+x_2'-b'^2=0,$$
$$\frac{y_2'^2}{b'^2}+\frac{z_2'^2}{c'^2}+2x_2'-b'^2=0,$$

so daß *Satz* **5**, IV *auch für das hyperbolische Paraboloid gilt.*

Multipliziert man nun die aus (20) folgende Gleichung:

$$\left(\frac{y_1}{b}-\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}-\frac{z_2}{c}\right)^2=0$$

mit h^2, so geht mit Rücksicht auf (12) hervor:

$$(b^2 - b'^2)\left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + (c^2 - c'^2)\left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 = 0$$

oder:

$$(x_1 - x_2)^2 + b^2\left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + c^2\left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + b'^2\left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + c'^2\left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2$$

oder endlich, wenn man rechts nach (14) die Koordinaten von P_1', P_2' einführt:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2,$$

also die Beziehung (19).

Die Sätze 5, V *und* VI *gelten also auch für das hyperbolische Paraboloid* (§ 65, **14**).

7. Lage entsprechender Punkte bei den Ellipsoiden und Hyperboloiden. Geht man für die Flächen (1) und (2) zur Bezeichnung von § 120, (1) über und setzt unter Annahme zweier Ellipsoide:

(22) $a^2 = \alpha - \lambda,\ b^2 = \beta - \lambda,\ c^2 = \gamma - \lambda;\ a'^2 = \alpha - \lambda',\ b'^2 = \beta - \lambda',\ c'^2 = \gamma - \lambda',$

so lauten die quadrierten Gleichungen (5) in den elliptischen Koordinaten λ, μ, ν und λ', μ', ν' der beiden Punkte P und P' nach § 120, (13):

$$(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) = (\alpha - \mu')(\alpha - \nu'),\quad (\beta - \mu)(\beta - \nu) = (\beta - \mu')(\beta - \nu'),$$
$$(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) = (\gamma - \mu')(\gamma - \nu'),$$

woraus $\mu + \nu = \mu' + \nu'$, $\mu\nu = \mu'\nu'$ und mit Rücksicht auf die Ungleichungen § 120, (8); (9): $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$ folgt.

Entsprechende Punkte zweier konfokaler Ellipsoide λ und λ' haben gleiche elliptische Koordinaten μ und ν; oder

Entsprechende Punkte zweier konfokaler Ellipsoide werden von den Schnittkurven der konfokalen ein- und zweischaligen Hyperboloide ausgeschnitten, den orthogonalen Trajektorien der konfokalen Ellipsoide.

Zur vollständigen Bestimmung (§ 121, **1**) ist nur zu beachten, daß sie nach (5) in gleichen Oktanten liegen.

Das Analoge gilt von entsprechenden Punkten zweier konfokaler Hyperboloide der einen oder andern Art.

8. Lage entsprechender Punkte bei den Paraboloiden. Geht man für die Flächen (10) und (11) zur Bezeichnung § 123, (1) über und setzt unter Annahme zweier linker elliptischer Paraboloide nach § 123, (2'):

(23) $b^2 = \beta - \lambda,\ c^2 = \gamma - \lambda,\ x = x + \frac{\beta}{2};\ b'^2 = \beta - \lambda',\ c'^2 = \gamma - \lambda',\ x = x + \frac{\beta}{2},$

so geben die Gleichungen (14), nach § 123, (13), in den parabolischen Koordinaten λ, μ, ν und λ', μ', ν' der beiden Punkte P und P' dargestellt, da nach (12) und (23) $h^2 = \lambda' - \lambda$ wird:

$$\frac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2} = \frac{\beta+\gamma-\lambda'-\mu'-\nu'}{2} + \frac{\lambda'-\lambda}{2},$$

$$(\beta-\mu)(\beta-\nu) = (\beta-\mu')(\beta-\nu'), \quad (\gamma-\mu)(\gamma-\nu) = (\gamma-\mu')(\gamma-\nu')$$

und damit $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$.

Entsprechende Punkte zweier konfokaler linker elliptischer Paraboloide werden von den Schnittkurven der konfokalen hyperbolischen und rechten elliptischen Paraboloide, den orthogonalen Trajektorien der konfokalen linken elliptischen Paraboloide, ausgeschnitten.

Sie liegen überdies nach (12) in demselben Quadranten des von der xy- und xz-Ebene geteilten Raumes.

Das Analoge gilt von entsprechenden Punkten zweier konfokaler hyperbolischer oder zweier rechter elliptischer Paraboloide.

9. Die Jacobische Fokaleigenschaft. Wählt man als Fläche (1) ein beliebiges Ellipsoid λ des konfokalen Systems und als Fläche (2) das in das Innere der Fokalellipse zusammengeklappte Ellipsoid $\lambda = \gamma$ (§ 120, 4), so entspricht nach 7, in elliptischen Koordinaten angegeben, einem beliebigen Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ des ersteren ein bestimmter Punkt $P' = \gamma, \mu, \nu$ des letzteren, ferner entsprechen drei Punkten $A_1 = \lambda, \gamma, \nu_1$, $A_2 = \lambda, \gamma, \nu_2$, $A_3 = \lambda, \gamma, \nu_3$ des ersten Hauptschnittes der Fläche λ (§ 121, 2) drei Punkte $F_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$, $F_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$, $F_3 = \gamma, \gamma, \nu_3$ der Fokalellipse. Nach (9) ist dann:

$$(24) \qquad \overline{PF_1} = \overline{P'A_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{P'A_2}, \quad \overline{PF_3} = \overline{P'A_3}.$$

I. *Die Abstände eines Punktes P des Ellipsoides von drei festen Punkten F_1, F_2, F_3 der Fokalellipse (drei Brennpunkten) sind gleich den Abständen des entsprechenden Punktes P' im Inneren der Fokalellipse von drei festen, den Punkten F_1, F_2, F_3 entsprechenden Punkten A_1, A_2, A_3 des ersten Hauptschnittes des Ellipsoides (drei Scheitelpunkten)* (§ 36, 6, I).

Da ein Punkt P' der ersten Hauptebene schon durch seine Abstände von zwei festen Punkten A_2 und A_3 dieser Ebene zweideutig als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt ist, so ist der Abstand von einem dritten Punkte A_1 derselben Ebene durch eine bestimmte Relation mit jenen beiden Abständen verbunden. Die Abstände eines Raumpunktes P von drei festen Punkten F_1, F_2, F_3 sind im allgemeinen unabhängig voneinander und bestimmen den Punkt P zweideutig als Schnittpunkt dreier Kugeln. Ist aber P ein Punkt des

Ellipsoides λ, so sind die drei Abstände PF_1, PF_2, PF_3 nach (24) derjenigen Relation unterworfen, durch die $P'A_1$, $P'A_2$, $P'A_3$ verbunden sind. Daher spricht man den vorigen Satz auch so aus:

II. *Das Ellipsoid ist der Ort eines Punktes P, dessen Entfernungen von drei festen Punkten F_1, F_2, F_3 der Fokalellipse durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen eines Punktes P' der Ebene der Fokalellipse von den drei entsprechenden festen Punkten A_1, A_2, A_3 des ersten Hauptschnittes verbindet* (§ 36, 6, II).[105]

Denkt man sich die Entfernungen irgendeines Punktes P' im Innern der Fokalellipse von den Punkten A_1, A_2, A_3 als feste Stangen, die um P' drehbar sind, so hat man diese nur mit ihren Endpunkten A_1, A_2, A_3 nach F_1, F_2, F_3 zu verstellen, um den zugehörigen Punkt P im Raum zu erhalten.

Dieselbe Eigenschaft gilt, wie für das Ellipsoid λ und den *gleichartigen* Fokalkegelschnitt $\lambda = \gamma$ (§ 120, 4), in analoger Weise für Hyperboloide und Paraboloide.

10. Allgemeine Darstellung der Jacobischen Fokaleigenschaft. Das Volumen V eines Tetraeders drückt sich durch die Längen e_{kl} der sechs Kanten in der Weise aus (§ 36, (24)):[105]

$$(25) \qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & e_{12}^2 & e_{13}^2 & e_{14}^2 \\ 1 & e_{21}^2 & 0 & e_{23}^2 & e_{24}^2 \\ 1 & e_{31}^2 & e_{32}^2 & 0 & e_{34}^2 \\ 1 & e_{41}^2 & e_{42}^2 & e_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Indem man die eine Ecke in die gegenüberliegende Seitenebene fallen läßt, gehen die sechs Kanten in die sechs gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten der Ebene über. Die Bedingung $V = 0$ ist also die zwischen diesen sechs Entfernungen bestehende Relation. Sie lautet, wenn man in Anlehnung an die Bezeichnung (24) setzt (Fig. 192):

Fig. 192.

$$(26) \qquad \begin{cases} e_{23} = \overline{A_2A_3} = a, & e_{31} = \overline{A_3A_1} = b, & e_{12} = \overline{A_1A_2} = c, \\ e_{14} = \overline{A_1P'} = r_1, & e_{24} = \overline{A_2P'} = r_2, & e_{34} = \overline{A_3P'} = r_3, \end{cases}$$

entwickelt:

$$(27) \qquad a^2(r_1^2-r_2^2)(r_1^2-r_3^2)+b^2(r_2^2-r_3^2)(r_2^2-r_1^2)+c^2(r_3^2-r_1^2)(r_3^2-r_2^2)$$
$$-a^2(b^2+c^2-a^2)r_1^2-b^2(c^2+a^2-b^2)r_2^2-c^2(a^2+b^2-c^2)r_3^2+a^2b^2c^2=0.$$

I. *Dies ist also die Relation, welche die Entfernungen* r_1, r_2, r_3 *eines Punktes* P' *der Ebene von drei festen Punkten* A_1, A_2, A_3 *dieser Ebene verbindet.*

Unterwirft man nun die Entfernungen eines Raumpunktes $P = x, y, z$ von drei festen Raumpunkten $F_1 = x_1, y_1, z_1$, $F_2 = x_2, y_2, z_2$, $F_3 = x_3, y_3, z_3$ dieser Relation, setzt also:

(28) $$r_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

$i = 1, 2, 3$, so erhält man in (27) eine Gleichung zweiten Grades in x, y, z. Somit folgt (§ 36, 7, II):

II. *Der Ort eines Punktes P im Raume, dessen Entfernungen von drei festen Punkten* F_1, F_2, F_3 *durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen der Ecken eines Dreiecks* $A_1 A_2 A_3$ *von einem Punkte* P' *ihrer Ebene verbindet, ist eine Fläche zweiter Ordnung.*

§ 130. Die Brennlinieneigenschaft des Kegels zweiter Ordnung.

1. Definition eines Ortes im Strahlbündel oder auf der Kugel. *In einem Strahlbündel mit dem Mittelpunkt O soll der Ort eines laufenden Strahles p untersucht werden, dessen Winkel* ϱ *und* ϱ' *gegen zwei feste Strahlen f und f' eine unveränderliche Summe oder Differenz vom Werte* $\pm 2\alpha$ *haben.*

Um die Bedeutung der Winkel $\varrho = fp$, $\varrho' = f'p$ (Fig. 193) festzulegen, geben wir den Strahlen f, f', p bestimmte Pfeilspitzen, worauf wir (I § 32, 1):

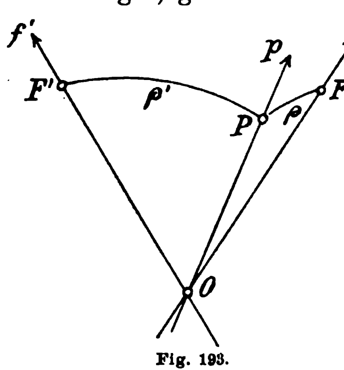


Fig. 193.

(1) $$0 < \varrho < \pi, \quad 0 < \varrho' < \pi$$

nehmen. Dann ist für die Summe und den absoluten Wert der Differenz:

(2) $$0 < \varrho + \varrho' < 2\pi, \quad 0 < |\varrho - \varrho'| < \pi.$$

Ist daher α ein spitzer Winkel:

(3) $$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi,$$

so kann für $\varrho + \varrho'$ der Wert 2α oder $2\pi - 2\alpha$, für $\varrho - \varrho'$ der Wert 2α oder -2α gefordert werden.

Die vier Möglichkeiten:

(4) $$\varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho + \varrho' = 2\pi - 2\alpha, \quad \varrho - \varrho' = \pm 2\alpha$$

sind aber auch durch die Gleichungen:

$$\sin \frac{\varrho + \varrho'}{2} = \pm \sin \alpha, \quad \sin \frac{\varrho - \varrho'}{2} = \pm \sin \alpha$$

dargestellt, die, von Vielfachen von 2π abgesehen, zunächst auf:

$$\frac{\varrho+\varrho'}{2} = \pm\alpha, \quad \pi\mp\alpha, \qquad \frac{\varrho-\varrho'}{2} = \pm\alpha, \quad \pi\mp\alpha$$

und daher mit Rücksicht auf (2), (3) wieder auf (4) zurückkommen.

Der gesuchte Ort ist daher schließlich durch die Gleichung:

$$(5)\qquad \left(\sin\frac{\varrho+\varrho'}{2}+\sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\varrho+\varrho'}{2}-\sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\varrho-\varrho'}{2}+\sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\varrho-\varrho'}{2}-\sin\alpha\right)=0$$

bezeichnet (§ 1, (4)).

Nennt man die Schnittpunkte der positiven Halbstrahlen f, f', p mit der um O beschriebenen Einheitskugel (I § 49, 9) F, F', P, so entspricht der Bewegung des Strahles p eine solche des Punktes P *auf der Kugel* (Fig. 193). *Summe oder Differenz der auf größten Kreisen gemessenen (kürzesten) Abstände ϱ und ϱ' des Punktes P von zwei festen Punkten F und F' bleibt dabei unveränderlich.*

2. Einführung eines Koordinatensystems. Wir nehmen O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$, dessen zx-Ebene die Ebene der Geraden f, f' ist, und dessen positive z-Achse den Winkel 2ε von f und f' halbiert (Fig. 194).

Die Richtungskosinus der Strahlen f, f' (I § 33, 2) sind dann:

$$(6)\qquad f:\ \sin\varepsilon,\ 0,\ \cos\varepsilon;\quad f':\ -\sin\varepsilon,\ 0,\ \cos\varepsilon;\quad 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}.$$

Zur Deutung der Konstanten α in (3) nehmen wir in der zx-Ebene zwei weitere gerichtete Strahlen g, g' (OA, OA', Fig. 194) an, die mit der z-Achse je den Winkel α bilden und die Richtungskosinus haben:

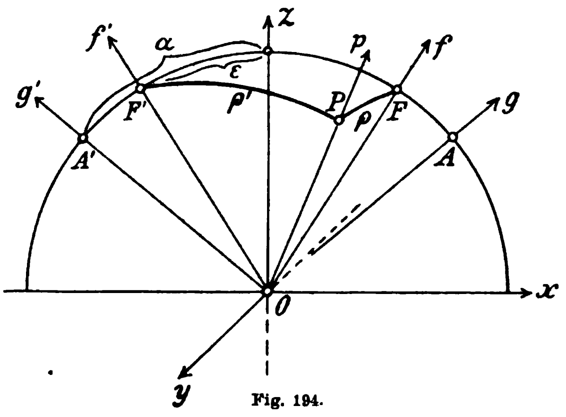


Fig. 194.

$$(7)\qquad g:\ \sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha;\quad g':\ -\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha.$$

Die Richtungskosinus des laufenden Strahles $p\,(OP)$ seien:

$$(8)\qquad p:\ \lambda, \mu, \nu;\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

An Stelle der Winkel α und ε führen wir durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad \sin\alpha = \frac{a}{e};\quad \sin\varepsilon = \frac{d}{e}$$

die Verhältnisse von drei neuen positiven Konstanten a, d, e ein, die den Bedingungen entsprechen sollen:

$$(10)\qquad 0 < a < e; \quad 0 < d < e.$$

Für die Winkel ϱ und ϱ' des Strahles p gegen f und f' ist nach (8) und (6) (I § 35, (1)):

$$\cos\varrho = \sin\varepsilon \cdot \lambda + \cos\varepsilon \cdot \nu, \quad \cos\varrho' = -\sin\varepsilon \cdot \lambda + \cos\varepsilon \cdot \nu$$

und damit:

$$\frac{\cos\varrho - \cos\varrho'}{2} = \sin\varepsilon \cdot \lambda, \quad \cos\varrho\cos\varrho' = -\sin^2\varepsilon \cdot \lambda^2 + \cos^2\varepsilon \cdot \nu^2$$

oder nach (9):

$$(11)\qquad \frac{\cos\varrho - \cos\varrho'}{2} = \frac{d}{e}\lambda, \quad \cos\varrho\cos\varrho' = -\frac{d^2}{e^2}\lambda^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2}\nu^2.$$

3. Eine identische Gleichung. Der die linke Seite von (5) bildende Ausdruck:

$$(12)\qquad S = \left(\sin^2\frac{\varrho + \varrho'}{2} - \sin^2\alpha\right)\left(\sin^2\frac{\varrho - \varrho'}{2} - \sin^2\alpha\right)$$

oder:

$$S = \sin^2\frac{\varrho + \varrho'}{2}\sin^2\frac{\varrho - \varrho'}{2} - \left(\sin^2\frac{\varrho + \varrho'}{2} + \sin^2\frac{\varrho - \varrho'}{2}\right)\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

nimmt infolge der trigonometrischen Formeln:

$$\sin\frac{\varrho + \varrho'}{2}\sin\frac{\varrho - \varrho'}{2} = -\frac{\cos\varrho - \cos\varrho'}{2},$$

$$\sin^2\frac{\varrho + \varrho'}{2} + \sin^2\frac{\varrho - \varrho'}{2} = \frac{1 - \cos(\varrho + \varrho')}{2} + \frac{1 - \cos(\varrho - \varrho')}{2}$$

$$= 1 - \frac{\cos(\varrho + \varrho') + \cos(\varrho - \varrho')}{2} = 1 - \cos\varrho\cos\varrho'$$

die Form an:

$$S = \left(\frac{\cos\varrho - \cos\varrho'}{2}\right)^2 - (1 - \cos\varrho\cos\varrho')\sin^2\alpha + \sin^4\alpha.$$

Daraus aber wird nach (11) und (9):

$$S = \frac{d^2}{e^2}\lambda^2 - \left(1 + \frac{d^2}{e^2}\lambda^2 - \frac{e^2 - d^2}{e^2}\nu^2\right)\frac{a^2}{e^2} + \frac{a^4}{e^4}$$

und nach (8):

$$e^4 S = -d^2(a^2 - e^2)\lambda^2 + a^2(e^2 - d^2)\nu^2 + a^2(a^2 - e^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$
$$= (a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\lambda^2 + a^2(a^2 - e^2)\mu^2 + a^2(a^2 - d^2)\nu^2.$$

Sind daher ϱ und ϱ' die Winkel, die ein laufender Strahl $p = \lambda, \mu, \nu$ des Bündels (Fig. 194) *mit den beiden festen Strahlen f und f' einschließt, so ist mit den Beziehungen* (9) *identisch:*

$$(13)\quad \begin{cases} a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{a^2-d^2}+\frac{\nu^2}{a^2-e^2}\right) \\ = e^4\left(\sin^2\frac{\varrho+\varrho'}{2}-\sin^2\alpha\right)\left(\sin^2\frac{\varrho-\varrho'}{2}-\sin^2\alpha\right). \end{cases}$$

Sind x, y, z die Koordinaten und r der Leitstrahl eines Punktes auf dem Strahle λ, μ, ν, so ist (I § 33, (14)):

$$x = r\lambda, \quad y = r\mu, \quad z = r\nu; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Demnach gilt für jeden Punkt x, y, z des laufenden Strahles p die Identität:[4])

$$(14)\quad \begin{cases} a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}\right) \\ = e^4(x^2+y^2+z^2)\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\varrho+\varrho'}{2}\right)\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\varrho-\varrho'}{2}\right). \end{cases}$$

4. Fokaleigenschaft des elliptischen Kegels und des sphärischen Kegelschnittes. Die beiden festen Strahlen f und f' haben nach (6) in laufenden Punktkoordinaten die Gleichungen:

$$(15)\qquad x : y : z = \pm \sin\varepsilon : 0 : \cos\varepsilon$$

oder nach (9):

$$(16)\qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2-d^2} = 0, \quad y = 0.$$

Infolge der Identität (14) ergibt sich nun (Fig. 194), daß die Gleichung (5) und die Gleichung:

$$(17)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 0$$

sich gegenseitig bedingen. Dabei können x, y, z (I § 49, 6) sowohl Koordinaten des Strahles im Bündel als des Punktes im Raume bedeuten. Mit Rücksicht auf § 54, (1); (11) folgt daher:

Der Ort eines Strahles p im Bündel, für den die Summe oder Differenz der Winkel, die er mit zwei festen Strahlen f und f' bildet, den festen Wert $\pm 2\alpha$ behält, ist ein elliptischer Kegel mit den Brennstrahlen f und f'.

Bei jedem elliptischen Kegel ist die Summe oder Differenz der Winkel der laufenden Erzeugenden gegen die beiden Brennlinien unveränderlich.[5])

Für den Durchschnitt des Kegels (17) mit der Einheitskugel:

$$(18)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

unter x, y, z Punktkoordinaten im Raume gedacht, lauten dieselben Sätze:

Der Ort eines Punktes P der Kugel, für den die Summe oder Differenz der sphärischen Entfernungen von zwei festen Punkten F, F'

(Fig. 194) *konstant bleibt, ist ein sphärischer Kegelschnitt (eine sphärische Ellipse).*

Bei jeder sphärischen Ellipse ist die Summe oder Differenz der sphärischen Entfernungen des laufenden Punktes von den Brennpunkten konstant.[3])

5. Verschiedene Lage des Kegels gegen das Achsensystem. Bei festem Winkel $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right.$ nach (6)$\left.\right)$ kann über den Winkel $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right.$ nach (3)$\left.\right)$ auf doppelte Weise verfügt werden, nämlich entweder (vgl. (9)):

(19) $\frac{\pi}{2} > \alpha > \varepsilon;\ \sin\alpha > \sin\varepsilon;\ e^2 > a^2 > d^2$

oder:

(19′) $\varepsilon > \alpha > 0;\ \sin\varepsilon > \sin\alpha;\ d^2 > a^2 > 0\,.$

Dementsprechend ist der Kegel (17) nach § 54, 4 ein aufrechter Kegel mit oberem und unterem Mantel oder ein liegender mit rechtem und linkem Mantel.

6. Verteilung der Brennpunktseigenschaften auf die beiden Kegel. Der sphärische Kegelschnitt k, in dem der Kegel (17); (19) die Einheitskugel (18) schneidet, besteht, den beiden Mänteln des Kegels entsprechend, aus einem *oberen* $ABA'B'$ und einem *unteren Zweig* $A_1B_1A_1'B_1'$, die beide durch die xy-Ebene getrennt sind (§ 54, Fig. 127); der sphärische Kegelschnitt (17); (19′) ebenso aus einem *rechten* $ACA_1'C'$ und einem *linken Zweig* $A_1C_1A'C_1'$, die beide durch die yz-Ebene getrennt sind (§ 54, Fig. 128).

Da die größten Kreisbogen $2\varepsilon = FF'$, $\varrho = FP$, $\varrho' = F'P$, $\pi - \varrho = F_1P$, $\pi - \varrho' = F_1'P$ je $< \pi$ und kürzeste Entfernungen ihrer Endpunkte auf der Kugel sind, so ist in den Dreiecken FPF' und F_1PF_1' (Fig. 128 und Fig. 194):

$$2\varepsilon < \varrho + \varrho',\quad 2\varepsilon < (\pi - \varrho) + (\pi - \varrho');\quad \varrho' < 2\varepsilon + \varrho,\quad \varrho < 2\varepsilon + \varrho'$$

oder:

(20) $2\varepsilon < \varrho + \varrho' < 2\pi - 2\varepsilon;$ (20′) $0 < |\varrho - \varrho'| < 2\varepsilon.$

Ist nun mit (19): $2\varepsilon < 2\alpha < \pi$, so ist nach (20′): $|\varrho - \varrho'| = 2\alpha$ unmöglich. Ist aber mit (19′): $0 < 2\alpha < 2\varepsilon$ und $2\pi - 2\varepsilon < 2\pi - 2\alpha$, so ist nach (20): $\varrho + \varrho' = 2\alpha$ und $2\pi - 2\alpha$ unmöglich (§ 1, 4).

Von den *vier Möglichkeiten* (4), von denen nach der Identität (14) wenigstens *eine* statthaben muß, *bleiben daher für den Kegel* (17); (19) *und* (17); (19′) *bezüglich nur übrig:*

(21) $\varrho + \varrho' = 2\alpha$ oder $2\pi - 2\alpha$, (21′) $\varrho - \varrho' = 2\alpha$ oder -2α.

Für den größten Wert $\frac{\pi}{2}$ von α (vgl. (19)), $a = e$ nach (9), fallen von dem Kegelschnitt (17), (18), (19) der obere und untere Zweig in den *größten Kreis der xy-Ebene* hinein, und zugleich vereinigen sich die beiden Möglichkeiten (21) in die eine:

$$\varrho + \varrho' = \pi, \tag{22}$$

die somit für diesen Kreis gelten muß. Bei abnehmendem α fällt daher die erste Möglichkeit (21) dem oberen, die zweite dem unteren Zweige zu.

Da andererseits für Punkte P links von der yz-Ebene $\varrho' < \varrho$ und rechts $\varrho' > \varrho$ ist, so kommt dem linken Zweig des Kegelschnittes (17), (18), (19') die erste Möglichkeit (21'), dem rechten die zweite zu.

Die vier Möglichkeiten (4):

$$\varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho + \varrho' = 2\pi - 2\alpha; \quad \varrho - \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho' - \varrho = 2\alpha, \tag{23}$$

die sich auf die sphärischen Abstände ϱ und ϱ' des laufenden Punktes P von dem rechten und linken oberen Brennpunkt F und F' beziehen, kommen also bezüglich dem oberen und unteren Zweig des sphärischen Kegelschnittes (19) *und dem linken und rechten Zweig von* (19') *zu.*

Bezeichnen indessen (§ 54, Fig. 127):

$$\varrho_1 = \pi - \varrho, \quad \varrho_1' = \pi - \varrho'$$

die Abstände des Punktes P von dem unteren linken und rechten Brennpunkt F_1 und F_1', so können die vier Eigenschaften (23) alle in der *Summenform*, und zwar:

$$\varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho_1 + \varrho_1' = 2\alpha; \quad \varrho_1 + \varrho' = \pi - 2\alpha, \quad \varrho + \varrho_1' = \pi - 2\alpha \tag{24}$$

geschrieben werden.

Jeder Zweig eines sphärischen Kegelschnittes hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der sphärischen Abstände seines laufenden Punktes von seinen beiden inneren Brennpunkten gleich seinem größten sphärischen Durchmesser ist. Er kann somit, wie die Ellipse in der Ebene, mittels eines in den Brennpunkten befestigten und auf der Kugel gespannten *Fadens* beschrieben werden.[11])

III. Kapitel.

Die Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen.

§ 131. Fokaleigenschaften konjugierter Fokalkegelschnitte.

1. Die konjugierten Fokalkegelschnitte. Die in der Ebene $z = 0$ liegende Ellipse:

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1 \tag{1}$$

und die in der Ebene $y = 0$ liegende Hyperbel:

(2) $$\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1$$

haben, wenn zwischen ihren Konstanten die Beziehung:

(3) $$d^2 - e^2 + f^2 = 0$$

besteht, die Eigenschaft, daß *die Scheitelpunkte* C_0, C_0' *der Ellipse* (Fig. 195) *die Brennpunkte der Hyperbel und die Scheitelpunkte* B_0, B_0' *der Hyperbel die Brennpunkte der Ellipse sind.*

Der eine der beiden „*konjugierten Kegelschnitte*" ist durch den andern bestimmt.[188])

Sie sind zugleich die *Fokalkegelschnitte* § 55, (9) der Mittelpunktsfläche § 55, (1), die *Fokalellipse* und *Fokalhyperbel.*

2. Entfernung zweier Punkte der konjugierten Fokalkegelschnitte. Sind $C = x_0, y_0, 0$ und $B = x_1, 0, z_1$ zwei Punkte der Kegelschnitte (1) und (2), also:

(4) $$\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{d^2} - \frac{z_1^2}{f^2} = 1,$$

so ist für ihre Entfernung ϱ mit Rücksicht auf (3):

$$\varrho^2 = \overline{BC}^2 = (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_1^2 = (x_1 - x_0)^2 + f^2 - \frac{f^2}{e^2} x_0^2 + \frac{f^2}{d^2} x_1^2 - f^2$$
$$= \frac{e^2 - f^2}{e^2} x_0^2 + \frac{d^2 + f^2}{d^2} x_1^2 - 2 x_0 x_1 = \frac{d^2 x_0^2}{e^2} + \frac{e^2 x_1^2}{d^2} - 2 x_0 x_1$$
$$= \left(\frac{d x_0}{e} - \frac{e x_1}{d}\right)^2$$

und somit:

(5) $$\varrho = \overline{BC} = \pm \left(\frac{d x_0}{e} - \frac{e x_1}{d}\right).$$

Nach (3) und (4) ist:

(6) $$d < e, \quad |x_0| \leq e, \quad |x_1| \geq d$$

und daher:

(7) $$\left| d \frac{x_0}{e} \right| < d < e < \left| e \frac{x_1}{d} \right|.$$

Somit gilt in (5) das positive oder negative Zeichen, je nachdem $x_1 < 0$ oder > 0.

Die absolute Entfernung eines Punktes $C = x_0, y_0, 0$ *der Ellipse und eines Punktes* $B = x_1, 0, z_1$ *der Hyperbel ist:*[22])

(8) $$\varrho = \overline{BC} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x_0}{e} \quad \text{oder} \quad \varrho = \overline{BC} = -\frac{e x_1}{d} + \frac{d x_0}{e},$$

je nachdem B *auf dem rechten* (Fig. 195) *oder auf dem linken Zweig der Hyperbel liegt* (vgl. § 4, (35)).

3. Winkel der Strecke CB gegen die Tangente der Ellipse. Die Richtungskosinus der Strecke CB (Fig. 195) sind (I § 34, (7)):

$$\frac{x_1 - x_0}{\varrho}, \quad -\frac{y_0}{\varrho}, \quad \frac{z_1}{\varrho}$$

und die der Tangente der Ellipse (1) im Punkte C nach § 13, (5); (6):

$$(9) \qquad -q\frac{y_0}{f^2}, \quad q\frac{x_0}{e^2}, \quad 0; \quad q = 1 : \sqrt{\frac{x_0^2}{e^4} + \frac{y_0^2}{f^4}},$$

wobei die Tangente so gerichtet ist, daß sie den Punkt O zur Linken läßt (I § 17, (5)).

Daher ist für den Winkel γ zwischen der Strecke CB und der Tangente (I § 35, (1)):

$$\cos\gamma = -\frac{q y_0}{\varrho}\left(\frac{x_1 - x_0}{f^2} + \frac{x_0}{e^2}\right) = -\frac{q y_0}{f^2 \varrho}\left(x_1 - \frac{d^2}{e^2}x_0\right) = -\frac{d}{e}\frac{q y_0}{f^2 \varrho}\left(\frac{e}{d}x_1 - \frac{d}{e}x_0\right)$$

und nach (8):

$$(10) \qquad \cos\gamma = -\frac{d}{e}\frac{q y_0}{f^2} \quad \text{oder} \quad \cos\gamma = \frac{d}{e}\frac{q y_0}{f^2},$$

je nachdem B auf dem rechten (Fig. 195, wo $y_0 < 0$, also γ spitz) oder auf dem linken Zweig der Hyperbel liegt. Da die Ausdrücke (10) x_1, z_1 nicht enthalten, folgt:

Der Winkel γ, den die Strecke CB (Fig. 195) *mit der Tangente der Ellipse im Punkte C bildet, ist von der Lage des Punktes B auf demselben Hyperbelzweig unabhängig und geht nur in $\pi - \gamma$ über, wenn B auf den anderen Hyperbelzweig übergeht;* oder, was dasselbe ist:

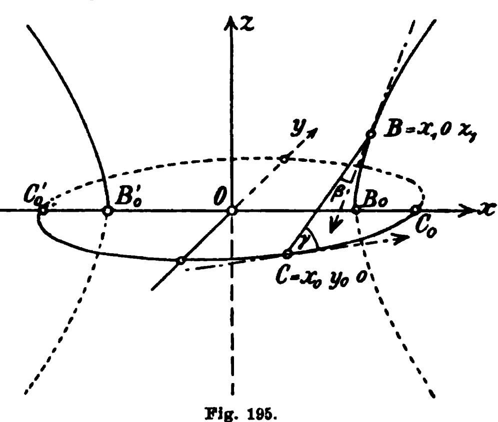


Fig. 195.

Der von einem beliebigen Punkte C der Ellipse über der konjugierten Hyperbel errichtete Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der Ellipse in C ist; die beiden Zweige der Hyperbel gehören verschiedenen Mänteln des Kegels an (§ 122, 8, III).

4. Winkel der Strecke BC gegen die Tangente der Hyperbel. Die Richtungskosinus der Strecke BC (Fig. 195) sind:

$$\frac{x_0 - x_1}{\varrho}, \quad \frac{y_0}{\varrho}, \quad -\frac{z_1}{\varrho}$$

und die der Tangente der Hyperbel (2) im Punkte B nach § 13, (5); (6):

(11) $-\varepsilon p \frac{z_1}{f^2},\ 0,\ -\varepsilon p \frac{x_1}{d^2};\quad p = 1 : \sqrt{\frac{x_1^2}{d^4} + \frac{z_1^2}{f^4}};\quad \varepsilon = \text{sign.}\, x_1,$

wobei die Tangente nach abwärts gerichtet $\left(-\varepsilon p \frac{x_1}{d^2} < 0\right)$ ist.

Daher ist für den Winkel β zwischen der Strecke BC und der Tangente:

$$\cos\beta = -\frac{\varepsilon p z_1}{\varrho}\left(\frac{x_0 - x_1}{f^2} - \frac{x_1}{d^2}\right) = -\frac{\varepsilon p z_1}{f^2 \varrho}\left(x_0 - \frac{e^2}{d^2}x_1\right) = \varepsilon \frac{e}{d}\frac{p z_1}{f^2 \varrho}\left(\frac{e}{d}x_1 - \frac{d}{e}x_0\right)$$

und nach (8), wo für $\varepsilon = 1$ die erste, für $\varepsilon = -1$ die zweite Formel gilt:

(12) $$\cos\beta = \frac{e}{d}\frac{p z_1}{f^2}$$

(Fig. 195, wo mit $z_1 > 0$ β spitz ist). Da der Ausdruck (12) die Koordinaten x_0, y_0 nicht enthält, folgt:

Der Winkel β, den die Strecke BC (Fig. 195) *mit der Tangente der Hyperbel im Punkte B bildet, ist von der Lage des Punktes C auf der Ellipse unabhängig;* oder, was dasselbe ist:

Der von einem beliebigen Punkte B der Hyperbel über der konjugierten Ellipse errichtete Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der Hyperbel in B ist; die Ellipse gehört dem einen Mantel des Kegels an.

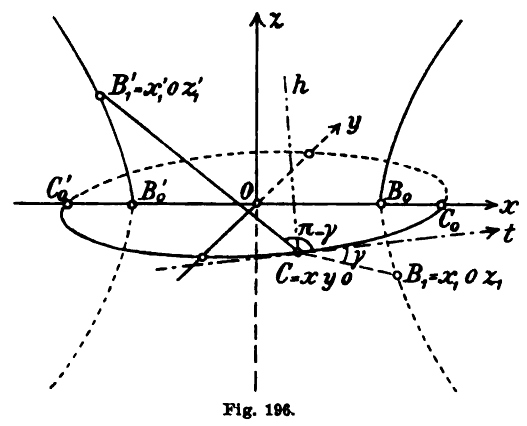


Fig. 196.

5. Fokaleigenschaft der Ellipse in bezug auf zwei ungleichseitige Punkte der Hyperbel. Sind (Fig. 196) $B_1 = x_1,\ 0,\ z_1$ und $B_1' = x_1',\ 0,\ z_1'$ zwei feste Punkte der Hyperbel, bezüglich auf dem rechten und linken Zweig (ungleichseitig) gelegen, und $C = x,\ y,\ 0$ ein laufender Punkt der Ellipse, so ist nach (8):

$$\overline{B_1 C} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x}{e},\qquad \overline{B_1' C} = -\frac{e x_1'}{d} + \frac{d x}{e}$$

und danach:

(13) $$\overline{B_1 C} + \overline{B_1' C} = \frac{e(x_1 - x_1')}{d}$$

unabhängig von x, y.

I. *Die Summe der Entfernungen des laufenden Punktes C der Ellipse von zwei festen ungleichseitigen Punkten B_1 und B_1' der Hyperbel* (Fig. 196) *ist unveränderlich.*[188])

Die Winkel der Strecken CB_1 und CB_1' gegen die Tangente der Ellipse in C haben nach (10) entgegengesetzte Kosinus; *ist der eine* γ, *so ist der andere* $\pi - \gamma$.

Man kann dies noch anders ausdrücken. Sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungskosinus der beiden Strecken und λ, μ, ν die der Tangente, so ist nach (10):

$$a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu = -(a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu),$$

woraus folgt (I § 35, (9)):

I'. *Die innere Halbierungslinie h des Winkels der Strecken CB_1 und CB_1' steht auf der Tangente t der Ellipse in C senkrecht* (Fig. 196).

Mit $x_1 = d$, $x_1' = -d$ geht aus (13) die Fokaleigenschaft der Ellipse § 1, (9):

(13') $\quad \overline{B_0 C} + \overline{B_0' C} = 2e$

(Fig. 196) und aus I' die Winkelbeziehung der Brennstrahlen CB_0, CB_0' zur Tangente § 13, 4 hervor.

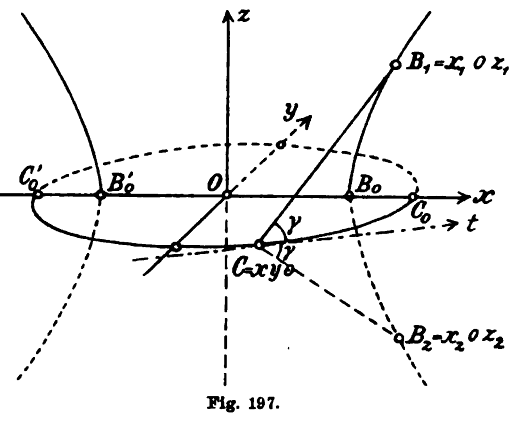


Fig. 197.

6. Fokaleigenschaft der Ellipse in bezug auf zwei gleichseitige Punkte der Hyperbel. Sind (Fig. 197) $B_1 = x_1, 0, z_1$ und $B_2 = x_2, 0, z_2$ zwei feste Punkte auf demselben (rechten) Zweig der Hyperbel und $C = x, y, 0$ ein laufender Punkt der Ellipse, so ist nach (8):

$$\overline{B_1 C} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x}{e}, \qquad \overline{B_2 C} = \frac{e x_2}{d} - \frac{d x}{e}$$

und danach:

$$(14) \qquad \overline{B_1 C} - \overline{B_2 C} = \frac{e(x_1 - x_2)}{d}$$

unabhängig von x, y.

II. *Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes C der Ellipse von zwei festen gleichseitigen Punkten B_1 und B_2 der Hyperbel* (Fig. 197) *ist unveränderlich.*

Die Strecken CB_1 und CB_2 bilden nach (10) mit der Tangente der Ellipse in C *gleiche Winkel* γ.

7. Fokaleigenschaft der Hyperbel in bezug auf zwei Punkte der Ellipse. Sind (Fig. 198) $C_1 = x_1, y_1, 0$ und $C_2 = x_2, y_2, 0$ zwei feste Punkte der Ellipse und $B = x, 0, z$ ein laufender Punkt der Hyperbel (des rechten Zweiges), so ist nach (8):

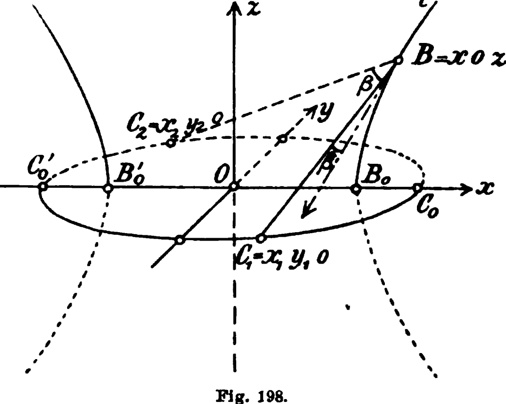


Fig. 198.

$$\overline{C_1 B} = \frac{ex}{d} - \frac{dx_1}{e},$$

$$\overline{C_2 B} = \frac{ex}{d} - \frac{dx_2}{e}$$

und somit:

$$(15)\quad \overline{C_1 B} - \overline{C_2 B} = \frac{d(x_2 - x_1)}{e}.$$

III. *Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes B der Hyperbel von zwei festen Punkten C_1 und C_2 der Ellipse* (Fig. 198) *ist unveränderlich.*

Die Strecken BC_1 und BC_2 bilden nach (12) mit der Tangente der Hyperbel in B *gleiche Winkel* β.

Für $x_1 = -e$, $x_2 = e$ geht aus (15) die Fokaleigenschaft der Hyperbel § 1, (10):

$$(15')\qquad \overline{C_0' B} - \overline{C_0 B} = 2d$$

hervor.

8. Gebrochene Entfernungen. Der Satz (13) kann auch in der Form ausgedrückt werden:

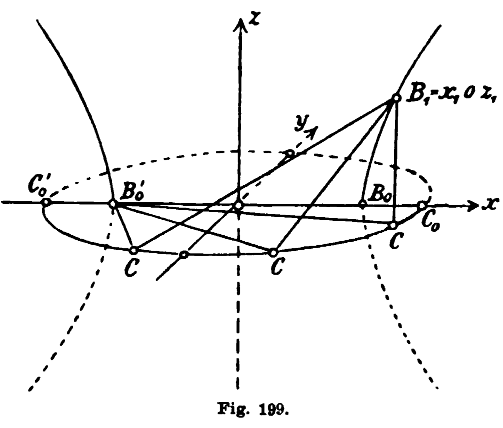


Fig. 199.

Die gebrochene Entfernung $B_1 C B_1'$ zweier ungleichseitiger Punkte B_1 und B_1' der Fokalhyperbel über die Fokalellipse ist unveränderlich (Fig. 196).

Denkt man sich Ellipse und Hyperbel aus dünnem glatten Draht hergestellt und durch ein geradliniges Drahtstück $C_0 B_0 B_0' C_0'$ mit einander fest verbunden und denkt man sich die gebrochene Linie $B_1 C B_1'$ als unausdehnbaren Faden, der in B_1 und B_1' befestigt ist und in C frei über die Ellipse gleitet, so ist der Faden, da die Resultante der Spannungen der

Stücke CB_1 und CB_1' nach 5, I' in die auf t senkrechte Halbierungslinie h fällt, im indifferenten Gleichgewicht, und der Gleitpunkt C längs der Ellipse verschiebbar (wenigstens auf der vorderen Hälfte der Ellipse; der Übergang auf die hintere wird durch das Drahtgestell verhindert).

Insbesondere folgt mit $B_1' = B_0'$ $(x_1' = -d)$ aus (13):

Die gebrochene Entfernung $B_1 C B_0'$ *eines beliebigen Punktes* $B_1 = x_1, 0, z_1$ $(x_1 > 0)$ *der Hyperbel von dem ungleichseitigen Scheitel* $B_0' = -d, 0, 0$ *der Hyperbel, über die Ellipse hinweg* (Fig. 199), *ist von unveränderlicher Länge:*

(16) $$B_1 C B_0' = \frac{e x_1}{d} + e.$$

9. Zusammengesetzte Fokaleigenschaft der Ellipse und Hyperbel. Die Punkte B_0' und C_0 haben die Koordinaten: $-d, 0, 0$ und $e, 0, 0$. Ist nun $C = x_0, y_0, 0$ ein Punkt der Ellipse, $B = x_1, 0, z_1$ ein Punkt des rechten und $B' = x_1', 0, z_1'$ ein Punkt des linken Hyperbelzweiges (Fig. 200 und 201), so ist nach (8):

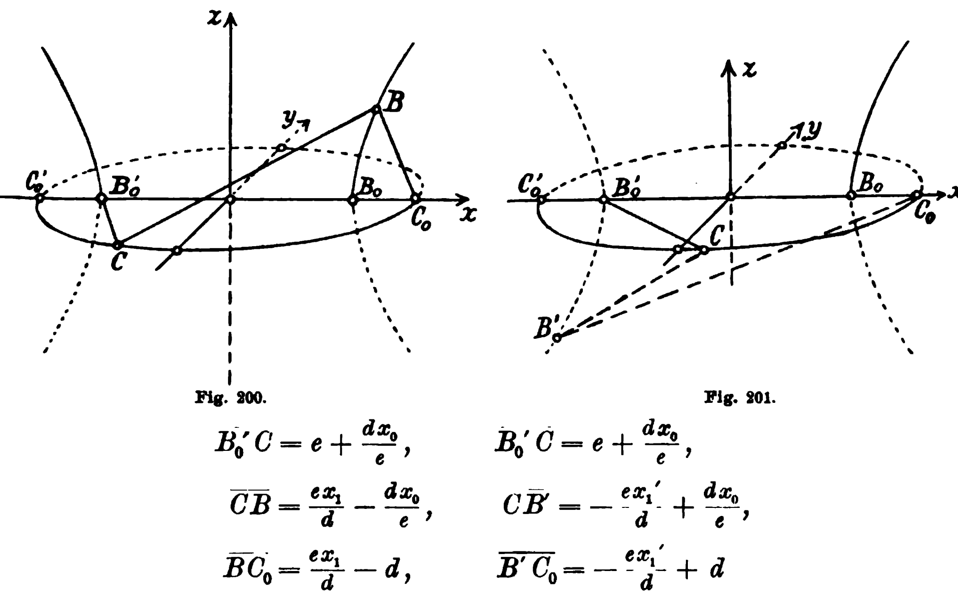


Fig. 200. Fig. 201.

$$\overline{B_0' C} = e + \frac{d x_0}{e}, \qquad \overline{B_0' C} = e + \frac{d x_0}{e},$$

$$\overline{CB} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x_0}{e}, \qquad \overline{CB'} = -\frac{e x_1'}{d} + \frac{d x_0}{e},$$

$$\overline{BC_0} = \frac{e x_1}{d} - d, \qquad \overline{B'C_0} = -\frac{e x_1'}{d} + d$$

und somit *unabhängig von der Lage der Punkte* C, B, B' *bezüglich auf der Ellipse, auf dem rechten und linken Zweige der Hyperbel:*

(17) $$\overline{B_0'C} + \overline{CB} - \overline{BC_0} = d + e, \qquad \overline{B_0'C} - \overline{CB'} + \overline{B'C_0} = d + e.$$

Ebenso ist mit B_0 und C_0' statt mit B_0' und C_0 endigend:

(18) $$\overline{B_0C} + \overline{CB'} - \overline{B'C_0'} = d + e, \qquad \overline{B_0C} - \overline{CB} + \overline{BC_0'} = d + e.$$

§ 132. Die gebrochenen Fokaldistanzen über die Fokalellipse.

1. Die beiden Fokalkegel eines Punktes. Die von einem Punkte $P = x, y, z$ des Raumes über dem einen oder andern der beiden Fokalkegelschnitte § 131, (1); (2) errichteten Kegel zweiter Ordnung heißen nach § 122, 2 *die beiden Fokalkegel des Punktes P*.

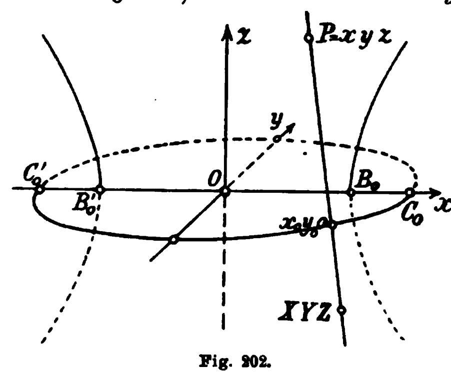


Fig. 202.

Sie können als Spezialfälle des Berührungskegels von P an eine Fläche zweiter Ordnung (§ 70, 4) betrachtet werden, da die Fokalkegelschnitte selbst nach § 120, 4 als Flächen zweiter Ordnung mit einer verschwindenden Halbachse entstehen. Indem man daher die Gleichung § 70, (22) des Berührungskegels an die Fläche § 70, (1) mit $a^2, b^2, c^2 = e^2, f^2, 0$ und $d^2, 0, -f^2$ auf die Grenzflächen § 131, (1); (2) anwendet, ergibt sich:

Die Gleichungen der beiden Fokalkegel des Punktes $P = x, y, z$ lauten in laufenden Koordinaten X, Y, Z (Fig. 202):

$$(1) \qquad \frac{(xZ - zX)^2}{e^2} + \frac{(yZ - zY)^2}{f^2} - (Z - z)^2 = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{(xY - yX)^2}{d^2} - \frac{(zY - yZ)}{f^2} - (Y - y)^2 = 0.$$

2. Bedingung der Rotationskegel. Für den Kegel (1) ist in der Bezeichnung von § 100, 3:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11} = \frac{z^2}{e^2}, & a_{22} = \frac{z^2}{f^2}, & a_{33} = \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{f^2} - 1, \\ a_{23} = -\frac{yz}{f^2}, & a_{31} = -\frac{zx}{e^2}, & a_{12} = 0. \end{cases}$$

Sieht man also von dem Falle $z = 0$ ab, wo der Kegel in die Doppelebene $Z^2 = 0$ zerfällt, ist er nach § 100, (7) ein Rotationskegel immer dann und nur dann, wenn entweder:

$$(4) \quad x = 0, \ \left(\frac{z^2}{e^2} - \frac{z^2}{f^2}\right)\left(\frac{z^2}{e^2} - \frac{y^2}{f^2} + 1\right) - \frac{y^2 z^2}{f^4} = -\frac{d^2 z^2}{e^2 f^2}\left(\frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{e^2} + 1\right) = 0,$$

oder:

$$(5) \quad y = 0, \ \left(\frac{z^2}{f^2} - \frac{x^2}{e^2} + 1\right)\left(\frac{z^2}{f^2} - \frac{z^2}{e^2}\right) - \frac{z^2 x^2}{e^4} = -\frac{d^2 z^2}{e^2 f^2}\left(\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} - 1\right) = 0.$$

Der Kegel über der Fokalellipse § 131, (1) *ist daher ein Rotationskegel, wenn der Punkt $P = x, y, z$ auf der Fokalhyperbel* § 131, (2) *oder auf der imaginären Fokalellipse der yz-Ebene* § 120, (21) *liegt.*[144])

Entsprechendes gilt für den Kegel (2). Indem wir die imaginäre Fokalellipse ausscheiden, heben wir nur hervor, wie schon § 122, 8, III und § 131, **3**; **4** bewiesen wurde:

Der von einem Punkte der Fokalhyperbel über der Fokalellipse und der von einem Punkte der Fokalellipse über der Fokalhyperbel errichtete Kegel ist ein Rotationskegel.

3. Die Fokallinien. Eine gemeinsame Transversale (Trefflinie) der beiden Fokalkegelschnitte § 131, (1), (2), wie BC in Fig. 195, soll ein *Fokalstrahl* oder eine *Fokallinie* genannt werden.

Durch einen Punkt P des Raumes gehen im allgemeinen vier Fokallinien, nämlich die nach § 122, **5** stets reellen Schnittlinien der beiden Fokalkegel des Punktes.

Liegt jedoch der Punkt P *selbst auf einem Fokalkegelschnitt*, so gehen durch ihn ausnahmsweise ∞^1 *Fokallinien*, seine Verbindungslinien mit dem andern Fokalkegelschnitt, die nach **2** einen Rotationskegel bilden.

Im allgemeinen Falle (Fig. 203) seien *die Schnittpunkte der vier Fokallinien* f_1, f_2, f_3, f_4 des Punktes P *mit der Fokalellipse* C_1, C_2, C_3, C_4 und *mit der Fokalhyperbel* B_1, B_2, B_3, B_4.

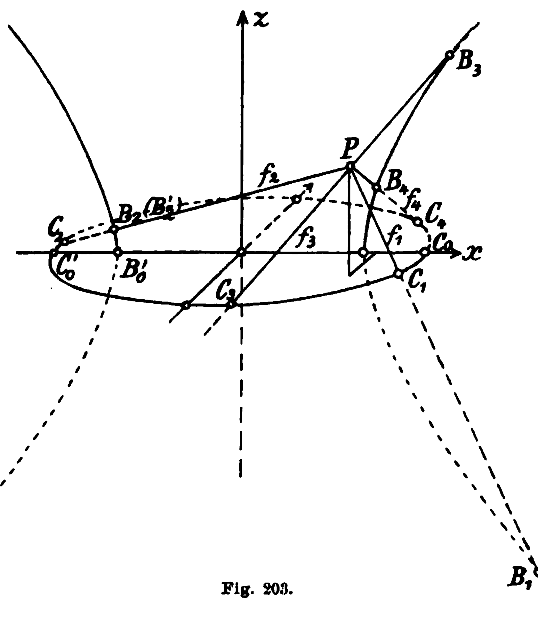


Fig. 203.

4. Gebrochene Entfernungen über die Fokalellipse. Die gebrochene Entfernung $B'CB_0$ oder (Fig. 199) BCB'_0 eines *Punktes B' des linken* oder eines *Punktes B des rechten Zweiges der Fokalhyperbel* von dem ungleichseitigen Brennpunkt B_0 oder B'_0 der Fokalellipse, über diese hinweg, ist nach § 131, **8** für alle Lagen des Knickpunktes C *dieselbe.* Sie ist die *indifferente Gleichgewichtslage* eines in C über die Ellipse gleitenden und in den Endpunkten $B'B_0$ oder BB'_0 festgehaltenen Fadens.

Die gebrochene Entfernung:

(6) $r = PCB_0$ oder $r' = PCB'_0$

eines *beliebigen Punktes* $P = x, y, z$ des Raumes von einem Brennpunkte:

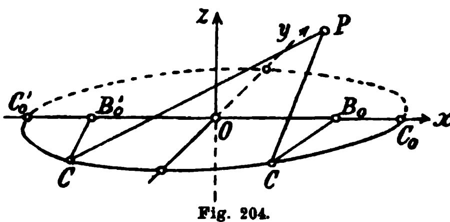


Fig. 204.

$B_0 = d, 0, 0$ oder $B'_0 = -d, 0, 0$ (Fig. 204) der Fokalellipse § 131, (1), über diese hinweg, wird im allgemeinen von dem Knickpunkt $C = x_0, y_0, 0$ *abhängig* sein.

In Formeln drückt sich diese Abhängigkeit in folgender Weise aus:

(7) $r = \overline{PC} + \overline{CB_0} = \varrho + \tau$, $r' = \overline{PC} + \overline{CB_0'} = \varrho + \tau'$,

wobei:

(8) $$\varrho = \overline{PC} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

(9) $\tau = \overline{CB_0} = \sqrt{(x_0 - d)^2 + y_0^2}$, $\tau' = \overline{CB_0'} = \sqrt{(x_0 + d)^2 + y_0^2}$,

während gleichzeitig:

(10) $\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1$; (11) $d^2 - e^2 + f^2 = 0$.

Nach § 4, (35) ist auch:

(12) $\tau = e - \frac{d}{e} x_0$, $\tau' = e + \frac{d}{e} x_0$.

Dabei sind die beiden voneinander unabhängigen Knickpunkte von r und r' in der Bezeichnung $C = x_0, y_0, 0$ nicht besonders unterschieden.

5. Größte und kleinste Werte der gebrochenen Entfernung. Während der Knickpunkt C die ganze Ellipse (10) durchläuft, bleibt die gebrochene Entfernung r in (7), die Summe der absoluten Entfernungen ϱ und τ immer endlich und größer als Null. Sie muß also wenigstens einmal einen kleinsten und einmal einen größten Wert erhalten.

Die gebrochene Entfernung $r = PCB_0$ und ebenso $r' = PCB_0'$ hat je wenigstens ein Minimum und ein Maximum.

6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Minima und Maxima. Um die extremen Werte zu bestimmen, betrachten wir r als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x_0, während wir y_0 durch (10) von x_0 abhängig gemacht denken. Dann ist der erste und zweite Differentialquotient von y_0 nach x_0:

(13) $$\frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{f^2}{e^2}\frac{x_0}{y_0}, \qquad \frac{d^2y_0}{dx_0^2} = -\frac{f^4}{e^2}\frac{1}{y_0^3}$$

und zugleich mit Rücksicht auf (10) und (11):

(14) $$1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + y_0\frac{d^2y_0}{dx_0^2} = \frac{d^2}{e^2}.$$

Ferner ist nach (8) für den ersten und zweiten Differentialquotienten von ϱ nach x_0:

(15) $$\varrho\frac{d\varrho}{dx_0} = (x_0 - x) + (y_0 - y)\frac{dy_0}{dx_0} = (x_0 - x) - \frac{f^2}{e^2}\frac{x_0}{y_0}(y_0 - y),$$

$$\varrho\frac{d^2\varrho}{dx_0^2} + \left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + (y_0 - y)\frac{d^2y_0}{dx_0^2},$$

oder mit Rücksicht auf (14) und (13):

(16) $$\varrho\frac{d^2\varrho}{dx_0^2} = -\left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 + \frac{d^2}{e^2} + \frac{f^4}{e^2}\frac{y}{y_0^3}.$$

Der erste und zweite Differentialquotient von r nach x_0 wird nach (7) mit Benutzung der Darstellung (12) von τ und der Formel (15):

(17) $$\frac{dr}{dx_0} = \frac{d\varrho}{dx_0} - \frac{d}{e} = \frac{x_0 - x}{\varrho} - \frac{f^2}{e^2}\frac{x_0}{y_0}\frac{y_0 - y}{\varrho} - \frac{d}{e},$$

(18) $$\frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{d^2\varrho}{dx_0^2}.$$

Mit Benutzung der Darstellung (9) von τ und der Formel (15) kann man den ersteren auch in der Form annehmen:

(19) $$\frac{dr}{dx_0} = \left(\frac{x_0 - x}{\varrho} + \frac{x_0 - d}{\tau}\right) - \frac{f^2}{e^2}\frac{x_0}{y_0}\left(\frac{y_0 - y}{\varrho} + \frac{y_0}{\tau}\right).$$

Die Werte von x_0, für die ein extremer Wert von r eintritt, müssen nun der Gleichung:

$$\frac{dr}{dx_0} = 0$$

genügen. Für einen solchen Wert von x_0 ist aber nach (17):

$$\frac{d\varrho}{dx_0} = \frac{d}{e}$$

und daher nach (18) und (16):

(20) $$\frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{f^4}{e^2y_0^2}\cdot\frac{y}{y_0}.$$

Hiernach tritt bei reellen x_0, y_0 im allgemeinen ($y \neq 0$, $y_0 \neq 0$) auch wirklich ein Minimum oder Maximum ein und zwar jenes oder dieses, jenachdem y_0 und y gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Die entsprechenden Formeln für r' gehen nach (9) und (12) durch Umkehr des Vorzeichens von d hervor.

Die gebrochene Entfernung r oder r' in (6), (7) *hat immer dann*

und nur dann einen extremen Wert, wenn der Knickpunkt $C = x_0, y_0, 0$ *neben* (10) *der Bedingung genügt:*

$$(21)\qquad \frac{dr}{dx_0} = 0 \qquad \text{oder} \qquad (21')\quad \frac{dr'}{dx_0} = 0,$$

und zwar ist sie dann ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem C *in bezug auf die* zx*-Ebene mit* P *gleichseitig oder ungleichseitig liegt.*

7. Geometrische Bedeutung der Bedingung (21). Die Bedingung (21) wird mit Einsetzung von (19):

$$(22)\qquad -\frac{y_0}{f^2}\left(\frac{x - x_0}{\varrho} + \frac{d - x_0}{\tau}\right) + \frac{x_0}{e^2}\left(\frac{y - y_0}{\varrho} + \frac{0 - y_0}{\tau}\right) = 0.$$

Da nun nach § 131, (9):

$$-q\frac{y_0}{f^2},\ q\frac{x_0}{e^2},\ 0;\qquad \frac{x - x_0}{\varrho},\ \frac{y - y_0}{\varrho},\ \frac{z}{\varrho};\qquad \frac{d - x_0}{\tau},\ \frac{0 - y_0}{\tau},\ 0$$

bezüglich die Richtungskosinus der Tangente der Ellipse § 131, (1) in $C = x_0, y_0, 0$ und der Strecken CP und CB_0 (I § 34, (7)) sind, so bedeutet die Gleichung (22) (I § 35, (9)):

Die gebrochene Entfernung r *oder* r' *in* (6) *hat für solche Lagen des Knickpunktes* C *auf der Fokalellipse einen extremen Wert, wo die innere Halbierungslinie der Strecken* CP *und* CB_0 *oder* CB_0' *auf der Tangente der Ellipse in* C *senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente sich zu* π *ergänzen* (Fig. 196).

Die gebrochene Entfernung bildet dann zugleich die *Gleichgewichtslage eines Fadens,* der in C über die Ellipse gleitet und in P und B_0 oder B_0' festgehalten wird, und zwar eine *stabile* für ein Minimum und eine *labile* für ein Maximum (eine *indifferente* für den in 4, 1. Absatz, erwähnten Ausnahmefall $P = B'$ bei r und $P = B$ bei r').

8. Die Anfangsstücke der Maxima und Minima als Fokallinien. Bildet die Strecke CB_0 eines extremen Wertes der gebrochenen Entfernung $r = PCB_0$ mit der gerichteten Tangente der Fokalellipse in C einen Winkel γ, so bildet nach 7 die Strecke CP mit dieser Tangente den Winkel $\pi - \gamma$.

Da aber die erstere Strecke den Punkt B_0 enthält, gehört sie nach 2 dem einen Mantel des von C über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels an. Dieser Mantel ist daher der Ort aller von C ausgehenden Halbstrahlen, die den Winkel γ mit der Tangente bilden, während der andere Mantel ebenso der Ort aller Halbstrahlen mit dem Winkel $\pi - \gamma$ ist. Somit gehört die Strecke CP diesem andern Mantel an, die unbegrenzte Gerade PC aber überhaupt dem

von C über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegel. Sie ist daher nach **3** eine Fokallinie des Punktes P.

Die gebrochene Entfernung $r = PCB_0$ *oder* $r' = PCB_0'$ *ist ein Maximum oder Minimum, wenn ihr Anfangsstück* PC *in eine der vier Fokallinien des Punktes* P *fällt und die Strecken* CP *und* CB_0 *oder* CB_0' *verschiedenen Mänteln des von* C *über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels angehören.*

9. Das zu einer Fokallinie gehörige Maximum oder Minimum. Umgekehrt gibt jede der vier Fokallinien des Punktes P immer entweder ein Maximum oder ein Minimum von r oder von r'. Denn ist C ihr Schnittpunkt mit der Fokalellipse, so gehört die Strecke CP nach **3** dem einen Mantel des von C über der Fokalhyperbel errichteten Kegels an, dessen erzeugende Halbstrahlen etwa den Winkel γ mit der Tangente der Ellipse in C bilden mögen. Die Strecken CB_0 und CB_0' gehören verschiedenen Mänteln desselben Kegels an, so daß die eine den Winkel γ, die andere den Winkel $\pi - \gamma$ mit der Tangente bildet. Eine von beiden gibt also, an PC angesetzt, eine gebrochene Entfernung, die der Bedingung (22) entspricht. Also:

Zu jeder der vier Fokallinien des Punktes P *gehört entweder ein Maximum oder ein Minimum der gebrochenen Entfernung* r *oder* r' *in* (6).

10. Die vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes. Da aber nach **5** r und r' wenigstens je ein Maximum und ein Minimum haben, so muß zu jeder der vier Fokallinien je ein solches gehören, und kann es nicht mehr als je eines für r und für r' geben.

Jede der beiden gebrochenen Entfernungen $r = PCB_0$ *und* $r' = PCB_0'$ *des Punktes* P *von einem Brennpunkt* B_0 *oder* B_0' *der Fokalellipse über diese hinweg* (Fig. 204) *hat ein Minimum* r_1 *und* r_1' *und ein Maximum* r_2 *und* r_2', *und zwar ist* (Fig. 205):

$$(23) \quad r_1 = PC_1B_0, \; r_2 = PC_2B_0; \quad r_1' = PC_3B_0', \; r_2' = PC_4B_0',$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 *die Schnittpunkte der vier Fokallinien des Punktes* P *mit der Fokalellipse in bestimmter Anordnung* (vgl. **11**) *bedeuten.*

Wir nennen r_1, r_2, r_1', r_2' *die vier gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes* P *über die Fokalellipse.*[3])

11. Lage der Punkte B_i, C_i **auf der Fokallinie** f_i. Nach **6** liegen in bezug auf die Ebene der Fokalhyperbel C_1 und C_3, die Knickpunkte der Minima, mit P gleichseitig, dagegen C_2 und C_4, die Knickpunkte der Maxima, ungleichseitig. Da aber der Schnittpunkt einer Fokallinie mit der zx-Ebene zugleich ihr Schnittpunkt mit der

Fokalhyperbel sein muß, so folgt: Ist B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ der Schnittpunkt der Fokallinie PC_i mit der Fokalhyperbel, so liegen B_1 und B_3 außerhalb der Strecken PC_1 und PC_3, dagegen B_2 und B_4 innerhalb der Strecken PC_2 und PC_4 (Fig. 205).

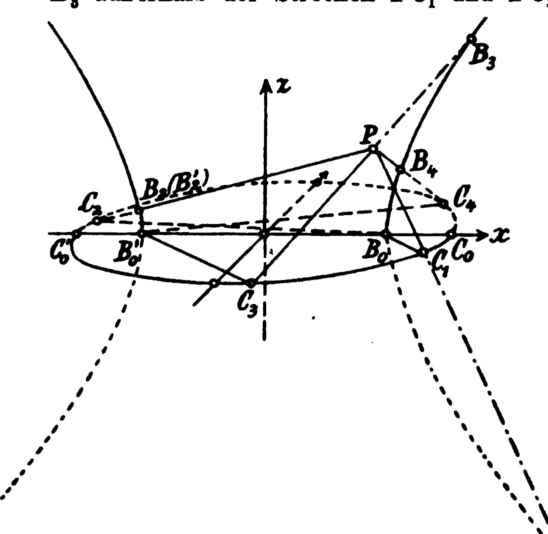


Fig. 205.

Die beiden Strecken C_1P und C_1B_0 von r_1 gehören nach 8 verschiedenen Mänteln des von C_1 über der Fokalhyperbel errichteten Kegels an, die eine dem linken, auf dem der linkè Hyperbelzweig liegt, die andere dem rechten. Dasselbe gilt von den beiden Strecken C_2P und C_2B_0, C_3P und C_3B_0', C_4P und C_4B_0'.

B_1 liegt außerhalb der Strecke PC_1, so daß die Folge der drei Punkte PC_1B_1 (Fig. 205) oder B_1PC_1 ist. Da nun C_1B_0 dem rechten Mantel des von C_1 über der Fokalhyperbel errichteten Kegels angehört, gehört C_1P dem linken an. Daher muß B_1 bei der Folge PC_1B_1 auf dem rechten, bei der Folge B_1PC_1 auf dem linken Hyperbelzweig liegen.

B_2 liegt innerhalb der Strecke PC_2. Da nun C_2B_0 in B_0 den rechten Hyperbelzweig trifft, muß B_2 auf dem linken liegen.

Entsprechendes gilt für B_3 und B_4. Bezeichnen wir daher allgemein Punkte des rechten Hyperbelzweiges mit B, des linken mit B', so ergibt sich:

Die Lage der Schnittpunkte der vier Fokallinien des Punktes P mit der Fokalellipse und Fokalhyperbel ist durch die Folgen bezeichnet (Fig. 203):

$$(24) \qquad \begin{cases} f_1 = PC_1B_1 \text{ oder } B_1'PC_1, & f_2 = PB_2'C_2, \\ f_3 = PC_3B_3' \text{ oder } B_3PC_3, & f_4 = PB_4C_4. \end{cases}$$

Dadurch ist auch die Benennung der vier Fokallinien mit f_1, f_2, f_3, f_4 und die Verteilung der Minima und Maxima (23) auf sie bestimmt.

12. Ungleichung für die gebrochenen Fokaldistanzen. Infolge

der in **10** eingeführten Bezeichnung der größten und kleinsten Werte ist zunächst:

(25) $$r_2 > r_1, \quad r_2' > r_1'.$$

Ferner ist in dem räumlichen Viereck $C_1PC_3B_0'C_1$ (Fig. 205) die Summe von drei Seiten größer als die vierte (in Fig. 205 nicht ausdrücklich gezeichnete), also:

$$\overline{C_1P} + \overline{PC_3} + \overline{C_3B_0'} > \overline{C_1B_0'}.$$

Addiert man zu dieser Ungleichung die aus der Fokaleigenschaft der Ellipse § 1, (9) folgende Gleichung:

$$\overline{C_1B_0} + \overline{C_1B_0'} = 2e,$$

so ergibt sich mit Weghebung von $\overline{C_1B_0'}$:

$$\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0} + \overline{PC_3} + \overline{C_3B_0'} > 2e$$

oder nach (23):

$$r_1 + r_1' > 2e.$$

Schreibt man diese Ungleichung in der Form:

$$2(r_1 + r_1') - 4e > 0$$

und addiert beiderseits $r_2 + r_2' - r_1 - r_1'$, so folgt:

(26) $$r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1'.$$

Endlich ist die Summe der beiden nach (25) positiven Größen $r_2 - r_1$ und $r_2' - r_1'$ größer als der absolute Wert ihrer Differenz:

(27) $$(r_2 - r_1) + (r_2' - r_1') > |(r_2 - r_1) - (r_2' - r_1')|.$$

Durch Verbindung von (26) und (27) folgt daher:

Zwischen den vier gebrochenen Fokaldistanzen (23) *eines beliebigen Punktes P bestehen die Ungleichungen:*

(28) $$r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1' > |r_2 - r_2' - r_1 + r_1'|,$$

wo der Einschluß des dritten Ausdruckes in Vertikalstriche dessen absoluten Wert bezeichnet.

§ 133. Gebrochene Distanzen über Fokalellipse und Fokalhyperbel.

1. Distanzdifferenzen über die Fokalellipse. Wenn man statt der extremen Werte der Summen § 132, (7) die extremen Werte der Differenzen:

(1) $$m = -\overline{PC} + \overline{CB_0} = -\varrho + \tau, \quad m' = -\overline{PC} + \overline{CB_0'} = -\varrho + \tau'$$

sucht, so hat man die Entwicklungen § 132, **6—10** im wesentlichen zu wiederholen, nur mit umgekehrtem Vorzeichen von ϱ.

Die Gleichung § 132, (22) gibt mit dieser Änderung den Satz (I § 35, (9)):

Die Differenz m oder m' hat für solche Lagen des Knickpunktes C auf der Fokalellipse einen extremen Wert, wo die äußere Halbierungslinie der Strecken CP und CB_0 oder CB_0' auf der Tangente in C senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente gleich sind (§ 132, 7).

Hieran schließt sich, wie § 132, 8 die weitere Folgerung:

Die Differenz m oder m' ist ein Maximum oder Minimum, wenn das Anfangsstück PC in eine der vier Fokallinien des Punktes P fällt und die Strecken CP und CB_0 oder CB_0' demselben Mantel des von C über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels angehören.

Die Differenz m hat daher, wie in § 132, **9—10**, *ein Minimum* m_1 und *ein Maximum* m_2 und die Differenz m' *ein Minimum* m_1' und *ein Maximum* m_2', und *zu jeder Fokallinie gehört einer der extremen Werte* m_1, m_2, m_1', m_2'.

2. Beziehung zwischen den extremen Werten der Differenz und der Summe. Für alle Punkte C der Fokalellipse § 131, (1) ist nach § 1, (9):

$$\overline{CB_0} + \overline{CB_0'} = 2e \tag{2}$$

und daher auch bei beliebigem P:

$$\begin{cases} (\overline{PC} + \overline{CB_0}) + (-\overline{PC} + \overline{CB_0'}) = r + m' = 2e, \\ (\overline{PC} + \overline{CB_0'}) + (-\overline{PC} + \overline{CB_0}) = r' + m = 2e. \end{cases} \tag{3}$$

Für einen Punkt C, für den r oder r' (vgl. § 132, (7)) ein Minimum ist, ist daher m' oder m ein Maximum und umgekehrt. Während daher nach § 132, (23):

$$\begin{cases} r_1 = \overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}, & r_2 = \overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}, \\ r_1' = \overline{PC_3} + \overline{C_3B_0'}, & r_2' = \overline{PC_4} + \overline{C_4B_0'}, \end{cases} \tag{4}$$

ist gegenwärtig (Fig. 205):

$$\begin{cases} m_1 = -\overline{PC_4} + \overline{C_4B_0}, & m_2 = -\overline{PC_3} + \overline{C_3B_0}, \\ m_1' = -\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0'}, & m_2' = -\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0'}. \end{cases} \tag{5}$$

Ferner stehen die extremen Werte der Summen und die der Differenzen in der Beziehung:

$$r_1 + m_2' = r_2 + m_1' = r_1' + m_2 = r_2' + m_1 = 2e. \tag{6}$$

3. Distanzsummen und Distanzdifferenzen über die Fokalhyperbel. Für die Summen § 132, (7) und die Differenzen § 133, (1)

war der Anfangspunkt P ein beliebiger fester Punkt des Raumes, der Endpunkt B_0, B_0' ein Brennpunkt der *Fokalellipse* und der Knickpunkt C ein laufender Punkt der *Fokalellipse*.

Wir betrachten jetzt die Summen:

$$(7) \qquad s = \overline{PB} + \overline{BC_0}, \quad s' = \overline{PB} + \overline{BC_0'}$$

und die Differenzen:

$$(8) \qquad n = -\overline{PB} + \overline{BC_0}, \quad n' = -\overline{PB} + \overline{BC_0'},$$

wo der Anfangspunkt P derselbe feste Punkt wie vorhin, der Endpunkt C_0, C_0' ein Brennpunkt der *Fokalhyperbel* und der Knickpunkt B ein laufender Punkt der *Fokalhyperbel* ist, und suchen wieder die Maxima und Minima der vier Größen (7) und (8).

Wir haben dann in den Entwicklungen § 132, **6**—**10** e und d, y und z, f^2 und $-f^2$ zu vertauschen (§ 131, (1); (2)) und erhalten als Bedeutung der danach veränderten Gleichung § 132, (22) entsprechend § 132, **8** und § 133, **1**:

Die Summe $s\,(s')$ und die Differenz $n\,(n')$ ist ein Maximum oder Minimum, wenn das Anfangsstück PB in eine der vier Fokallinien des Punktes P fällt, und die Strecken BP und $BC_0\,(BC_0')$ für die Summe verschiedenen Mänteln, für die Differenz demselben Mantel des von B über der Fokalellipse errichteten Drehungskegels angehören.

4. Anzahl und Verteilung der extremen Werte. Die Summen r, r' und die Differenzen m, m' mit auf der *Fokalellipse* laufendem Knickpunkt C hatten *im Ganzen acht extreme Werte* (4); (5), von denen *zu jeder Fokallinie je ein extremer Summenwert und ein extremer Differenzwert gehörte.*

Auch die Summen s, s' und die Differenzen n, n' mit auf der *Fokalhyperbel* laufendem Knickpunkt B haben *im Ganzen acht extreme Werte*, da jede der vier Fokallinien, in die die Anfangsstücke PB der extremen Werte fallen müssen (§ 132, Fig. 203), von B nach C_0 oder C_0' fortgesetzt werden kann, und jede solche Fortsetzung einen extremen Wert entweder von s, s' oder n, n' ergibt.

Es wird sich nun zeigen, daß hier, anders wie bei der Ellipse, *zu zwei Fokallinien je zwei extreme Summenwerte und zu den zwei andern Fokallinien je zwei extreme Differenzwerte gehören.*

Der Grund für diesen Unterschied liegt in der Verschiedenheit der Fokaleigenschaft der Ellipse, die in der Formel (2) ausgesprochen ist, und der der Hyperbel, die in die Formeln (§ 1, 8):

$$(9) \qquad \overline{BC_0'} - \overline{BC_0} = 2d, \quad \overline{B'C_0} - \overline{B'C_0'} = 2d$$

zerfällt, wenn B den laufenden Punkt des rechten und B' den des linken Hyperbelzweiges bezeichnet. Infolge hiervon ist bei beliebigem P:

$$(10)\quad \begin{cases} (\overline{PB} + \overline{BC_0'}) - (\overline{PB} + \overline{BC_0}) = 2d, \\ (\overline{PB'} + \overline{B'C_0}) - (\overline{PB'} + \overline{B'C_0'}) = 2d, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (-\overline{PB} + \overline{BC_0'}) - (-\overline{PB} + \overline{BC_0}) = 2d, \\ (-\overline{PB'} + \overline{B'C_0}) - (-\overline{PB'} + \overline{B'C_0'}) = 2d. \end{cases}$$

5. Minima der Distanzsummen über die Fokalhyperbel. Je zwei der vier Summen auf den linken Seiten von (10) haben also gleichzeitig kleinste und gleichzeitig größte Werte. Sie können aber solche nur haben, wenn (Fig. 203) die Anfangsstücke in eine der beiden Fokallinien $f_2 = PB_2'C_2$ oder $f_4 = PB_4C_4$ fallen, da dann die Strecken $B_2'P$ und $B_2'C_0$ oder $B_2'C_0'$, bezüglich B_4P und B_4C_0 oder B_4C_0' *verschiedenen* Mänteln des von B_2', bezüglich B_4 über der Fokalellipse errichteten Drehungskegels angehören, während Entsprechendes bei f_1 und f_3 (§ 132, (24)) nicht der Fall ist. Da überdies (§ 132, (24)) P und B_2', wie P und B_4, auf gleicher Seite der xy-Ebene liegen, so handelt es sich nach § 132, 6 (in Formel (20) daselbst e und d, y und z, f^2 und $-f^2$ vertauscht) um Minima.

Es gibt daher in:

$$(12)\quad \begin{cases} s_1 = \overline{PB_4} + \overline{B_4C_0}, & s_2 = \overline{PB_2'} + \overline{B_2'C_0}, \\ s_1' = \overline{PB_2'} + \overline{B_2'C_0'}, & s_2' = \overline{PB_4} + \overline{B_4C_0'} \end{cases}$$

(Fig. 203) *bezüglich ein Minimum der gebrochenen Entfernung des Punktes P von dem rechten und linken Brennpunkt der Hyperbel, je entweder über den gleichnamigen* (s_1, s_1') *oder über den ungleichnamigen Zweig* (s_2, s_2') *derselben hinweg. Zugleich ist:*

$$(13)\qquad s_2 - s_1' = s_2' - s_1 = 2d.$$

6. Maxima und Minima der Distanzdifferenzen über die Fokalhyperbel. Je zwei der vier Differenzen in (11) haben ebenfalls gleichzeitig kleinste und gleichzeitig größte Werte. Ihre Anfangsstücke fallen alsdann in die beiden noch übrigen Fokallinien f_1 und f_3. Da Formel § 132, (20) hier mit Vertauschung von e und d, y und z, f^2 und $-f^2$ und mit umgekehrtem Vorzeichen von ϱ anzuwenden ist, findet ein Minimum oder ein Maximum statt, je nachdem der Knickpunkt $B_1 (B_1')$ oder $B_3 (B_3')$ in bezug auf die xy-Ebene mit P ungleichseitig oder gleichseitig liegt.

Daher sind für $f_1 = PC_1B_1$ (§ 132, (24)) die Differenzen $-\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0}$ und $-\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0'}$ und für $f_3 = PC_3B_3'$ die Differenzen

$-\overline{PB_3'} + \overline{B_3'C_0}$ und $-\overline{PB_3'} + \overline{B_3'C_0'}$ sämtlich Minima; für $f_1 = B_1'PC_1$ die Differenzen $-\overline{PB_1'} + \overline{B_1'C_0}$ und $-\overline{PB_1'} + \overline{B_1'C_0'}$ und für $f_3 = B_3PC_3$ die Differenzen $-\overline{PB_3} + \overline{B_3C_0}$ und $-\overline{PB_3} + \overline{B_3C_0'}$ sämtlich Maxima.

Um nun eine für alle Fälle gültige Abzählung der Maxima und Minima von n und n' zu erreichen, *ersetzen wir die Definitionen* (8) *durch die Doppeldefinitionen:*

$$(14)\qquad n = \begin{cases} \overline{PB} - \overline{BC_0}, \\ -\overline{PB'} + \overline{B'C_0}, \end{cases} \quad n' = \begin{cases} \overline{PB'} - \overline{B'C_0'}, \\ -\overline{PB} + \overline{BC_0'}, \end{cases}$$

Geht nämlich der Knickpunkt B durch das Unendliche hindurch von einem Hyperbelzweig auf den andern über, so wechselt die Differenz n in (8) ihr Vorzeichen. Denn entfernt sich (Fig. 206, gezeichnet in der Ebene der beiden durch P und C_0 zu der betreffenden Asymptote der Fokalhyperbel gezogenen Parallelen) B auf dem rechten Zweige als B_∞ unendlich weit nach oben, so werden die Strecken PB und BC_0 parallel und wird die Differenz $-\overline{PB_\infty} + \overline{B_\infty C_0} = \overline{C_0Q}$, wenn Q der Fußpunkt des von P auf die zweite Strecke gefällten Perpendikels ist. Erscheint dagegen B auf dem linken Zweig unten als B_∞',

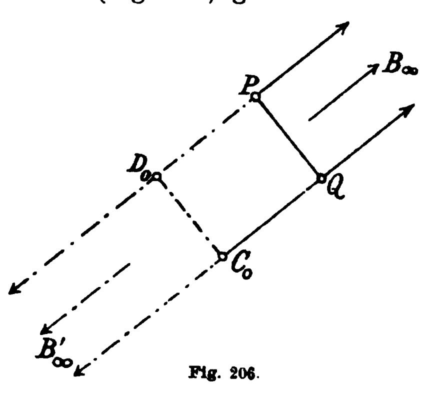


Fig. 206.

so wird $-\overline{PB_\infty'} + \overline{B_\infty'C_0} = -\overline{PD_0} = -\overline{C_0Q}$, wenn D_0 der Fußpunkt des von C_0 auf die erste Strecke gefällten Perpendikels ist. Beim Übergang des Knickpunktes von dem rechten Zweig (B) auf den linken (B') geht also die Differenz $\overline{PB} - \overline{BC_0}$ stetig in $-\overline{PB'} + \overline{B'C_0}$ über. *Die durch die Doppelformeln* (14) *definierten Differenzen n und n' bleiben daher, während B, B' die ganze Fokalhyperbel durchläuft, immer endlich und stetig und haben daher je ein Minimum n_1 und n_1' und je ein Maximum n_2 und n_2'.*

Diese Minima und Maxima sind aber nach der eben gegebenen Bestimmung der Minima und Maxima von (8) die folgenden:

$$(15)\begin{cases} \text{für } f_1 = PC_1B_1\colon & n_1' = -\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0'}, & n_2 = \overline{PB_1} - \overline{B_1C_0}; \\ \text{für } f_1 = B_1'PC_1\colon & n_1' = \overline{PB_1'} - \overline{B_1'C_0'}, & n_2 = -\overline{PB_1'} + \overline{B_1'C_0}; \\ \text{für } f_3 = PC_3B_3'\colon & n_1 = -\overline{PB_3'} + \overline{B_3'C_0}, & n_2' = \overline{PB_3'} - \overline{B_3'C_0'}; \\ \text{für } f_3 = B_3PC_3\colon & n_1 = \overline{PB_3} - \overline{B_3C_0}, & n_2' = -\overline{PB_3} + \overline{B_3C_0'}. \end{cases}$$

Danach gehört zu f_1 stets das Minimum von n' und das Maximum von n, zu f_3 stets das Minimum von n und das Maximum von n'.

Dabei ist mit Rücksicht auf (11) immer:

$$n_1 + n_2' = n_1' + n_2 = 2d. \tag{16}$$

7. **Beziehung der gebrochenen Distanzen über die Hyperbel zu denen über die Ellipse.** Zwischen den Strecken auf den einzelnen Fokallinien gelten mit Rücksicht auf § 132, (24) die Beziehungen:

$$\begin{cases} \text{für } f_1 = PC_1B_1\colon\ \overline{B_1C_1} = \overline{PB_1} - \overline{PC_1}, \\ \text{für } f_1 = B_1'PC_1\colon\ \overline{B_1'C_1} = \overline{PB_1'} + \overline{PC_1}; \\ \text{für } f_2 = PB_2'C_2\colon\ \overline{B_2'C_2} = \overline{PC_2} - \overline{PB_2'}; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \text{für } f_3 = PC_3B_3'\colon\ \overline{B_3'C_3} = \overline{PB_3'} - \overline{PC_3}, \\ \text{für } f_3 = B_3PC_3\colon\ \overline{B_3C_3} = \overline{PB_3} + \overline{PC_3}; \\ \text{für } f_4 = PB_4C_4\colon\ \overline{B_4C_4} = \overline{PC_4} - \overline{PB_4}. \end{cases} \tag{18}$$

Setzt man nun für BC und $B'C$ in § 131, (18) die Werte (17) und in § 131, (17) die Werte (18) hier, so ergibt sich:

$$\overline{B_0C_1} - \overline{PB_1} + \overline{PC_1} + \overline{B_1C_0'} = d + e, \quad \overline{B_0C_1} + \overline{PB_1'} + \overline{PC_1} - \overline{B_1'C_0'} = d + e;$$

$$\overline{B_0C_2} + \overline{PC_2} - \overline{PB_2'} - \overline{B_2'C_0'} = d + e;$$

$$\overline{B_0'C_3} - \overline{PB_3'} + \overline{PC_3} + \overline{B_3'C_0} = d + e, \quad \overline{B_0'C_3} + \overline{PB_3} + \overline{PC_3} - \overline{B_3C_0} = d + e;$$

$$\overline{B_0'C_4} + \overline{PC_4} - \overline{PB_4} - \overline{B_4C_0} = d + e.$$

Hieraus folgt aber mit den Bezeichnungen (4), (12), (15):

Die gebrochenen Distanzen r_1, r_2, r_1', r_2' über die Fokalellipse stehen zu den gebrochenen Distanzen s_1, s_1', n_1, n_1' über die Fokalhyperbel in der Beziehung:

$$r_1 + n_1' = r_2 - s_1' = r_1' + n_1 = r_2' - s_1 = d + e. \tag{19}$$

Zuzüglich der Formeln (6), (13), (16) sind damit alle sechzehn extremen Werte gebrochener Distanzen über Ellipse und Hyperbel auf r_1, r_2, r_1', r_2' zurückgeführt. Man kann die Beziehungen folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{cases} \text{auf } f_1\colon\ r_1 - e = e - m_2' = d - n_1' = n_2 - d; \\ \text{auf } f_2\colon\ r_2 - e = e - m_1' = d + s_1' = s_2 - d; \\ \text{auf } f_3\colon\ e - r_1' = m_2 - e = n_1 - d = d - n_2'; \\ \text{auf } f_4\colon\ e - r_2' = m_1 - e = -d - s_1 = d - s_2'. \end{cases} \tag{20}$$

8. **Die vier gebrochenen Haupt-Fokaldistanzen eines Punktes.** Unter den vier gebrochenen Fokaldistanzen in bezug auf die *Fokal-*

ellipse (§ 132, (23)) sind r_1 und r_1' *Minima* und r_2 und r_2' *Maxima*. Die letzteren kann man nach (19) durch die Formeln:

$$(21) \qquad r_2 = s_1' + d + e, \quad r_2' = s_1 + d + e$$

auf zwei gebrochene Fokaldistanzen in bezug auf die *Fokalhyperbel* zurückführen, die nach (12) ebenfalls *Minima* sind.

Es sind dann (Fig. 207):

$$(22) \qquad r_1 = PC_1B_0 \quad \text{und} \quad r_1' = PC_3B_0'$$

die kürzesten Entfernungen des Punktes P von dem rechten und linken Brennpunkt der Fokalellipse über die Fokalellipse und:

$$(23) \qquad s_1 = PB_4C_0 \quad \text{und} \quad s_1' = PB_2'C_0'$$

die kürzesten Entfernungen von dem rechten und linken Brennpunkt der Fokalhyperbel je über den gleichnamigen Zweig der Fokalhyperbel.

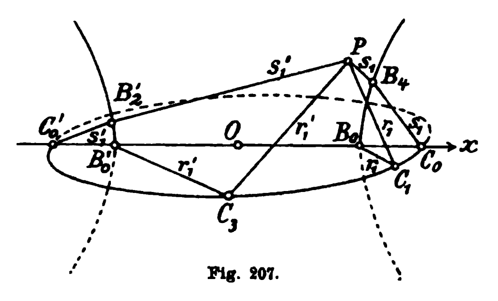


Fig. 207.

Sie sind alle vier *stabile Gleichgewichtslagen eines Fadens*, der in dem betreffenden Brennpunkt befestigt ist, über den entsprechenden Fokalkegelschnitt frei gleitet und im Punkte P gespannt gehalten wird. Sie heißen *Hauptfokaldistanzen.*

9. Symmetrie in bezug auf die yz-Ebene. Aus der Symmetrie der Fokalkegelschnitte in bezug auf die yz-Ebene folgt: Ist von zwei Punkten, $P = x, y, z$ und $P = -x, y, z$, der eine das Spiegelbild des andern in bezug auf die yz-Ebene, so sind die in B_0 und C_0 endigenden Hauptfokaldistanzen der einen auch die Spiegelbilder der in B_0' und C_0' endigenden der andern, also auch entsprechend gleich groß.

Für einen Punkt *der yz-Ebene selbst* ist:

$$(24) \qquad r_1 = r_1' \qquad s_1 = s_1'.$$

Liegt P rechts von der yz-Ebene, so ist die kürzeste Entfernung r_1 von dem näheren Brennpunkt B_0 kleiner als die kürzeste Entfernung r_1' von dem ferneren B_0', ebenso $s_1 < s_1'$. *Allgemein ist daher:*

$$(25) \qquad r_1 < r_1', \; s_1 < s_1' \quad \text{oder} \quad r_1 > r_1', \; s_1 > s_1',$$

beziehungsweise nach (21):

$$(26) \qquad r_1 < r_1', \; r_2' < r_2 \quad \text{oder} \quad r_1 > r_1', \; r_2' > r_2,$$

jenachdem P rechts oder links von der yz-Ebene liegt.

§ 134. Die Fokaleigenschaften der Mittelpunktsflächen.

1. Gleichungen der Knickpunkte der gebrochenen Fokaldistanzen. Die Bestimmung der vier Fokallinien eines Punktes P führt algebraisch auf eine *biquadratische Gleichung.* Denn entweder hat man die vier Schnittlinien zweier Kegel zweiter Ordnung (§ 132, (1), (2)) zu ermitteln oder die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, nämlich die Schnittpunkte B_ι der Fokalhyperbel mit der Zentralprojektion der Fokalellipse von P auf die zx-Ebene oder *die Schnittpunkte C_ι der Fokalellipse mit der Zentralprojektion der Fokalhyperbel von P auf die xy-Ebene* (Fig. 203).[186])

Die Punkte $C_\iota = x_0, y_0, 0$ sind nach § 132, 10 zugleich die *Knickpunkte der vier gebrochenen Fokaldistanzen* r_1, r_2, r_1', r_2' über die Fokalellipse, also diejenigen, für welche die gebrochenen Entfernungen (§ 132, (7); (12); (8)):

(1) $$r = \varrho + e - \frac{dx_0}{e} \qquad \text{oder} \qquad (1')\quad r' = \varrho + e + \frac{dx_0}{e}$$

mit:

(2) $$\varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

einen extremen Wert erhalten. Nach § 132, (10); (21), (21′) und (17) genügen diese Knickpunkte den Bedingungen:

(3) $$\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad x_0^2 - \frac{d^2}{e^2}x_0^2 + y_0^2 = f^2$$

und:

(4) $$-e^2y_0(x_0 - x) + f^2x_0(y_0 - y) + dey_0\varrho = 0,$$

(4′) $$-e^2y_0(x_0 - x) + f^2x_0(y_0 - y) - dey_0\varrho = 0.$$

Macht man die Gleichungen (4) und (4′) durch Multiplikation rational und setzt den Wert (2) für ϱ^2 ein, so vereinigen sie sich zu:

$$\{-e^2y_0(x_0-x) + f^2x_0(y_0-y)\}^2 - d^2e^2y_0^2\{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + z^2\} = 0,$$

eine Gleichung, die sich unter Benutzung von (3) und § 132, (11) auf die Form bringen läßt:

$$e^2f^2\{y_0(x_0 - x) - x_0(y_0 - y)\}^2 - d^2e^2f^2(y_0 - y)^2 - d^2e^2y_0^2z^2 = 0$$

oder:

(5) $$\frac{(xy_0 - yx_0)^2}{d^2} - \frac{z^2y_0^2}{f^2} - (y_0 - y)^2 = 0.$$

Diese Gleichung, die mit $X = x_0$, $Y = y_0$, $Z = 0$ aus § 132, (2) hervorgeht, stellt daher in der Tat die *Zentralprojektion der Fokalhyperbel* von $P = x, y, z$ auf die Ebene der Fokalellipse in laufenden Koordinaten x_0, y_0 dar. Aus (3) und (5) wären die vier Punkte $C_\iota = x_0, y_0, 0$ zu bestimmen.

Die Gleichungen sind überdies vom Vorzeichen von ϱ unabhängig, wie denn die Maxima und Minima der *Differenzen* m, m' in § 133, (1) dieselben Knickpunkte haben, wie die *Summen* r, r'.

2. Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen. Mit der Bestimmung der vier Punkte $C_i = x_0, y_0, 0$ sind auch die entsprechenden Werte von r und r', also r_1, r_2 und r_1', r_2' in § 132, (23) bestimmt. Man hat nur die Werte x_0, y_0, jenachdem sie der Gleichung (4) oder (4') genügen, in (1) oder (1') einzusetzen. Es sind ferner auch die vier Fokallinien $f_i = PC_i$ und deren Schnittpunkte B_i mit der Ebene $y = 0$ durch die Punkte C_i bestimmt.

Statt indessen auf diese Weise alle unbekannten Bestandteile der gebrochenen Fokaldistanzen auf *die biquadratische Gleichung der Schnittpunkte der Kegelschnitte* (3) *und* (5) zurückzuführen, wollen wir unmittelbar eine Gleichung für r, r_2, r_1', r_2' selbst herstellen und auf diese die übrigen Unbekannten zurückführen.[190] Die herzustellende Gleichung ist ebenfalls vom vierten Grade. Wir nennen sie die *biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen*. Um sie zu erhalten, eliminieren wir x_0, y_0 aus (1), (3), (4) und aus (1'), (3), (4').

3. Ableitung der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen. Nach § 132, (11) kann man die Gleichungen (4) in der Form schreiben:

(6) $$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 + d e y_0 \varrho = 0,$$

(6') $$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 - d e y_0 \varrho = 0.$$

Durch Elimination von ϱ aus (1) und (6) folgt nun:

$$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 + d e y_0\left(r - e + \frac{d x_0}{e}\right) = 0,$$

$$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 - d e y_0\left(r' - e - \frac{d x_0}{e}\right) = 0,$$

oder:

(7) $\{d(r-e)+ex\}\frac{y_0}{f} - fy\frac{x_0}{e} = 0,$ (7') $\{d(e-r')+ex\}\frac{y_0}{f} - fy\frac{x_0}{e} = 0.$

Führt man jetzt für $r - e$ und $e - r'$ die gemeinsame Bezeichnung $4t$ ein:

(8) $$t = \frac{r-e}{4}, \quad \frac{e-r'}{4},$$

so laufen die Gleichungen (7) und (7') in die eine zusammen:

(9) $$(4dt + ex)\frac{y_0}{f} - fy\frac{x_0}{e} = 0,$$

während (1) und (1') die Form erhalten:

(10) $4t + \frac{d x_0}{e} - \varrho = 0,$ (10') $4t + \frac{d x_0}{e} + \varrho = 0,$

oder zusammengefaßt und mit Einsetzung des Wertes (2):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2-\left(4t+\frac{dx_0}{e}\right)^2=0.$$

Die Entwicklung dieser Gleichung gibt mit Rücksicht auf (3):

$$x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0+f^2-16t^2-8\frac{dtx_0}{e}=0.$$

Mit Hinzunahme von (9) hat man daher zwei lineare Gleichungen für x_0 und y_0:

$$(11)\qquad \begin{cases}(4dt+ex)\dfrac{x_0}{e}+fy\dfrac{y_0}{f}=\dfrac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2}-8t^2,\\ fy\dfrac{x_0}{e}-(4dt+ex)\dfrac{y_0}{f}=0,\end{cases}$$

deren Auflösungen nach x_0 und y_0 werden:

$$(12)\qquad \begin{cases}\{(4dt+ex)^2+f^2y^2\}\dfrac{x_0}{e}=(4dt+ex)\left\{\dfrac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2}-8t^2\right\},\\ \{(4dt+ex)^2+f^2y^2\}\dfrac{y_0}{f}=fy\left\{\dfrac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2}-8t^2\right\}.\end{cases}$$

Durch Quadrieren und Addieren geht hieraus hervor mit Rücksicht auf (3):

$$(4dt+ex)^2+f^2y^2=\left\{\frac{x^2+y^2+z^2+f^2}{2}-8t^2\right\}^2$$

oder:

$$64t^4-8(x^2+y^2+z^2+f^2+2d^2)t^2-8dext$$
$$+\tfrac{1}{4}\{(x^2+y^2+z^2+f^2)^2-4e^2x^2-4f^2y^2\}=0.$$

Mit Hinblick auf (8) folgt daher:

Sind r_1, r_2, r_1', r_2' die vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes $P=x,y,z$ über die Fokalellipse, so genügen die Differenzen:

$$(13)\qquad t_1=\frac{r_1-e}{4},\quad t_2=\frac{r_2-e}{4},\quad t_1'=\frac{e-r_1'}{4},\quad t_2'=\frac{e-r_2'}{4}$$

der „biquadratischen Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen“:

$$(14)\qquad t^4-\tfrac{1}{8}(x^2+y^2+z^2+d^2+e^2)t^2-\tfrac{1}{8}dext$$
$$+\tfrac{1}{256}\{(x^2+y^2+z^2+f^2)^2-4e^2x^2-4f^2y^2\}=0.$$

4. Andere Wurzeln der Gleichung (14). Da die Gleichungen (10) und (10′) zusammengefaßt wurden, hängt die Gleichung (14) *nicht vom Vorzeichen von* ϱ ab, wie ihr denn auch nach § 133, (20) die Differenzen:

$$\frac{m_1-e}{4},\quad \frac{m_2-e}{4},\quad \frac{e-m_1'}{4},\quad \frac{e-m_2'}{4}$$

genügen.

Die Gleichung (14) bleibt ungeändert bei Vertauschung von d und e, y und z, f^2 und $-f^2$. Sie gehört also *in gleicher Weise zur*

Fokalhyperbel wie zur Fokalellipse § 131, (1); (2). In der Tat genügen ihr nach § 133, (20) auch die mit den gebrochenen Fokaldistanzen *über die Fokalhyperbel* gebildeten Differenzen:

$$-\frac{d+s_1}{4}=\frac{d-s_2'}{4},\quad \frac{d+s_1'}{4}=\frac{s_2-d}{4},\quad \frac{d-n_1'}{4}=\frac{n_2-d}{4},\quad \frac{n_1-d}{4}=\frac{d-n_2'}{4}.$$

5. Summen je zweier gebrochenen Fokaldistanzen. Da in der Gleichung (14) das Glied t^3 fehlt, ist die Summe der vier Wurzeln Null, also nach (13):

Zwischen den vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die Fokalellipse besteht stets die Beziehung:

$$(15)\qquad r_1+r_2-r_1'-r_2'=0.$$

6. Die Resolvente der biquadratischen Gleichung (14). Die Resolvente der biquadratischen Gleichung:

$$t^4+lt^2+mt+n=0$$

ist die Gleichung sechsten Grades:[189]

$$T^6+8lT^4+16(l^2-4n)T^2-64m^2=0,$$

und die sechs Wurzeln: $\pm T_1$, $\pm T_2$, $\pm T_3$ dieser stehen mit den vier Wurzeln t_1, t_2, t_1', t_2' jener in der Beziehung:

$$(16)\quad T_1=t_1+t_2-t_1'-t_2',\quad T_2=-t_1+t_2+t_1'-t_2',\quad T_3=-t_1+t_2-t_1'+t_2'.$$

Nimmt man, um diesen Satz auf die Gleichung (14) anzuwenden:

$$l=-\tfrac{1}{8}(x^2+y^2+z^2+d^2+e^2),\quad m=-\tfrac{1}{8}dex,$$
$$n=\tfrac{1}{256}\{(x^2+y^2+z^2+f^2)^2-4e^2x^2-4f^2y^2\},$$

so erhält man als Resolvente der Gleichung (14) mit Benutzung von § 132, (11):

$$T^6-(x^2+y^2+z^2+d^2+e^2)T^4$$
$$+\{(d^2+e^2)x^2+e^2y^2+d^2z^2+d^2e^2\}T^2-d^2e^2x^2=0$$

oder auch:

$$-(T^2-d^2)(T^2-e^2)x^2-T^2(T^2-e^2)y^2-T^2(T^2-d^2)z^2$$
$$+T^2(T^2-d^2)(T^2-e^2)=0.$$

Indem wir die Unbekannte T mit a bezeichnen und die Summen (16) mittels (13) ausdrücken, ergibt sich:

Die biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2' irgendeines Punktes $P=x, y, z$ über die Fokalellipse hat als Resolvente sechsten Grades mit den Wurzeln:

$$(17)\ \pm\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4},\quad \pm\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4},\quad \pm\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}$$

die folgende Gleichung:

$$(18) \qquad -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}=0.$$

Es besteht daher die in a, sowie in x, y, z identische Gleichung (§ 1, (6)):[4])

$$(19) \qquad \begin{cases} -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\} \\ =\left(a+\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)\left(a-\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right) \\ \times\left(a+\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)\left(a-\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right) \\ \times\left(a+\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)\left(a-\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right). \end{cases}$$

7. Realität der sechs Wurzeln der Resolvente. Da für die Funktion:

$$f(a^2)=-(a^2-d^2)(a^2-e^2)x^2-a^2(a^2-e^2)y^2-a^2(a^2-d^2)z^2$$
$$+a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)$$

der Veränderlichen a^2, wie § 120, 5:

$$f(0)=-d^2e^2x^2,\ f(d^2)=d^2(e^2-d^2)y^2,\ f(e^2)=-e^2(e^2-d^2)z^2,\ f(+\infty)=+\infty,$$

und nach § 132, (11) $e^2>d^2$, so folgt:

Die in a^2 kubische Gleichung (18) *hat drei positive reelle Wurzeln a_1^2, a_2^2, a_3^2, die zwischen den Grenzen liegen:*

$$(20) \qquad 0<a_3^2<d^2<a_2^2<e^2<a_1^2<+\infty,$$

wobei die Grenzen selbst zulässig sind.

Bezeichnen wir die positiven Werte der Quadratwurzeln aus a_1^2, a_2^2, a_3^2 mit a_1, a_2, a_3, so ist ebenfalls:

$$(21) \qquad 0<a_3<d<a_2<e<a_1<+\infty,$$

und $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3$ sind *die sechs reellen Wurzeln der Resolvente* (18).

8. Realität der vier gebrochenen Fokaldistanzen. Da aber dieselben sechs Wurzeln durch die Ausdrücke (17) vorgestellt werden, und da diese letzteren, mit dem +-Zeichen genommen, den Ungleichungen § 132, (28) entsprechen, so müssen die beiderlei Bezeichnungen in der Beziehung stehen:

$$(22) \qquad \frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}=a_1,\quad \frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}=a_2,\quad \frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}=\varepsilon a_3,$$

wo nach § 133, (26) $\varepsilon=+1$ oder -1 ist, je nachdem P rechts oder links von der yz-Ebene liegt. Dazu kommt die Gleichung (15).

Die vier gebrochenen Fokaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2' eines Punktes $P=x, y, z$ über die Fokalellipse drücken sich daher durch die drei positiven reellen Wurzeln a_1, a_2, a_3 der Resolvente (18) *in der Weise aus:*

$$(23)\quad \begin{cases} r_1 = a_1 - a_2 - \varepsilon a_3 + e, \\ r_2 = a_1 + a_2 + \varepsilon a_3 + e, \\ r_1' = a_1 - a_2 + \varepsilon a_3 + e, \\ r_2' = a_1 + a_2 - \varepsilon a_3 + e, \end{cases}$$

und genügen den Ungleichungen:

$$(24)\quad 0 < \left|\frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right| < d < \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}$$
$$< e < \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} < +\infty.$$

Die vier gebrochenenen Fokaldistanzen sind daher stets reell.

In der Bezeichnung § 120, (2') sind die Wurzeln a_1^2, a_2^2, a_3^2 der Gleichung (18) in Rücksicht auf (20) mit $\alpha-\lambda$, $\alpha-\mu$, $\alpha-\nu$ gleichbedeutend, wo λ, μ, ν die Wurzeln der Gleichung § 120, (10) sind. Daher folgt (§ 133, (21)) neben (23):[103])

Durch die elliptischen Koordinaten λ, μ, ν des Punktes P drücken sich die vier gebrochenen Hauptfokaldistanzen in folgender Weise aus (§ 33, (10)):

$$(23')\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\ s_1' = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta}, \\ r_1' = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\ s_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta}. \end{cases}$$

9. Bestimmung der Knickpunkte. Zu jeder der vier gebrochenen Fokaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2', beziehungsweise dem nach (13) entsprechenden Werte von t, geben die Gleichungen (12) den zugehörigen Knickpunkt $C_i = x_0, y_0, 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.[190]) Daher sind auch die vier Punkte C_i und damit die vier Fokallinien f_i des Punktes P, sowie deren Schnittpunkte B_i mit der zx-Ebene sämtlich reell (§ 132, 3).

10. Die Identität der Fokaleigenschaften. Die Identität (19) gilt in a einerseits und in $P = x, y, z$ andererseits identisch, wobei r_1, r_2, r_1', r_2' die gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes P über die Fokalellipse sind. Bei fest gedachtem a ist daher die Bedingung, daß der Punkt P auf der Fläche:

$$(25)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1$$

liegt, vollkommen gleichbedeutend mit der Bedingung, daß seine gebrochenen Fokaldistanzen mit a in der Beziehung stehen (§ 1, (4)):

$$(26)\quad \left(a+\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)\left(a-\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)\left(a+\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)$$
$$\times\left(a-\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)\left(a+\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)\left(a-\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)=0.$$

Die in der Gleichung (26) ausgesprochene Eigenschaft kommt also *jedem Punkte der Fläche* (25) und *keinem anderen Punkte des Raumes zu.*

11. Verteilung auf die einzelnen Flächen. Ist nun $+\infty > a > e$, so ist die Fläche (25) ein Ellipsoid (§ 55, (3)) und von den sechs Faktoren (26) kann nach (24) nur der zweite verschwinden. Ist die Fläche (25) mit $e > a > d$ ein einschaliges Hyperboloid, so kann nach (24) nur der vierte, und ist sie mit $d > a > 0$ ein zweischaliges Hyperboloid, so können nach (24) nur die beiden letzten Faktoren (26) verschwinden (§ 1, 4).

Daher hat die Fläche (25), *je nachdem sie ein Ellipsoid oder ein einschaliges Hyperboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid ist, beziehungsweise die Fokaleigenschaft:*

$$(27)\qquad r_2 + r_2' + r_1 + r_1' = 4a + 4e,$$
$$(28)\qquad r_2 + r_2' - r_1 - r_1' = 4a,$$
$$(29)\qquad r_2 - r_2' - r_1 + r_1' = 4\varepsilon a,$$

wo in (29) $\varepsilon = +1$ *für die rechte und* $\varepsilon = -1$ *für die linke Schale des zweischaligen Hyperboloides gilt.*

12. Einführung der Hauptfokaldistanzen. Vermöge der Gleichung (15) kann jede der Gleichungen (27)—(29) in je zwei kürzeren Formen geschrieben werden (§ 1, (9); (10)):

$$(30)\qquad r_2 + r_1 = 2a + 2e,\quad r_2' + r_1' = 2a + 2e;$$
$$(31)\qquad r_2 - r_1' = 2a,\quad r_2' - r_1 = 2a;$$
$$(32)\qquad r_2 - r_2' = 2\varepsilon a,\quad r_1' - r_1 = 2\varepsilon a,$$

oder mit Einführung der vier Hauptfokaldistanzen nach § 133, (21):

$$(33)\qquad r_1 + s_1' = s_1 + r_1' = 2a + e - d,$$
$$(34)\qquad s_1' - r_1' = s_1 - r_1 = 2a - e - d,$$
$$(35)\qquad s_1' - s_1 = r_1' - r_1 = 2\varepsilon a.$$

Nennt man also die über die *Fokalellipse* laufenden Hauptfokaldistanzen r_1, r_1' *ungleichnamig* mit denen über die *Fokalhyperbel* s_1, s_1' und die in den *rechten* Hauptbrennpunkten endigenden r_1, s_1 *ungleichseitig* mit den in den *linken* Hauptbrennpunkten endigenden r_1', s_1', so lauten die erhaltenen Sätze (Fig. 207):

I. *Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der*

großen Hauptachsenlänge, vermehrt um die halbe Differenz der beiden Hauptbrennweiten.

II. *Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der großen Hauptachsenlänge, vermindert um die halbe Summe der beiden Hauptbrennweiten.*

III. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der reellen Hauptachsenlänge.*[8])

13. Die Halbierungslinien der Winkel. Die Anfangsstücke der vier gebrochenen Hauptfokaldistanzen r_1, s_1', r_1', s_1 eines Punktes $P = x, y, z$ (Fig. 207) fallen nach § 133, 8 bezüglich in die vier Fokallinien f_1, f_2, f_3, f_4 des Punktes hinein (Fig. 203). Die Winkel dieser Fokallinien werden aber nach § 122, 4; 5 von den Normalen der drei durch den Punkt P gehenden Flächen des konfokalen Systems halbiert, welches die Gleichung (25) bei veränderlichem a^2 darstellt (§ 120, (1'); 5, I). Diese drei Flächen sind ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid. Die Normale des Ellipsoides halbiert, wenn wir die Fokallinien im Sinne PC_i (umgekehrt, wie § 122, 4) richten (Fig. 203), den Innenwinkel sowohl von f_1 und f_2 als auch von f_3 und f_4; die Normale des einschaligen Hyperboloides den Außenwinkel sowohl von f_2 und f_3 als auch von f_1 und f_4; die Normale des zweischaligen Hyperboloides den Außenwinkel sowohl von f_3 und f_1 als auch von f_2 und f_4. Daher treten zu den Sätzen 12, I—III die folgenden Zusätze im Sinne von § 13, 4:[64])

I'. *In jedem Punkte des Ellipsoides halbiert die Normale den Innenwinkel je zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.*

II'. *In jedem Punkte des einschaligen Hyperboloides halbiert die Normale den Außenwinkel je zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.*

III'. *In jedem Punkte des zweischaligen Hyperboloides halbiert die Normale den Außenwinkel je zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.*

14. Die Fadenkonstruktion des Ellipsoides. Seien die beiden Fokalkegelschnitte, wie § 131, 8 von dünnem glatten Draht gebildet und durch ein geradliniges Drahtstück $C_0'B_0'B_0C_0$ (Fig. 207) miteinander fest verbunden. Man befestige dann einen Faden von der Länge $2a + e - d$ mit seinen beiden Enden in den beiden ungleichseitigen

ungleichnamigen Brennpunkten B_0' und C_0 und bringe ihn in die Lage $B_0' C_3 P B_4 C_0$ (Fig. 207) derart, daß der Punkt P in dem Raumquadranten oberhalb der xy-Ebene und vor der zx-Ebene liegt, der Faden bei C_3 unter der Fokalellipse und bei B_4 hinter der Fokalhyperbel und bei P über ein mit der Hand gehaltenes Häkchen, überall frei gleitend, hinwegläuft. *Alsdann beschreibt der Punkt P, indem das Häkchen, den Faden beständig spannend, bewegt wird, infolge von* **12**, I *und* **13**, I' *den in dem genannten Quadranten liegenden Teil der Oberfläche des Ellipsoides* (25).[11])

Kommt insbesondere P in die xy-Ebene zu liegen, so legt sich das Fadenstück $C_0 B_4$ in $C_0 B_0 = e - d$ von selbst fest, r_1' wird bei C_3 gestreckt, und man erhält *den Hauptschnitt* des Ellipsoides *mit den Brennpunkten* B_0', B_0 mittels der noch beweglichen Fadenlänge $2a$ auf Grund von § 1, **9**. Kommt P in die zx-Ebene zu liegen, so legt sich das Fadenstück $B_0' C_3$ in $B_0' C_0' = e - d$ fest, s_1 wird in B_4 gestreckt, und man erhält *den zweiten Hauptschnitt* des Ellipsoides *mit den Brennpunkten* C_0', C_0 mittels der noch beweglichen Fadenlänge $2a$ auf Grund von § 1, **9**.

Die Fadenkonstruktion des Ellipsoides schließt also die der Ellipse als besonderen Fall in sich ein.

§ 135. Fokaleigenschaften konjugierter Fokalparabeln.

1. Die konjugierten Fokalparabeln. Die in der Ebene $z = 0$ liegende nach links offene (linke) Parabel:

(1) $$y^2 + 2ex - e^2 = 0$$

und die in der Ebene $y = 0$ liegende nach rechts offene (rechte) Parabel:

(2) $$z^2 - 2ex = 0$$

haben die Eigenschaft, daß *der Scheitel* C_0 *der linken* (Fig. 208) *der Brennpunkt der rechten und der Scheitel O der rechten der Brennpunkt der linken ist.*

Die eine der beiden „konjugierten Parabeln" ist durch die andere bestimmt. Sie sind zugleich die *Fokalparabeln* § 56, (7) des Paraboloides § 56, (1).[188])

2. Entfernung zweier Punkte der konjugierten Fokalparabeln. Sind $C = x_0, y_0, 0$ und $B = x_1, 0, z_1$ zwei Punkte der Kegelschnitte (1) und (2), also:

(3) $$y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0, \quad z_1^2 - 2ex_1 = 0,$$

so ist für ihre Entfernung ϱ:

$$\varrho^2 = \overline{BC}^2 = (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_1^2 = (x_1 - x_0)^2 - 2ex_0 + e^2 + 2ex_1$$
$$= (x_1 - x_0 + e)^2.$$

Da aber nach (3):

$$\frac{e}{2} - x_0 > 0, \quad x_1 > 0,$$

so folgt:

Die absolute Entfernung eines Punktes $C = x_0, y_0, 0$ *der linken und eines Punktes* $B = x_1, 0, z_1$ *der rechten Parabel* (Fig 208) *ist:*

(4) $\varrho = \overline{BC} = x_1 - x_0 + e.$

3. Winkel der Strecke CB gegen die Tangente der Parabel in C oder B. Die Richtungskosinus der Strecke CB (Fig. 208) sind (I § 34, (7)):

$$\frac{x_1 - x_0}{\varrho}, \quad -\frac{y_0}{\varrho}, \quad \frac{z_1}{\varrho},$$

die Gleichungen der Tangenten der Parabeln (1) und (2) in C und B nach § 13, (35):

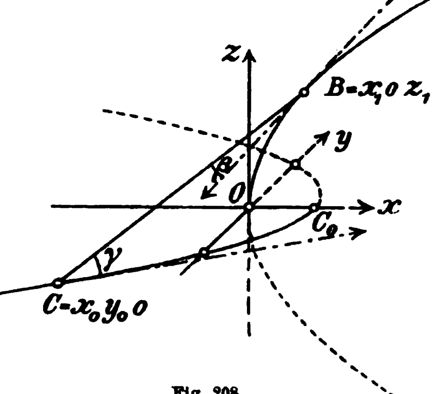


Fig. 208.

$$ex + y_0 y - e(e - x_0) = 0, \quad -ex + z_1 z - ex_1 = 0,$$

also ihre Richtungskosinus:

(5) $-qy_0,\ qe,\ 0;\ q = 1 : \sqrt{e^2 + y_0^2},\ -pz_1,\ 0, -pe;\ p = 1 : \sqrt{e^2 + z_1^2}.$

Daher ist für die Winkel γ der Strecke CB gegen die Tangente in C und β der Strecke BC gegen die Tangente in B:

$$\cos\gamma = -\frac{qy_0}{\varrho}(x_1 - x_0 + e), \quad \cos\beta = \frac{pz_1}{\varrho}(x_1 - x_0 + e),$$

und nach (4):

(6) $$\cos\gamma = -qy_0, \quad \cos\beta = pz_1.$$

Diese Werte sind bezüglich von x_1, z_1 und von x_0, y_0 unabhängig, also:

Der Winkel γ, *den die Strecke* CB (Fig. 208) *mit der Tangente der linken Parabel im Punkte* C *bildet, ist von der Lage des Punktes* B *auf der rechten Parabel, der Winkel* β, *den die Strecke* BC *mit der Tangente der rechten Parabel im Punkte* B *bildet, ist von der Lage des Punktes* C *auf der linken Parabel unabhängig;* oder, was dasselbe ist:

Der von einem beliebigen Punkte der einen Parabel über der an-

deren errichtete Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der ersteren in dem Punkte ist.

4. Fokaleigenschaft der einen Parabel in bezug auf zwei Punkte der andern. Sind (Fig. 209) $B_1 = x_1, 0, z_1$ und $B_2 = x_2, 0, z_2$ zwei feste Punkte der rechten und $C = x, y, 0$ ein laufender Punkt der linken Parabel, so ist nach (4):

$$\overline{B_1C} = x_1 - x + e, \quad \overline{B_2C} = x_2 - x + e.$$

Daher ist:

$$\overline{B_1C} - \overline{B_2C} = x_1 - x_2 \tag{7}$$

unabhängig von $C = x, y, 0$. Somit folgt mit gleichzeitiger Rücksicht auf (6):

I. *Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes C der linken von zwei festen Punkten B_1 und B_2 der rechten Parabel* (Fig. 209) *ist unveränderlich.*[188])

I'. *Die Strecken CB_1 und CB_2 bilden mit der Tangente der linken Parabel in C gleiche Winkel γ.*

Der entsprechende Satz gilt für einen laufenden Punkt B der rechten und zwei feste Punkt der linken Parabel.

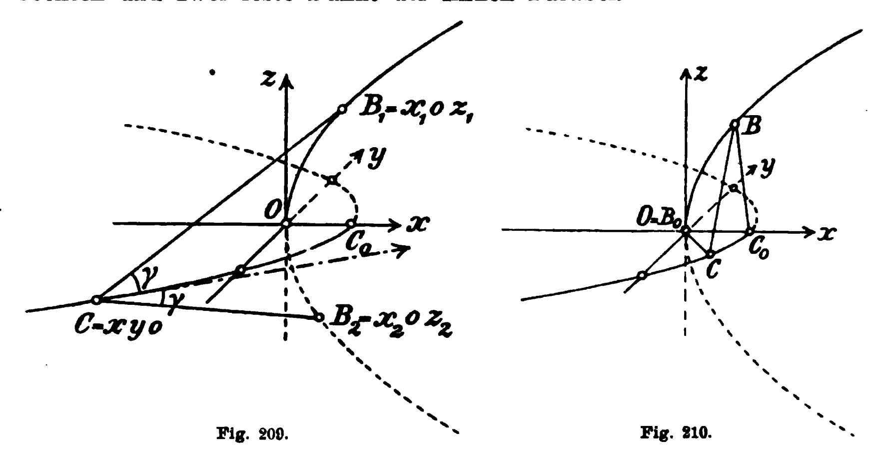


Fig. 209. Fig. 210.

5. Zusammengesetzte Fokaleigenschaft beider Parabeln. Die Brennpunkte B_0 und C_0 der beiden Parabeln haben die Koordinaten 0, 0, 0 und $\frac{e}{2}$, 0, 0. Sind nun $C = x_0, y_0, 0$ und $B = x_1, 0, z_1$ zwei beliebige Punkte der linken und rechten Parabel (Fig. 210), so ist nach (4):

$$\overline{B_0C} = -x_0 + e, \quad \overline{CB} = x_1 - x_0 + e, \quad \overline{BC_0} = x_1 + \frac{e}{2}, \tag{7'}$$

und somit *unabhängig von der Lage der Punkte B und C auf der rechten und linken Parabel:*

(8) $$\overline{B_0C} - \overline{CB} + \overline{BC_0} = \frac{e}{2}.$$

§ 136. Die gebrochenen Fokaldistanzen über die Fokalparabeln.

1. Die beiden Fokalkegel eines Punktes. Die von einem Punkte $P = x, y, z$ des Raumes über der einen oder anderen der beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2) errichteten Kegel zweiter Ordnung heißen nach § 125, 1 *die beiden Fokalkegel des Punktes P.* Wie § 132, 1 erhält man die Gleichungen der beiden Kegel aus § 70, (40) mit $b^2, c^2, a = e, 0, -e$ oder $0, e, 0(-x$ für $x)$:

Die Gleichungen der beiden Fokalkegel des Punktes $P = x, y, z$ lauten in laufenden Koordinaten X, Y, Z:

(1) $$(yZ - zY)^2 + 2e(xZ - zX)(Z - z) - e^2(Z - z)^2 = 0,$$

(2) $$(zY - yZ)^2 - 2e(xY - yX)(Y - y) = 0.$$

2. Bedingungen der Rotationskegel. Für den Kegel (1) ist in der Bezeichnung von § 100, 3:

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = z^2, \quad a_{33} = y^2 + 2ex - e^2,$$
$$a_{23} = -yz, \quad a_{31} = -ez, \quad a_{12} = 0.$$

Sieht man also von dem Falle $z = 0$ ab, wo der Kegel in die Doppelebene $Z^2 = 0$ zerfällt, ist er nach § 100, (7) ein Rotationskegel immer dann und nur dann, wenn:

(3) $$y = 0, \; (z^2 - 2ex + e^2)z^2 - e^2z^2 = z^2(z^2 - 2ex) = 0.$$

Ebenso ist der Kegel (2), vom Falle $y = 0$ abgesehen, ein Rotationskegel für:

(4) $$z = 0, \; y^2(y^2 + 2ex) - e^2y^2 = y^2(y^2 + 2ex - e^2) = 0.$$

Der von einem Punkte der einen Fokalparabel über der andern errichte Kegel ist ein Rotationskegel (§ 135, 3).[144])

3. Die Fokallinien. Eine gemeinsame Transversale der beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2), wie BC in Fig. 208, soll ein *Fokalstrahl* oder eine *Fokallinie* genannt werden (§ 125, 2).

Die durch einen Punkt P des Raumes gehenden Fokallinien sind die vier gemeinsamen Erzeugenden der beiden konzentrischen Kegel zweiter Ordnung (1) *und* (2).

Da aber die beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2) den unendlich fernen Punkt der x-Achse gemein haben, so ist *die eine der vier*

Fokallinien, f_4, *die durch den Punkt P gehende Parallele zur x-Achse* (§ 125, 2). Die Schnittpunkte der *drei andern Fokallinien* f_1, f_2, f_3 (Fig. 211) mit der linken Fokalparabel seien C_1, C_2, C_3, die mit der rechten B_1, B_2, B_3.

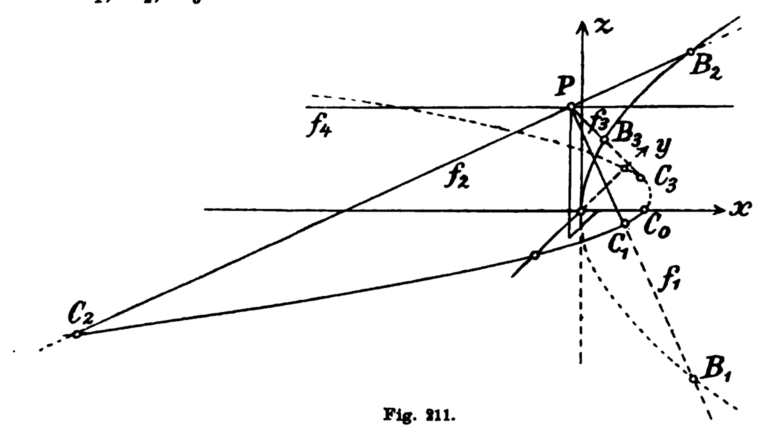


Fig. 211.

Liegt jedoch der Punkt *P selbst auf einer Fokalparabel*, so gehen durch ihn ausnahmsweise ∞^1 *Fokallinien*, seine Verbindungslinien mit der andern Fokalparabel, die nach 2 einen Rotationskegel bilden.

4. Gebrochene Entfernungen über die linke Fokalparabel. Die gebrochene Entfernung:

$$(5) \qquad r = PCB_0 = \overline{PC} + \overline{CB_0}$$

eines *beliebigen* Punktes $P = x, y, z$ des Raumes (Fig. 212) von dem Brennpunkt $B_0 = 0, 0, 0$ der linken Parabel § 135, (1) über diese hinweg, ist von der Lage des Knickpunktes $C = x_0, y_0, 0$ auf der linken Parabel *abhängig*. Dasselbe wird im allgemeinen von der Differenz:

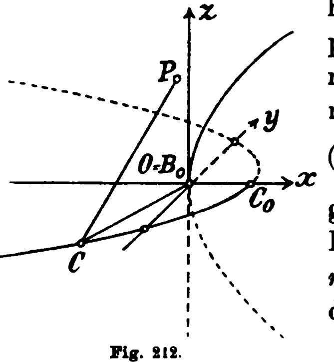


Fig. 212.

$$(6) \qquad m = -\overline{PC} + \overline{CB_0}$$

gelten, welche jedoch in dem besonderen Falle, daß *P* ein *Punkt B der rechten Parabel* § 135, (2) ist, nach § 135, 4 von dem Knickpunkt *C unabhängig* ist.

Wir setzen:

$$(7) \qquad r = \overline{PC} + \overline{CB_0} = \varrho + \tau, \quad m = -\overline{PC} + \overline{CB_0} = -\varrho + \tau,$$

wobei:

(8) $$\varrho = PC = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2},$$

(9) $$\tau = \overline{CB_0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

während gleichzeitig:

(10) $$y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0.$$

Nach § 135, (7') ist auch:

(11) $$\tau = e - x_0.$$

Dabei sind die beiden voneinander unabhängigen Knickpunkte von r und m in der Bezeichnung $C = x_0, y_0, 0$ nicht besonders unterschieden.

5. Größte und kleinste Werte der gebrochenen Entfernungen. Während der Knickpunkt C die ganze linke Parabel durchläuft, bleibt die gebrochene Entfernung (5) immer größer als Null und wird bei unendlich fernem C unendlich groß. Sie wird daher wenigstens einmal einen kleinsten Wert erhalten. Dagegen bleibt die positive oder negative Differenz (6) immer endlich; bei unendlich fernem C fällt die Strecke CB_0 in die x-Achse und die Strecke PC wird der x-Achse parallel, so daß $m = -x$ wird. Die Differenz wird daher im allgemeinen wenigstens einmal einen kleinsten und einmal einen größten Wert annehmen.

Die gebrochene Entfernung r hat wenigstens ein Minimum, die gebrochene Entfernung m wenigstens ein Minimum und ein Maximum.

6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Maxima und Minima. Um die extremen Werte zu bestimmen, betrachten wir r und m als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_0, während wir y_0 durch (10) von x_0 abhängig gemacht denken. Dann ist der erste und zweite Differentialquotient von y_0 nach x_0:

(12) $$\frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{e}{y_0}, \quad \frac{d^2y_0}{dx_0^2} = -\frac{e^2}{y_0^3},$$

und zugleich:

(13) $$\left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + y_0\frac{d^2y_0}{dx_0^2} = 0.$$

Ferner ist nach (8) für den ersten und zweiten Differentialquotienten von ϱ nach x_0:

(14) $$\varrho\frac{d\varrho}{dx_0} = (x_0 - x) + (y_0 - y)\frac{dy_0}{dx_0} = (x_0 - x) - \frac{e}{y_0}(y_0 - y),$$

$$\varrho\frac{d^2\varrho}{dx_0^2} + \left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + (y_0 - y)\frac{d^2y_0}{dx_0^2},$$

oder mit Rücksicht auf (13) und (12):

(15) $$\varrho\frac{d^2\varrho}{dx_0^2} = -\left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 + 1 + \frac{e^2y}{y_0^3}.$$

Der erste und zweite Differentialquotient von r nach x_0 wird nun nach (7) mit Benutzung der Darstellung (11) von τ:

$$(16)\qquad \frac{dr}{dx_0} = \frac{d\varrho}{dx_0} - 1 = \frac{x_0 - x}{\varrho} - \frac{e}{y_0}\frac{y_0 - y}{\varrho} - 1,$$

$$(17)\qquad \frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{d^2\varrho}{dx_0^2}.$$

Mit Benutzung der Darstellung (9) von τ und der Formel (14) kann man den ersteren auch in der Form annehmen:

$$(18)\qquad \frac{dr}{dx_0} = \left(\frac{x_0 - x}{\varrho} + \frac{x_0}{\tau}\right) - \frac{e}{y_0}\left(\frac{y_0 - y}{\varrho} + \frac{y_0}{\tau}\right).$$

Die Werte von x_0, für die ein extremer Wert von r eintritt, müssen nun der Gleichung:

$$\frac{dr}{dx_0} = 0$$

genügen. Für einen solchen Wert von x_0 ist aber nach (16):

$$\frac{d\varrho}{dx_0} = 1$$

und daher nach (17) und (15):

$$(19)\qquad \frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{e^2}{y_0^2}\frac{y}{y_0}.$$

Hiernach tritt bei reellen x_0, y_0 im allgemeinen $(y \neq 0,\ y_0 \neq 0)$ auch wirklich ein Minimum oder Maximum ein, und zwar jenes oder dieses, je nachdem y_0 und y gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Durch Umkehr des Vorzeichens von ϱ erhält man die entsprechenden Formeln für m:

$$(16')\qquad \frac{dm}{dx_0} = -\frac{x_0 - x}{\varrho} + \frac{e}{y_0}\frac{y_0 - y}{\varrho} - 1,$$

$$(18')\qquad \frac{dm}{dx_0} = \left(-\frac{x_0 - x}{\varrho} + \frac{x_0}{\tau}\right) - \frac{e}{y_0}\left(-\frac{y_0 - y}{\varrho} + \frac{y_0}{\tau}\right),$$

$$(19')\qquad \frac{d^2m}{dx_0^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{e^2}{y_0^2}\frac{y}{y_0}.$$

Die gebrochene Entfernung r und m in (7) *hat immer dann und nur dann einen extremen Wert, wenn der Knickpunkt $C = x_0, y_0, 0$ neben* (10) *der Bedingung genügt:*

$$(20)\qquad \frac{dr}{dx_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dm}{dx_0} = 0,$$

und zwar ist r dann ein Minimum, wenn C in bezug auf die zx-Ebene mit P gleichseitig liegt, und m ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem C mit P ungleichseitig oder gleichseitig liegt.

7. Geometrische Bedeutung der Bedingungen (20). Die Bedingungen (20) werden mit Einsetzung von (18), (18'):

$$(21)\qquad -y_0\left(\pm\frac{x-x_0}{\varrho}+\frac{0-x_0}{\tau}\right)+e\left(\pm\frac{y-y_0}{\varrho}+\frac{0-y_0}{\tau}\right)=0,$$

wo die oberen Zeichen für r, die unteren für m gelten.
Da nun nach § 135, (5):

$$-qy_0,\ qe,\ 0;\quad \frac{x-x_0}{\varrho},\ \frac{y-y_0}{\varrho},\ \frac{z}{\varrho};\quad \frac{0-x_0}{\tau},\ \frac{0-y_0}{\tau},\ 0$$

bezüglich die Richtungskosinus der Tangente der Parabel § 135, (1) in $C=x_0, y_0, 0$ und der Strecken CP und CB_0 sind, so bedeutet die Gleichung (21) (I § 35, (9)):

Die gebrochene Entfernung r, bezüglich m, hat für solche Lagen des Knickpunktes C auf der linken Fokalparabel einen extremen Wert, wo die innere, bezüglich äußere Halbierungslinie der Strecken CP und CB_0 auf der Tangente der Parabel in C senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente sich zu π ergänzen, bezüglich gleich sind (§ 131, 5).

Die gebrochene Entfernung r bildet, wo sie ein Minimum ist, zugleich die *stabile Gleichgewichtslage eines Fadens*, der in C über die Parabel gleitet und in P und B_0 festgehalten wird.

8. Die Anfangsstücke der Maxima und Minima als Fokallinien. Bildet die Strecke CB_0 eines extremen Wertes von r, bezüglich m, mit der Tangente der linken Fokalparabel in C einen Winkel γ, so bildet nach 7 die Strecke CP mit dieser Tangente den Winkel $\pi-\gamma$, bezüglich γ.

Da aber die Strecke CB_0 den Punkt B_0 enthält, gehört sie nach 2 dem einen Mantel des von C über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegels an. Dieser Mantel ist daher der Ort aller von C ausgehenden Halbstrahlen, die den Winkel γ mit der Tangente bilden, während der andere Mantel ebenso der Ort aller Halbstrahlen mit dem Winkel $\pi-\gamma$ ist. Somit gehört die Strecke CP dem letzteren, bezüglich dem ersteren Mantel an, die unbegrenzte Gerade CP aber überhaupt dem von C über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegel, weshalb sie nach 3 Fokallinie sein muß.

Die gebrochene Entfernung r, bezüglich m, ist ein Maximum oder Minimum, wenn ihr Anfangsstück PC in eine der drei Fokallinien des Punktes P fällt und die Strecken CP und CB_0 bei r verschiedenen Mänteln, bei m demselben Mantel des von C über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegels angehören.

9. Das zu einer Fokallinie gehörige Maximum oder Minimum. Umgekehrt gibt es zu jeder der drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 des Punktes P immer entweder ein Maximum oder Minimum von r oder von m. Denn ist C ihr Schnittpunkt mit der linken Fokalparabel, so gehört die Strecke CP nach **3** dem einen Mantel des von C über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegels an, dessen Halberzeugende etwa den Winkel γ mit der Tangente der linken Parabel in C bilden. Die Strecke CB_0 gehört demselben Kegel an und zwar demselben oder dem andern Mantel. Sie bildet also entweder den Winkel $\pi - \gamma$ oder γ mit der Tangente, so daß nach 8 entweder $\overline{PC} + \overline{CB_0}$ oder $-\overline{PC} + \overline{CB_0}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Zu jeder der drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 des Punktes P gehört entweder ein Maximum oder ein Minimum von r oder von m.

10. Die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die linke Fokalparabel. Da aber nach **5** r wenigstens ein Minimum und m wenigstens ein Maximum und ein Minimum hat, so muß zu jeder der drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 je ein solches gehören, und kann es nicht mehr als ein Minimum von r und ein Minimum und ein Maximum von m geben.

Die gebrochene Entfernung $r = \overline{PC} + \overline{CB_0}$ hat ein Minimum r_1 und die gebrochene Entfernung $m = -\overline{PC} + \overline{CB_0}$ ein Minimum m_1 und ein Maximum m_2, und zwar ist (Fig. 213)*:*

$$(22) \quad r_1 = \overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}, \quad m_2 = -\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}, \quad m_1 = -\overline{PC_3} + \overline{C_3B_0},$$

wo C_1, C_2, C_3 die Schnittpunkte der drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 des Punktes P mit der linken Fokalparabel in bestimmter Anordnung (vgl. **11**) bedeuten.

Wir nennen r_1, m_1, m_2 die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes P über die linke Fokalparabel.

11. Lage der Punkte B_i, C_i auf der Fokallinie f_i. Nach **6** liegen in (22) in bezug auf die Ebene der rechten Fokalparabel C_1 und C_2 mit P gleichseitig und C_3 mit P ungleichseitig. Da aber der Schnittpunkt einer Fokallinie mit der zx-Ebene zugleich ihr Schnittpunkt mit der rechten Fokalparabel sein muß, so folgt weiter: Ist B_i ($i = 1, 2, 3$) der Schnittpunkt der Fokallinie PC_i mit der rechten Fokalparabel, so liegen B_1 und B_2 außerhalb der Strecken PC_1 und PC_2, dagegen B_3 innerhalb der Strecke PC_3 (Fig. 213.)

Bei dem Minimum von r_1 gehören nach 8 die Strecken C_1P C_1B_0 verschiedenen Mänteln des von C_1 über der rechten Parabel er-

richteten Kegels an. Da nun C_1B_0 diese Parabel in B_0 trifft, kann C_1P sie nicht treffen. Daher liegen auf der Fokallinie f_1 die Punkte in der Reihenfolge PC_1B_1 (Fig. 213).

Bei dem Maximum m_2 gehören nach 8 die Strecken C_2P und C_2B_0 demselben Mantel des von C_2 über der rechten Parabel er-

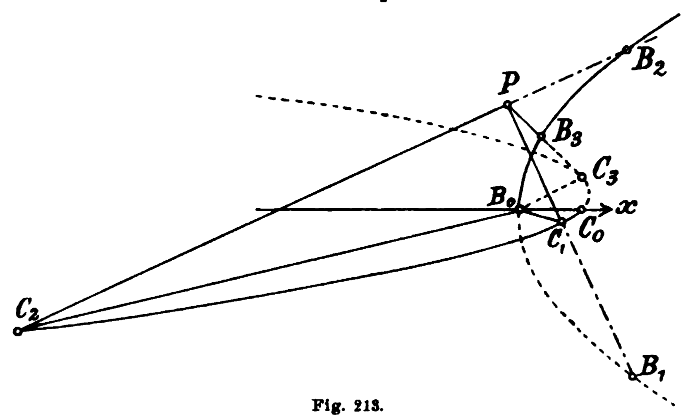


Fig. 213.

richteten Kegels an. Da nun C_2B_0 diese Parabel trifft, muß C_2P sie auch treffen. Daher liegen auf f_2 die Punkte in der Reihenfolge B_2PC_2.

Die Lage der Schnittpunkte der drei Fokallinien des Punktes P mit den beiden Fokalparabeln ist durch die Folgen bezeichnet (Fig. 213):

(23) $$f_1 = PC_1B_1, \quad f_2 = B_2PC_2, \quad f_3 = PB_3C_3.$$

Dadurch ist auch die Benennung der drei Fokallinien mit f_1, f_2, f_3 und die Verteilung der Minima und Maxima (22) auf sie bestimmt.

12. Ungleichung für die drei gebrochenen Fokaldistanzen. Bei der in **10** eingeführten Bezeichnung des größten und kleinsten Wertes von m ist zunächst:

(24) $$m_2 > m_1.$$

Da ferner in dem windschiefen Viereck $C_2PC_1B_0C_2$ (Fig. 213) die Summe dreier Seiten größer als die vierte ist:

$$\overline{C_2P} + \overline{PC_1} + \overline{C_1B_0} > \overline{B_0C_2},$$

so folgt:

$$r_1 - m_2 = (\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}) - (-\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}) > 0$$

oder:

(25) $$r_1 > m_2.$$

Beide Ungleichungen (24) und (25) sind, da zwar r_1 positiv ist, m_1

und m_2 aber positiv oder negativ sein können, algebraisch zu verstehen. In diesem Sinne folgt daher:

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 *eines Punktes* P *entsprechen stets den Ungleichungen:*

(26) $$m_1 < m_2 < r_1$$

oder auch:

(27) $$m_2 + m_1 < m_1 + r_1 < r_1 + m_2.$$

13. Die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die rechte Fokalparabel. Die Unterscheidung der drei Fokallinien f_i und die Verteilung des extremen Werte von r und m auf sie beruht auf der Reihenfolge (23) ihrer Punkte P, B_i, C_i. Bei Vertauschung der Stellung von B_i und C_i gegen P vertauschen sich nach (23) f_1 und f_3, während f_2 in sich übergeht. Bei der Gleichberechtigung der beiden kongruenten Fokalparabeln folgt daher aus **10**, wenn unter B der laufende Punkt der rechten Fokalparabel verstanden wird:

Die gebrochene Entfernung $s = \overline{PB} + \overline{BC_0}$ *hat ein Minimum* s_1 *und die gebrochene Entfernung* $n = -\overline{PB} + \overline{BC_0}$ *ein Minimum* n_1 *und ein Maximum* n_2, *und zwar ist* (Fig. 213):

(28) $$s_1 = \overline{PB_3} + \overline{B_3C_0}, \quad n_2 = -\overline{PB_2} + \overline{B_2C_0}, \quad n_1 = -\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0},$$

wo B_1, B_2, B_3 *die Schnittpunkte der Fokallinien* f_1, f_2, f_3 *des Punktes* P *mit der rechten Fokalparabel in der durch* (23) *bestimmten Anordnung sind.*

Wir nennen s_1, n_1, n_2 *die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes* P *über die rechte Fokalparabel.*

14. Beziehung zwischen gebrochenen Fokaldistanzen über linke und rechte Fokalparabel. Für die drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 ist nach (23):

$$\overline{B_1C_1} = \overline{PB_1} - \overline{PC_1}, \quad \overline{B_2C_2} = \overline{PB_2} + \overline{PC_2}, \quad \overline{B_3C_3} = \overline{PC_3} - \overline{PB_3}.$$

Setzt man diese Werte in die nach § 135, (8) geltende Gleichung:

$$\overline{C_iB_0} - \overline{B_iC_i} + \overline{B_iC_0} = \frac{e}{2}$$

ein, so ergibt sich:

$$(\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}) + (-\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0}) = \frac{e}{2},$$

$$(-\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}) + (-\overline{PB_2} + \overline{B_2C_0}) = \frac{e}{2},$$

$$(-\overline{PC_3} + \overline{C_3B_0}) + \quad (\overline{PB_3} + \overline{B_3C_0}) = \frac{e}{2}.$$

Mit Rücksicht auf (22) und (28) folgt daher:

Die gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 über die linke und s_1, n_1, n_2 über die rechte Fokalparabel stehen in der Beziehung:

$$(29) \qquad r_1 + n_1 = m_2 + n_2 = m_1 + s_1 = \frac{e}{2},$$

oder auch:

$$(30) \qquad e - r_1 = \frac{e}{2} + n_1, \quad e - m_2 = \frac{e}{2} + n_2, \quad e - m_1 = \frac{e}{2} + s_1.$$

15. Die zwei gebrochenen Hauptfokaldistanzen eines Punktes. Mit Bezug auf r_1 und s_1, die *Hauptfokaldistanzen*, ergibt sich unter Verzicht auf die Differenzen m_1, m_2, n_1, n_2:

Es sind (Fig. 214):

$$(31) \qquad r_1 = PC_1B_0 \quad \text{und} \quad s_1 = PB_3C_0$$

die kürzesten Entfernungen des Punktes P vom Brennpunkt der linken Fokalparabel über diese hinweg und vom Brennpunkt der rechten Fokalparabel über diese hinweg.

Sie sind *stabile Gleichgewichtslagen eines Fadens,* der in dem Brennpunkt B_0 oder C_0 befestigt ist, über die linke oder rechte Fokalparabel gleitet und im Punkte P gespannt gehalten wird.

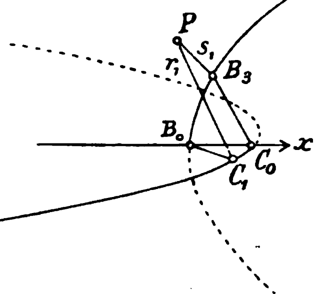


Fig. 214.

§ 137. Die Fokaleigenschaften der Paraboloide.

1. Gleichungen der Knickpunkte der gebrochenen Fokaldistanzen. Die Bestimmung der vier Fokallinien eines Punktes P, von denen eine als Parallele zur x-Achse bekannt ist (§ 136, **3**) führt algebraisch auf eine *kubische Gleichung.* Handelt es sich doch um die Bestimmung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, die den unendlich fernen Punkt der x-Achse gemein haben, nämlich der Schnittpunkte der einen Fokalparabel mit der Zentralprojektion der andern vom Punkte P auf die Ebene der ersteren.[186])

Die drei endlichen Schnittpunkte $C_i = x_0, y_0, 0$ der linken Fokalparabel mit der Zentralprojektion der rechten sind nach § 136, **10** zugleich die Knickpunkte der drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 über die linke Fokalparabel, also diejenigen, für welche die gebrochenen Entfernungen (§ 136, (7), (11), (8)):

$$(1) \qquad r = \varrho + e - x_0 \qquad \text{oder} \qquad (1') \quad m = -\varrho + e - x_0$$

mit:

$$(2) \qquad \varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

einen extremen Wert erhalten. Nach § 136, (10), (20), (16), (16') genügen diese Knickpunkte den Bedingungen:

(3) $$y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0$$

und:

(4) $$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0\varrho = 0\,,$$

(4') $$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e + y_0\varrho = 0\,.$$

Macht man die Gleichungen (4) und (4') durch Multiplikation rational und setzt den Wert (2) von ϱ^2 ein, so vereinigen sie sich zu:

$$\{(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e\}^2 - y_0^2\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2\} = 0\,,$$

eine Gleichung, die sich unter Benutzung von (3) auf die Form bringen läßt:

$$-2e\{(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)x_0\}(y_0 - y) - z^2y_0^2 = 0$$

oder:

(5) $$z^2y_0^2 - 2e(xy_0 - yx_0)(y_0 - y) = 0\,.$$

Diese Gleichung, die mit $X = x_0$, $Y = y_0$, $Z = 0$ aus § 136, (2) hervorgeht, stellt daher in der Tat die *Zentralprojektion der rechten Fokalparabel* von $P = x, y, z$ auf die Ebene der linken Fokalparabel in laufenden Koordinaten x_0, y_0 dar. Aus (3) und (5) wären neben dem unendlich fernen Punkte $y_0 = 0$, $t_0 = 0$, der ihnen bei homogener Schreibweise in x_0, y_0, t_0 genügt, die drei endlichen Punkte $C_i = x_0, y_0, 0$ zu bestimmen.

2. Die kubische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen. Statt aber die *kubische Gleichung der drei endlichen Schnittpunkte der Kegelschnitte* (3) *und* (5) aufzustellen, wollen wir unmittelbar die *kubische Gleichung für die extremen Werte* r_1, m_1, m_2 von r und m ableiten (§ 136, 5), indem wir x_0, y_0 aus (1), (3), (4) und (1'), (3), (4') eliminieren.[190])

Durch Elimination von ϱ aus (1) und (4) folgt zunächst:

$$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0(r - e + x_0) = 0\,,$$
$$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0(m - e + x_0) = 0\,,$$

oder, wenn wir r als gemeinsame Bezeichnung für r und m benutzen:

(6) $$(r + x)y_0 - ey = 0\,.$$

Die Gleichungen (1) und (1'):

$$r + x_0 - e - \varrho = 0\,,\quad r + x_0 - e + \varrho = 0$$

geben, durch Multiplikation vereinigt und unter Einsetzung des Wertes (2):

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2 - (r + x_0 - e)^2 = 0$$

oder mit Rücksicht auf (3):

(7) $$2(r+x)x_0 + 2yy_0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er.$$

Setzt man hier den Wert y_0 aus (6) ein, so folgt:

(8) $$2(r+x)^2 x_0 = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er)(r+x) - 2ey^2.$$

Durch Substitution der Werte (6) und (8) in die mit $(r+x)^2$ multiplizierte Gleichung (3) ergibt sich endlich:

$$e^2y^2 + e(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er)(r+x) - 2e^2y^2 - (r+x)^2e^2 = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + er - ex)(r+x) - ey^2 = 0.$$

Ordnet man die Gleichung nach r, so erhält man den Satz:

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 eines Punktes $P = x, y, z$ genügen der kubischen Gleichung:

(9) $$r^3 - (e-x)r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)r + e(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2)x = 0.$$

3. Die Summe der drei gebrochenen Fokaldistanzen. Daraus geht zunächst hervor:

Für die Summe der drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes $P = x, y, z$ ist stets:

(10) $$r_1 + m_1 + m_2 + x - e = 0.$$

4. Bestimmung der Knickpunkte durch die gebrochenen Fokaldistanzen. Nach der Ungleichung § 136, (26) läßt sich entscheiden, welche der drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 jede der drei Wurzeln r der Gleichung (9) darstellt. Der zugehörige Knickpunkt $C_i = x_0, y_0, 0$ ist dann jedesmal durch die Gleichungen (6) und (8) bestimmt.

5. Kubische Gleichung für die Summe zweier gebrochenen Fokaldistanzen. Wenn $r = r_1, m_1, m_2$ überhaupt die drei Wurzeln einer gegebenen kubischen Gleichung:

(11) $$r^3 + lr^2 + mr + n = 0$$

sind, so genügen die Summen $R = m_1 + m_2,\ m_2 + r_1,\ r_1 + m_1$ der kubischen Gleichung:[189])

(12) $$R^3 + 2lR^2 + (l^2 + m)R + (lm - n) = 0.$$

Nimmt man, um diesen Satz auf die Gleichung (9) anzuwenden:

$$l = -(e-x), \quad m = -(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$n = e(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2)x,$$

so wird die Gleichung (12):

$$R^3 + 2(x-e)R^2 + (e^2 - 2ex - y^2 - z^2)R + ez^2 = 0$$

oder:

$$-Ry^2 + (e-R)z^2 - 2x(e-R)R + (e-R)^2R = 0$$

oder:

$$(e-R)(-R)\left\{\frac{y^2}{e-R} + \frac{z^2}{-R} + 2x - (e-R)\right\} = 0.$$

Führt man endlich statt R durch die Substitution:

(13) $$R = e - p, \quad p = e - R$$

die neue Unbekannte p ein, so erhält man mit Hinblick auf (9) den Satz:

Sind r_1, m_1, m_2 die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes $P = x, y, z$ über die linke Fokalparabel, so sind:

(14) $$e - m_2 - m_1, \quad e - m_1 - r_1, \quad e - r_1 - m_2$$

die Wurzeln der Gleichung:

(15) $$-p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = 0.$$

Es besteht daher die in p, sowie in x, y, z identische Gleichung:[4])

(16) $$\begin{cases} -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} \\ = (p-e+m_2+m_1)(p-e+m_1+r_1)(p-e+r_1+m_2), \end{cases}$$

oder nach (10):

(17) $$\begin{cases} -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} \\ = (p-x-r_1)(p-x-m_1)(p-x-m_2). \end{cases}$$

Sie entspricht der identischen Gleichung § 2, (8), die in der Form geschrieben werden kann:

$$-p\left\{\frac{y^2}{p} + 2x - p\right\} = (p-x-r)(p-x+r).$$

6. Realität der Wurzeln der kubischen Gleichung (15). Da für die Funktion:

$$f(p) = -(p-e)y^2 - pz^2 - p(p-e)(2x-p)$$

der Veränderlichen p:

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(0) = ey^2, \quad f(e) = -ez^2, \quad f(+\infty) = +\infty,$$

so folgt:

Die kubische Gleichung (15) *hat drei reelle Wurzeln p_1, p_2, p_3, die zwischen den Grenzen liegen:*

(18) $$-\infty < p_3 < 0 < p_2 < e < p_1 < +\infty.$$

7. Realität der drei gebrochenen Fokaldistanzen. Da die drei Wurzeln aber auch mit (14) bezeichnet sind und in dieser Bezeich-

nung den Ungleichungen § 136, (27) genügen, so müssen die beiderlei Bezeichnungen in der Beziehung stehen:

(19) $e - m_2 - m_1 = p_1, \quad e - m_1 - r_1 = p_2, \quad e - r_1 - m_2 = p_3.$

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_1, m_2 *eines Punktes* $P = x, y, z$ *über die linke Fokalparabel drücken sich daher durch die drei reellen Wurzeln* p_1, p_2, p_3 *der Gleichung* (15) *in der Weise aus:*

(20) $r_1 = \frac{p_1 - p_2 - p_3 + e}{2}, \quad m_2 = \frac{-p_1 + p_2 - p_3 + e}{2}, \quad m_1 = \frac{-p_1 - p_2 + p_3 + e}{2}$

und genügen den Ungleichungen:

(21) $-\infty < e - r_1 - m_2 < 0 < e - m_1 - r_1 < e < e - m_2 - m_1 < +\infty.$

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen sind daher *stets reell*. Dasselbe gilt nach 4 von den Punkten $C_i = x_0, y_0, 0$ $(i = 1, 2, 3)$ und damit von den drei Fokallinien f_i und deren Schnittpunkten B_i mit der Ebene $y = 0$.

8. Die Identität der Fokaleigenschaften. Die Gleichung (16) gilt in p einerseits und in $P = x, y, z$ andererseits identisch, wobei r_1, m_1, m_2 die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes P über die linke Fokalparabel sind. Bei fest gedachtem p ist daher die Bedingung, daß der Punkt P auf der Fläche:

(22) $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2x - p = 0$$

liegt, vollkommen gleichbedeutend mit der Bedingung, daß seine gebrochenen Fokaldistanzen mit p in der Beziehung stehen:

(23) $(p - e + m_2 + m_1)(p - e + m_1 + r_1)(p - e + r_1 + m_2) = 0.$

Die in der Gleichung (23) ausgesprochene Eigenschaft kommt also *jedem Punkte des Paraboloides* (22) *und keinem andern Punkte des Raumes zu.*

9. Verteilung auf die einzelnen Paraboloide. Ist nun $+\infty > p > e$, so ist die Fläche (22) ein linkes elliptisches Paraboloid (§ 56, (2)), und von den drei Faktoren (23) kann nach (21) nur der erste verschwinden. Ist die Fläche (22) mit $e > p > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid, so kann nach (21) nur der zweite, und ist sie mit $0 > p > -\infty$ ein rechtes elliptisches Paraboloid, so kann nur der dritte Faktor (23) verschwinden.

Daher hat die Fläche (22), *je nachdem sie ein linkes elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein rechtes elliptisches Paraboloid ist, beziehungsweise die Fokaleigenschaft:*

(24) $$m_2 + m_1 = e - p,$$

(25) $$m_1 + r_1 = e - p,$$

(26) $$r_1 + m_2 = e - p.$$

10. Einführung der Hauptfokaldistanzen. Behält man unter Benutzung der Gleichungen (10) und § 136, (29) nur die beiden Hauptfokaldistanzen § 136, (31) bei, so nehmen diese Eigenschaften die Form an:

(27) $$r_1 = p - x,$$

(28) $$r_1 - s_1 = \frac{e}{2} - p,$$

(29) $$s_1 = x - \left(p - \frac{e}{2}\right).$$

11. Die Fokaleigenschaft des elliptischen Paraboloides. Um die Gleichungen (27) und (29) zu deuten, führen wir die Hauptdirektrixebenen des Paraboloides ein. Nach § 83, (6) ist die Polarebene eines Punktes x_0, y_0, z_0 in bezug auf die Fläche (22):

$$\frac{y_0 y}{p} + \frac{z_0 z}{p - e} + x + x_0 - p = 0.$$

Die Polarebenen der beiden Hauptbrennpunkte $O = B_0(0, 0, 0)$ und $C_0\left(\frac{e}{2}, 0, 0\right)$ sind daher:[14])

(30) $$x = p,$$ (31) $$x = p - \frac{e}{2}.$$

Wir nennen sie *die beiden Hauptdirektrixebenen des Paraboloides* (§ 2, (1)).

Sie liegen bei dem linken elliptischen Paraboloid $(+\infty > p > e)$ ganz rechts, bei dem rechten $(0 > p > -\infty)$ ganz links von der Fläche (vgl. die schematische Fig. 215; 216). Bei jenem ist (30), bei diesem (31) diejenige Hauptdirektrixebene, die zu dem Brennpunkt der *inneren* Fokalparabel gehört; bei jenem ist $p - x$, bei diesem $x - \left(p - \frac{e}{2}\right)$ der absolute Wert des Abstandes eines Punktes x, y, z der Fläche von dieser Hauptdirektrixebene. Daher geben die beiden Gleichungen (27) und (29) dieselbe Eigenschaft des elliptischen Paraboloides, mag es ein linkes oder ein rechtes sein:

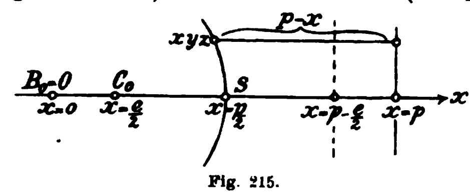


Fig. 215.

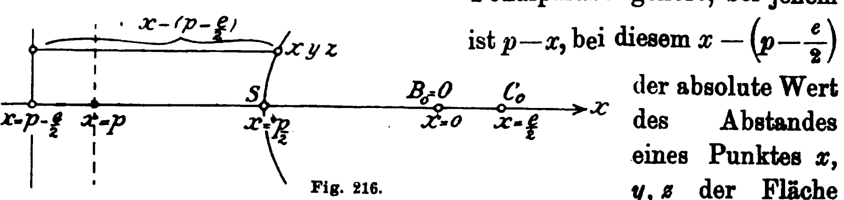


Fig. 216.

I. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist die gebrochene Hauptfokaldistanz von dem Brennpunkt der inneren Fokalparabel gleich dem senkrechten Abstand von der zugehörigen Hauptdirektrixebene.*[16])

12. Die Fokaleigenschaft des hyperbolischen Paraboloides. Die Gleichung (28) gibt für das hyperbolische Paraboloid $(e > p > 0)$, dessen Scheitelpunkt $S\left(x = \frac{p}{2}\right)$ zwischen den beiden Hauptbrennpunkten $O = B_0 (x = 0)$ und $C_0 \left(x = \frac{e}{2}\right)$ liegt (Fig. 214), so daß:

$$(32) \qquad SC_0 - SB_0 = \left(\frac{e}{2} - \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{2} = \frac{e}{2} - p,$$

die folgende Eigenschaft:

II. *Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids ist die Differenz der beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen gleich der Differenz der Entfernungen des Scheitelpunktes von den beiden Brennpunkten.*[3])

13. Die Halbierungslinien der Winkel. Die Anfangsstücke der drei gebrochenen Fokaldistanzen r_1, m_2 und m_1 (Fig. 213) fallen nach § 136, (22) bezüglich in die drei Fokallinien f_1, f_2, f_3 des Punktes P (Fig. 211), während der senkrechte Abstand von der Direktrixebene in die der x-Achse parallele Fokallinie f_4 (Fig. 211) zu liegen kommt. Die Winkel der vier Fokallinien werden aber nach § 125, 2 von den Normalen der drei durch den Punkt P gehenden Flächen des konfokalen Systems halbiert, welches die Gleichung (22) bei veränderlichem p darstellt (§ 123, (1'); 4). Diese drei Flächen sind ein linkes elliptisches, ein hyperbolisches und ein rechtes elliptisches Paraboloid. Die Normale des linken elliptischen Paraboloides halbiert, wenn die Fokallinien f_1, f_2, f_3 im Sinne PC_i und f_4 im Sinne der negativen x-Achse gerichtet werden (Fig. 211), den Innenwinkel sowohl von f_1 und f_4 als von f_2 und f_3, und die Normale des hyperbolischen Paraboloids den Außenwinkel sowohl von f_1 und f_3 als von f_2 und f_4. In f_1 und f_3 fallen aber nach § 136, (22); (28) die Anfangsstücke von r_1 und s_1, in f_4 der vom Fußpunkt nach P hin positiv gerechnete senkrechte Abstand eines Punktes P des linken elliptischen Paraboloides von seiner Hauptdirektrixebene (Fig. 215). Daher folgt:[64])

I'. *In jedem Punkte des elliptischen Paraboloides halbiert die Normale den Innenwinkel der gebrochenen Hauptfokaldistanz vom Brennpunkt der inneren Fokalparabel und des senkrechten Abstandes von der zugehörigen Hauptdirektrixebene.*

II'. *In jedem Punkte des hyperbolischen Paraboloides halbiert die Normale den Außenwinkel der beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen.*

14. Übergang auf die Parabel. Kommt beim linken elliptischen Paraboloid der Punkt P in die xy-Ebene zu liegen, so wird (Fig. 214) die gebrochene Hauptfokaldistanz r_1 im Gleitpunkte C_1 gestreckt, also direkt der Abstand des Punktes P vom Brennpunkt $B_0 = O$ des ersten Hauptschnittes, der Parabel:

$$\frac{y^2}{p} + 2x - p = 0, \quad z = 0,$$

während der Abstand von der Hauptdirektrixebene (30) der Abstand von der Direktrix § 2, (1) der Parabel wird.

Die Sätze I, I′ *über das elliptische Paraboloid schließen also die Fokaleigenschaft der Parabel* § 2, (8) *und* § 13, **13** *als besonderen Fall in sich ein.*

VI. Abschnitt.

Flächen zweiter Ordnung in Tetraederkoordinaten.

I. Kapitel.

Allgemeine Koordinatentetraeder.

§ 138. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung und ihre Transformation.

1. Allgemeine Form der Gleichung. In bezug auf ein Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ (I § 57, (1); (4)) ist die allgemeine Gleichung

einer Fläche zweiter Ordnung in laufenden Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4:

(1) $$f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0.$$

einer Fläche zweiter Klasse in laufenden Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4:

(1') $$F = F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l e_{kl} u_k u_l = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung, für die:

(2) $$a_{kl} = a_{lk}$$

(2') $$e_{kl} = e_{lk}$$

sein soll, ist eine *quadratische Form* der vier Koordinaten.[40])

2. Die partiellen Ableitungen der Form. Wir bezeichnen den *halben partiellen Differentialquotienten* von f nach x_k und von F nach u_k mit (§ 66, (5); § 75, (3)):

(3) $$f_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4{}^l a_{kl} x_l.$$

(3') $$F_k = F_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_1^4{}^l e_{kl} u_l.$$

Alsdann gelten die *Identitäten* (§ 66, (6)):

(4) $$\sum_1^4{}^k f_k x_k = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_l x_k = f.$$

(4') $$\sum_1^4{}^k F_k u_k = F.$$

Ist die Ableitung f_k für einen *bestimmten* Punkt $x_k^{(n)}$ oder F_k für eine

bestimmte Ebene $u_k^{(n)}$ gebildet, so gebrauchen wir die Bezeichnungen:

(5) $$f_k^{(n)} = f_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, x_4^{(n)}) = \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_l^{(n)}.$$

(5') $$F_k^{(n)} = F_k(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}) = \sum_1^4 {}^l e_{kl} u_l^{(n)}.$$

3. Die bilinearen Formen. In bezug auf *zwei* bestimmte Punkte $x_k^{(m)}, x_l^{(n)}$ oder Ebenen $u_k^{(m)}, u_l^{(n)}$ setzen wir zur Abkürzung (§ 67, (9)):

(6) $$f_{mn} = f_{nm} = \sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(n)} = \sum_1^4 {}^k f_k^{(n)} x_k^{(m)} = \sum_1^4 {}^l f_l^{(m)} x_l^{(n)}.$$

(6') $$F_{mn} = F_{nm} = \sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l e_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} = \sum_1^4 {}^k F_k^{(n)} u_k^{(m)} = \sum_1^4 {}^l F_l^{(m)} u_l^{(n)}.$$

Diese *bilinearen Formen* gehen mit $m = n$ wieder in die quadratischen Formen über:

(7) $$f_{mm} = f(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, x_4^{(m)}).$$ (7') $$F_{mm} = F(u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}, u_4^{(m)}).$$

4. Die Determinante der quadratischen Form. Die Determinanten[41]) der quadratischen Formen (1) und (1') (§ 66, (15)):

(8) $$A = |a_{kl}|$$ (8') $$E = |e_{kl}|$$

sind infolge von (2), (2') *symmetrische* Determinanten vierten Grades. Infolge dessen ist für die Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} und zweiten Grades α_{kl} von A ebenfalls:

(9) $$A_{kl} = A_{lk}, \qquad \alpha_{kl} = \alpha_{lk};$$

und entsprechend für die Unterdeterminanten von E.

5. Ausführung der Transformation. Zum Übergang von dem alten Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ zu einem neuen $J_1 J_2 J_3 J_4$, dessen Ecken J_m die Koordinaten $x_k^{(m)}$ haben, dienen die Formeln (I § 63, (25)):

(10) $$x_k = \sum_1^4 {}^m x_k^{(m)} y_m.$$

Durch die Substitution (10) geht die *quadratische Form der alten Koordinaten* x_k:

(11) $$f = \sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_k x_l$$

über in:

$$f = \sum^k \sum^l a_{kl} \sum^m x_k^{(m)} y_m \sum^n x_l^{(n)} y_n = \sum^m \sum^n \Big\{ \sum^k \sum^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(n)} \Big\} y_m y_n,$$

also in eine *quadratische Form der neuen Koordinaten* y_m:

(12) $$f = \sum_{1}^{4}{}^{m} \sum_{1}^{4}{}^{n} b_{mn} y_m y_n,$$

deren *Koeffizienten* nach (6) die Werte haben:

(13) $$b_{mn} = f_{mn} = \sum_{1}^{4}{}^{k} \sum_{1}^{4}{}^{l} a_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)}.$$

Sie sind *bilineare Formen der Koordinaten je zweier Ecken* J_m und J_n des neuen Koordinatentetraeders, bezüglich (für $m = n$) quadratische Formen der Koordinaten einer Ecke J_m (§ 41, 5).

6. Invarianteneigenschaft der Determinante. Nach (6) und (5) kann man den Wert (13) auch in der Form darstellen:

(14) $$b_{mn} = f_{mn} = \sum_{1}^{4}{}^{k} x_k^{(m)} f_k^{(n)}$$ mit (15) $$f_k^{(n)} = \sum_{1}^{4}{}^{l} a_{kl}\, x_l^{(n)}.$$

Daher ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3, (2)) einerseits:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \\ f_1^{(4)} & f_2^{(4)} & f_3^{(4)} & f_4^{(4)} \end{vmatrix},$$

und andererseits:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \\ f_1^{(4)} & f_2^{(4)} & f_3^{(4)} & f_4^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Formeln ergibt sich zwischen den drei Determinanten:

(16) $$A = |a_{kl}|, \quad B = |b_{kl}|, \quad S = |x_k^{(l)}|$$

die Beziehung:

(17) $$B = S^2 A.$$

Die Determinante der transformierten Form ist das Produkt der Determinante der ursprünglichen Form und des Quadrats der Substitutionsdeterminante, oder:

Die Determinante der quadratischen Form ist eine *Invariante*[90]) *bei jeder Koordinatentransformation* (§ 91, (7)).

7. Beziehung der Unterdeterminanten dritten Grades. Infolge der Beziehungen (14) und (15) ist ferner (I Anm. 1, V, 3, (3)):

$$\begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & b_{m_1 n_3} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & b_{m_2 n_3} \\ b_{m_3 n_1} & b_{m_3 n_2} & b_{m_3 n_3} \end{vmatrix} = \sum_1^4{}_{k_1 k_2 k_3} \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} & x_{k_3}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} & x_{k_3}^{(m_2)} \\ x_{k_1}^{(m_3)} & x_{k_2}^{(m_3)} & x_{k_3}^{(m_3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} & f_{k_3}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} & f_{k_3}^{(n_2)} \\ f_{k_1}^{(n_3)} & f_{k_2}^{(n_3)} & f_{k_3}^{(n_3)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} & f_{k_3}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} & f_{k_3}^{(n_2)} \\ f_{k_1}^{(n_3)} & f_{k_2}^{(n_3)} & f_{k_3}^{(n_3)} \end{vmatrix} = \sum_1^4{}_{l_1 l_2 l_3} \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(n_1)} & x_{l_2}^{(n_1)} & x_{l_3}^{(n_1)} \\ x_{l_1}^{(n_2)} & x_{l_2}^{(n_2)} & x_{l_3}^{(n_2)} \\ x_{l_1}^{(n_3)} & x_{l_2}^{(n_3)} & x_{l_3}^{(n_3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & a_{k_1 l_3} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & a_{k_2 l_3} \\ a_{k_3 l_1} & a_{k_3 l_2} & a_{k_3 l_3} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn $m.m_1 m_2 m_3$, $n.n_1 n_2 n_3$, $k k_1 k_2 k_3$, $l.l_1 l_2 l_3$ je die Permutationen (I Anm. 1, III, 2):

(18) 1.234, 2.314, 3.124 oder 4.321

bedeuten:

$$B_{mn} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l A_{kl}\, u_k^{(m)}\, u_l^{(n)}. \tag{19}$$

Hier sind B_{mn}, A_{kl}, $u_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten dritten Grades der neuen und alten Determinante B und A, sowie der Substitutionsdeterminante S in (16). Die $u_k^{(m)}$ sind zugleich die Koordinaten der Seitenflächen l_m des neuen Koordinatentetraeders (I § 63, (30)).

8. Beziehung der Unterdeterminanten zweiten Grades. Infolge von (14) und (15) ist endlich (I Anm. 1, V, 3, (4)):

$$\begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} \end{vmatrix} = \sum_1^6{}_{k_1 k_2} \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} = \sum_1^6{}_{l_1 l_2} \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(n_1)} & x_{l_2}^{(n_1)} \\ x_{l_1}^{(n_2)} & x_{l_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn $m_1 m_2$ die m^{te}, $n_1 n_2$ die n^{te}, $k_1 k_2$ die k^{te} und $l_1 l_2$ die l^{te} Variation der Reihe:

(20) 23, 31, 12, 14, 24, 34

bedeutet:

$$\beta_{mn} = \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \alpha_{kl}\, p_k^{(m)}\, p_l^{(n)}. \tag{21}$$

Hier sind β_{mn}, α_{kl}, $p_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten zweiten Grades der neuen und alten Determinante B und A und der Determinante S.

Die $p_k^{(m)}$ sind zugleich die Strahlenkoordinaten der Kante i_m des neuen Koordinatentetraeders (I § 63, (31)).

Die Formeln (21) kann man (I § 63, (32); I Anm. 1, III, (11)) auch schreiben:

$$\frac{\mathsf{B}_{\bar m \bar n}}{B} = \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \frac{\mathsf{A}_{\bar k \bar l}}{A} \frac{q_{\bar k}^{(\bar m)}}{S} \frac{q_{\bar l}^{(\bar n)}}{S}$$

oder nach (17) und mit Weglassung der Querstriche:

$$\mathsf{B}_{mn} = \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \mathsf{A}_{kl}\, q_k^{(m)} q_l^{(n)}. \tag{22}$$

Hier sind B_{mn}, A_{kl}, $q_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten zweiten Grades aus den B_{mn}, A_{kl}, $u_k^{(m)}$, die $q_k^{(m)}$ aber zugleich die Achsenkoordinaten der Kante ι_m des neuen Tetraeders (I § 63, 8).

9. Darstellung der neuen Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die alten. Die Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse gibt den Satz:

Die Koeffizienten b_{mn} der transformierten Form (12) *und die aus ihnen gebildeten Determinanten zweiten, dritten und vierten Grades $\beta_{mn}(\mathsf{B}_{mn})$, B_{mn}, B drücken sich durch die Koeffizienten a_{kl} der ursprünglichen Form* (11) *und die aus ihnen gebildeten Determinanten $\alpha_{kl}(\mathsf{A}_{kl})$, A_{kl}, A mittels der Formeln aus:*[113])

$$\left\{\begin{aligned} b_{mn} &= \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}\, x_k^{(m)} x_l^{(n)}, \\ \beta_{mn} &= \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \alpha_{kl}\, p_k^{(m)} p_l^{(n)}, \\ \mathsf{B}_{mn} &= \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \mathsf{A}_{kl}\, q_k^{(m)} q_l^{(n)}, \\ B_{mn} &= \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l A_{kl}\, u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ B &= AS^2, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

wo S die Determinante der Substitution (10), *$x_k^{(m)}$ die Koordinaten der Ecken J_m, $p_k^{(m)}$ die Strahlenkoordinaten der Kanten i_m, $q_k^{(m)}$ die Achsenkoordinaten der Kanten ι_m und $u_k^{(m)}$ die Koordinaten der Seitenflächen l_m des neuen Koordinatentetraeders sind* (I § 63, 8).

10. Kovariante Funktionen. Gleichzeitig mit der Form (11) der Koordinaten eines *Punktes* sollen die folgenden Formen der Koordinaten einer *Ebene*, eines *Strahles* und einer *Achse*:[117])

$$F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l, \tag{24}$$

$$\varphi = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l, \quad \Phi = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathrm{A}_{kl} q_k q_l \tag{25}$$

auf das neue Koordinatentetraeder transformiert werden. Die Koeffizienten dieser Formen sind Unterdeterminanten aus den Koeffizienten a_{kl} der gegebenen Form (11). Zwischen den beiden Formen (25) besteht, wenn mit einem Proportionalitätsfaktor σ gesetzt wird (I § 59, (8)):[118])

$$q_k = \sigma p_{\bar{k}}, \tag{26}$$

die Beziehung (I Anm. 1, III, (11)):

$$\Phi = A\sigma^2 \varphi. \tag{27}$$

Zur Transformation dienen die Formeln (I § 63, (26); (27); (28)):

$$S u_k = \sum_1^4{}^m u_k^{(m)} v_m, \tag{28}$$

$$p_k = \sum_1^6{}^m p_k^{(m)} r_m, \quad S^2 q_k = \sum_1^6{}^m q_k^{(m)} s_m, \tag{29}$$

wo v_m, r_m, s_m die neuen Koordinaten von Ebene, Strahl und Achse sind. Danach wird:

$$\begin{aligned}
S^2 F &= \sum^k \sum^l A_{kl} \sum^m u_k^{(m)} v_m \sum^n u_l^{(n)} v_n \\
&= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n, \\
\varphi &= \sum^k \sum^l \alpha_{kl} \sum^m p_k^{(m)} r_m \sum^n p_l^{(n)} r_n \\
&= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l \alpha_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)} \right\} r_m r_n, \\
S^4 \Phi &= \sum^k \sum^l \mathrm{A}_{kl} \sum^m q_k^{(m)} s_m \sum^n q_l^{(n)} s_n \\
&= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l \mathrm{A}_{kl} q_k^{(m)} q_l^{(n)} \right\} s_m s_n
\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (23) und mit Wiederholung von (12):

Beim Übergang von dem alten zu dem neuen Koordinatentetraeder gelten nebeneinander die folgenden Transformationsformeln:

$$(30)\quad \begin{cases} f=\sum_1^4{}_k\sum_1^4{}_l a_{kl}\,x_k\,x_l=\sum_1^4{}_m\sum_1^4{}_n b_{mn}\,y_m\,y_n, \\ S^2F=S^2\sum_1^4{}_k\sum_1^4{}_l{}' A_{kl}\,u_k u_l=\sum_1^4{}_m\sum_1^4{}_n B_{mn}\,v_m\,v_n, \\ \varphi=\sum_1^6{}_k\sum_1^6{}_l \alpha_{kl}\,p_k\,p_l=\sum_1^6{}_m\sum_1^6{}_n \beta_{mn}\,r_m\,r_n, \\ S^4\Phi=S^4\sum_1^6{}_k\sum_1^6{}_l \mathsf{A}_{kl}\,q_k\,q_l=\sum_1^6{}_m\sum_1^6{}_n \mathsf{B}_{mn}\,s_m\,s_n. \end{cases}$$

Die Funktionen f, F, φ, Φ sind *Kovarianten*, die sich je aus den neuen Koeffizienten und Variabeln ebenso zusammensetzen wie aus den alten.

11. Darstellung der alten Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die neuen. Die Auflösungen der Gleichungen (10), (28) und (29) sind (I § 63, (25′)—(28′)):

$$(31)\quad \begin{cases} Sy_m=\sum_1^4 u_k^{(m)}\,x_k, \quad v_m=\sum_1^4{}_k\, x_k^{(m)}\,u_k, \\ S^2r_m=\sum_1^6{}_k\, q_k^{(m)}\,p_k, \quad s_m=\sum_1^6{}_k\, p_k^{(m)}\,q_k. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die transformierten Formen auf den rechten Seiten von (30) ein, so müssen sich rückwärts wieder die ursprünglichen Formen ergeben. Man erhält damit:

$$S^2\sum_k\sum_l a_{kl}\,x_k\,x_l=\sum_m\sum_n b_{mn}\sum_k u_k^{(m)}\,x_k\sum_l u_l^{(n)}\,x_l$$
$$=\sum_k\sum_l\Big\{\sum_m\sum_n b_{mn}\,u_k^{(m)}\,u_l^{(n)}\Big\}x_k\,x_l,$$

$$S^2\sum_k\sum_l A_{kl}u_k u_l=\sum_m\sum_n B_{mn}\sum_k x_k^{(m)}\,u_k\sum_l x_l^{(n)}\,u_l$$
$$=\sum_k\sum_l\Big\{\sum_m\sum_n B_{mn}\,x_k^{(m)}x_l^{(n)}\Big\}u_k u_l,$$

$$S^4\sum_k\sum_l \alpha_{kl}p_k p_l=\sum_m\sum_n \beta_{mn}\sum_k q_k^{(m)}\,p_k\sum_l q_l^{(n)}p_l$$
$$=\sum_k\sum_l\Big\{\sum_m\sum_n \beta_{mn}\,q_k^{(m)}\,q_l^{(n)}\Big\}p_k p_l,$$

$$S^4\sum_k\sum_l \mathsf{A}_{kl}q_k q_l=\sum_m\sum_n \mathsf{B}_{mn}\sum_k p_k^{(m)}\,q_k\sum_l p_l^{(n)}\,q_l$$
$$=\sum_k\sum_l\Big\{\sum_m\sum_n \mathsf{B}_{mn}p_k^{(m)}\,p_l^{(n)}\Big\}q_k\,q_l.$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen folgt daher:

Die Koeffizienten der ursprünglichen Form und die aus ihnen gebildeten Determinanten drücken sich durch die Koeffizienten der transformierten Form und ihre Determinanten mittels der Formeln aus: [113])

$$
(32)\qquad \begin{cases}
S^2 a_{kl} = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\
S^4 \alpha_{kl} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta_{mn} q_k^{(m)} q_l^{(n)}, \\
S^4 \mathsf{A}_{kl} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \mathsf{B}_{mn} p_k^{(m)} p_l^{(n)}, \\
S^2 A_{kl} = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)}, \\
S^2 A = B
\end{cases}
$$

mit derselben Bedeutung von $x_k^{(m)}$, $u_k^{(m)}$, $p_k^{(m)}$, $q_k^{(m)}$ *wie in* (23).

12. Transformation der Fläche zweiter Klasse. Die Form:

$$
(33)\qquad F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l e_{kl} u_k u_l
$$

geht mittels der Substitution (28) über in:

$$
S^2 F = \sum^k \sum^l e_{kl} \sum^m u_k^{(m)} v_m \sum^n u_l^{(n)} v_n
$$
$$
= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l e_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n
$$

oder nach (6'):

$$
(34)\qquad S^2 F = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n F_{mn} v_m v_n .
$$

13. Übergang auf gemeine Koordinaten. Für die Beziehung zwischen einem rechtwinkligen System $Oxyz$ und einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ gelten die Formeln § 91, (2); (3) und § 75, (6); (7). Daher ist dann in (10) und (28) zu setzen:

$$
(35)\qquad \begin{cases}
x_1^{(1)} = \alpha_1, & x_1^{(2)} = \alpha_2, & x_1^{(3)} = \alpha_3, & x_1^{(4)} = x_0, \\
x_2^{(1)} = \beta_1, & x_2^{(2)} = \beta_2, & x_2^{(3)} = \beta_3, & x_2^{(4)} = y_0, \\
x_3^{(1)} = \gamma_1, & x_3^{(2)} = \gamma_2, & x_3^{(3)} = \gamma_3, & x_3^{(4)} = z_0, \\
x_4^{(1)} = 0, & x_4^{(2)} = 0, & x_4^{(3)} = 0, & x_4^{(4)} = 1;
\end{cases}
$$

$$
(36)\qquad \begin{cases}
u_1^{(1)} = \mathsf{A}_1, & u_1^{(2)} = \mathsf{A}_2, & u_1^{(3)} = \mathsf{A}_3, & u_1^{(4)} = 0, \\
u_2^{(1)} = \mathsf{B}_1, & u_2^{(2)} = \mathsf{B}_2, & u_2^{(3)} = \mathsf{B}_3, & u_2^{(4)} = 0, \\
u_3^{(1)} = \Gamma_1, & u_3^{(2)} = \Gamma_2, & u_3^{(3)} = \Gamma_3, & u_3^{(4)} = 0, \\
u_4^{(1)} = Sx_0', & u_4^{(2)} = Sy_0', & u_4^{(3)} = Sz_0', & u_4^{(4)} = S.
\end{cases}
$$

Danach ergeben sich aber mit a'_{kl} für b_{kl} aus (12) die Formeln § 66, (19)—(21) und mit b_{kl} für e_{kl} aus (34) die Formeln § 75, (13)—(16).

§ 139. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach dem Rang.

1. Begriff des Ranges. Nach § 138, (23) und (32) ist jede der neuen Determinanten vierten, dritten, zweiten und ersten Grades B, B_{mn}, β_{mn}, b_{mn} eine *lineare homogene* Funktion der bezüglich gleichgradigen alten Determinanten A, A_{kl}, α_{kl}, a_{kl} und umgekehrt. Verschwinden daher alle alten Determinanten eines bestimmten Grades, so verschwinden auch alle neuen desselben Grades und umgekehrt. Das Verschwinden *aller* Determinanten eines *bestimmten* Grades, welches überdies das aller Determinanten *höheren* Grades nach sich zieht (I Anm. 1, III, (17); II, (6); I, (4)), ist daher eine vom Koordinatentetraeder unabhängige Eigenschaft der Fläche, die wir als ihren *Rang* bezeichnen. Wir nennen nämlich die *Fläche zweiter Ordnung* § 138, (1) oder *zweiter Klasse* § 138, (1') vom *Range 4,* wenn die Determinante $A \neq 0$ ist; vom *Range 3,* wenn $A = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} verschwinden; vom *Range 2,* wenn alle A_{kl}, aber nicht alle Unterdeterminanten zweiten Grades α_{kl} verschwinden; vom *Range 1,* wenn alle α_{kl}, aber nicht alle Elemente a_{kl} verschwinden.

Der Rang der Fläche zweiter Ordnung (oder zweiter Klasse) ist vom Koordinatensystem unabhängig.[76])

2. Bedingung für das Fehlen einer Koordinate in der Gleichung der Fläche. Die Fläche:

$$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0 \tag{1}$$

hat nach § 138, (12) in bezug auf irgendein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ die Gleichung:

$$f = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n b_{mn} y_m y_n = 0, \quad b_{mn} = f_{mn} = f_{nm}. \tag{2}$$

Wir nehmen an, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten der vier Glieder, die y_4 enthalten, verschwinden, also (§ 138, (6)):

$$f_{m4} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^4{}^k f_k^{(4)} x_k^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4. \tag{3}$$

Aus diesen in den vier Größen $f_k^{(4)}$ linearen homogenen Gleichungen

mit der nicht verschwindenden Determinante S (§ 138, (16)) folgt aber (I Anm. 2, III, 3):

$$(4)\qquad f_k^{(4)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_l^{(4)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Wenn umgekehrt die Ecke $J_4 = x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}, x_4^{(4)}$ den vier Gleichungen (4) genügt, so bestehen die vier Gleichungen (3). So folgt allgemein:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen der Koordinate y_m ($m = 1, 2, 3$ oder 4) in der Gleichung (2) ist, daß die Koordinaten $x_l^{(m)}$ der Ecke J_m des neuen Koordinatentetraeders den vier Gleichungen genügen:*

$$(5)\qquad f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Ausgeschrieben lauten diese:

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0. \end{cases}$$

Ebenso fehlt die Koordinate v_m in der transformierten Gleichung der Fläche zweiter Klasse (§ 138, (34)), wenn die Koordinaten $u_l^{(m)}$ der Seitenfläche I_m des neuen Koordinatentetraeders den vier Gleichungen genügen:

$$(5')\qquad F_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

3. Eigentliche und uneigentliche Flächen. Im allgemeinen gibt es keinen Punkt, der den Gleichungen (6) oder (5) genügt. Falls es aber einen solchen Punkt gibt, so ist er ein Punkt der Fläche selbst, da nach § 138, (4) identisch:

$$(7)\qquad \sum_1^4 {}^k f_k x_k = f.$$

Wir nennen daher[49])

jeden den Gleichungen (5) genügenden Punkt einen singulären (Doppel-) Punkt der Fläche $f = 0$.

jede den Gleichungen (5') genügende Ebene eine singuläre (Doppel-) Ebene der Fläche $F = 0$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Gleichungen (6) keine Lösung haben, ist aber: $A \neq 0$; also:

Die Flächen zweiter Ordnung vom Range 4 haben keinen singulären Punkt (§ 78, 2).

Die Flächen zweiter Klasse vom Range 4 haben keine singuläre Ebene.

Sie heißen *eigentliche* Flächen zweiter Ordnung, bezüglich Klasse. *Ihre Gleichung enthält, auf welches Koordinatentetraeder sie auch bezogen ist, stets alle vier Koordinaten.*

Flächen geringeren Ranges haben stets einen oder mehr *singuläre* Punkte. Ihre Gleichungen können in *weniger als vier Koordinaten* dargestellt werden. Sie selbst gehören also niedrigeren Mannigfaltigkeiten als dem Raume an und heißen daher *uneigentliche Flächen zweiter Ordnung,* bezüglich Klasse.

4. Flächen mit einem singulären Punkt. Ist die Fläche (1) vom Range 3, so daß $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} verschwinden, so gibt es (I Anm. 2, III, (12)) *einen singulären Punkt,* für *dessen Koordinaten* x_k^0 aus (6) hervorgeht:[79])

(8) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4.

Wählt man diesen Punkt als Ecke J_4 des neuen Koordinatentetraeders, also:

(9) $$x_k^{(4)} = x_k^0,$$

so verschwindet aus (2) nach 2, I die Koordinate y_4 und die Gleichung der Fläche wird:

(10) $$\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt (I § 72, (18)):

Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 3 ist ein Kegel zweiter Ordnung; ihr singulärer Punkt ist die Spitze des Kegels (§ 79, 3).	*Die Fläche zweiter Klasse vom Range 3 ist ein Kegelschnitt; ihre singuläre Ebene ist die Ebene des Kegelschnittes.*

5. Determinante und Unterdeterminante des Kegels. Die Determinante der Gleichung (10), insofern sie als Gleichung zwischen den *vier* Variabeln y_1, y_2, y_3, y_4 betrachtet wird, ist (§ 138, (17)):

(11) $$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^2 A = 0.$$

Daher verschwinden alle Unterdeterminanten B_{mn} bis auf die eine:

(12) $$B_{44} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

die nicht verschwindet, da die Fläche vom Range 3 sein soll (vgl. 1). Infolgedessen verkürzt sich die vierte Gleichung § 138, (32) auf:[121])

(13) $$S^2 A_{kl} = B_{44} x_k^{(4)} x_l^{(4)} = B_{44} x_k^{(0)} x_l^{(0)}.$$

Ist die Fläche (1) *ein Kegel, so zerfallen die Unterdeterminanten* A_{kl} *je in zwei Faktoren in dem Sinne* (13), *wo* x_k^0 *die Koordinaten der Spitze sind.*

Indem man diese Werte in die Form § 138, (24) einführt, ergibt sich:[118])

(14) $$S^2 F = B_{44} \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l x_k^0 x_l^0 u_k u_l = B_{44} \Big(\sum_1^4{}^k x_k^0 u_k \Big)^2.$$

Für den Kegel ist die Kovariante F, bis auf einen konstanten Faktor, das vollständige Quadrat einer linearen Form (§ 42, (14)).

Dasselbe folgt aus der zweiten Gleichung § 138, (30) in der Form:

(15) $$S^2 F = B_{44} v_4^2,$$

wo der Wert von v_4 aus § 138, (31) mit Rücksicht auf (9) zu entnehmen ist.

6. Flächen mit singulärer Linie. Ist die Fläche (1) vom Range 2, so daß alle A_{kl}, aber nicht alle α_{kl} verschwinden, so gibt es ∞^1 Punkte, die Punkte einer geraden Linie, die den Gleichungen (6) genügen. Wir nennen diese Linie die *singuläre Linie* der Fläche und finden aus (6) für ihre *Achsenkoordinaten* (I § 61, (13)):

(16) $$q_1^0 : q_2^0 : q_3^0 : q_4^0 : q_5^0 : q_6^0 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6},$$

wo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 ist.

Wählt man auf dieser Linie die beiden Ecken J_3 und J_4 des neuen Tetraeders, also (§ 138, 9; I § 63, Fig. 320):

(17) $$q_k^{(3)} = q_k^0,$$

so verschwindet aus (2) nach 2, I sowohl die Koordinate y_3 als y_4, und die Gleichung der Fläche wird:

(18) $$\sum_1^2{}^m \sum_1^2{}^n b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 2 ist ein Ebenenpaar. Ihre singuläre Linie ist die Schnittachse des Paares.	*Die Fläche zweiter Klasse vom Range 2 ist ein Punktepaar. Ihre singuläre Linie ist der Verbindungsstrahl des Paares.*

7. Determinante und Unterdeterminanten des Ebenenpaares. Die Determinante der Gleichung (18), insofern sie als Gleichung mit *vier* Variabeln betrachtet wird, ist (§ 138, (17)):

$$(19) \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^2 A = 0.$$

Daher verschwinden alle Unterdeterminanten β_{mn} bis auf die eine:

$$(20) \qquad \beta_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

die nicht verschwindet, da die Fläche vom Range 2 sein soll (vgl. **1**). Infolgedessen verkürzt sich die zweite Gleichung § 138, (32) auf:

$$(21) \qquad S^4 \alpha_{kl} = \beta_{33} q_k^{(3)} q_l^{(3)} = \beta_{33} q_k^0 q_l^0.$$

Ist die Fläche (1) *ein Ebenenpaar, so zerfallen die Unterdeterminanten* α_{kl} *je in zwei Faktoren im Sinne* (21), *wo* q_k^0 *die Koordinaten der Doppellinie sind.*[121])

Indem man die Werte (21) in die Form § 138, (25) einführt, ergibt sich:[118])

$$(22) \qquad S^4 \varphi = \beta_{33} \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l q_k^0 q_l^0 p_k p_l = \beta_{33} \Big(\sum_1^6{}^k q_k^0 p_k \Big)^2.$$

Für das Ebenenpaar ist die kovariante Form φ, *bis auf einen konstanten Faktor, das vollständige Quadrat einer linearen Form.*

Dasselbe folgt aus der dritten Gleichung § 138, (30) in der Gestalt:

$$\varphi = \beta_{33} r_3^2,$$

wo der Wert von r_3 aus § 138, (31) mit Rücksicht auf (17) zu entnehmen ist.

8. Koeffizienten und Koordinaten der beiden Ebenen des Ebenenpaares. Sind u_k' und u_k'' die Koordinaten der beiden Ebenen des Paares, so ist bis auf einen Faktor:

$$f = \Big\{ \sum_1^4{}^k u_k' x_k \Big\} \Big\{ \sum_1^4{}^l u_l'' x_l \Big\} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l u_k' u_l'' x_k x_l$$

und dementsprechend ergibt sich[69]):

Zwischen den Koeffizienten der Gleichung (1) *eines Ebenenpaares und den Koordinaten der beiden Ebenen des Paares bestehen die Beziehungen:*

$$(23) \qquad a_{kl} = \tfrac{1}{2}(u_k' u_l'' + u_l' u_k'').$$

Die Bestimmung von u_k', u_k'' durch a_{kl} wird sich § 143, 7 ergeben.

9. Flächen mit einer singulären Ebene. Ist die Fläche (1) vom Range 1, so daß alle α_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, so

gibt es ∞^2 Punkte, die Punkte einer Ebene, die den Gleichungen (6) genügen. Wir nennen diese Ebene die *singuläre Ebene* der Fläche und haben aus (6) für ihre Koordinaten:

$$(24) \qquad u_1^0 : u_2^0 : u_3^0 : u_4^0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4},$$

wo $k = 1, 2, 3$ oder 4 ist.

Wählt man auf dieser Ebene die drei Ecken J_2, J_3, J_4 des neuen Tetraeders, also:

$$(25) \qquad u_k^{(1)} = u_k^0,$$

so verschwinden aus (2) nach 2, I y_2, y_3 und y_4, und die Gleichung der Fläche wird:

$$(26) \qquad b_{11} y_1^2 = 0.$$

Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 1 ist eine Doppelebene, ihre singuläre Ebene.

Die Fläche zweiter Klasse vom Range 1 ist ein Doppelpunkt, ihr singulärer Punkt.

10. Determinante und Koeffizienten der Doppelebene. Von der Determinante B verschwinden alle Elemente außer b_{11}. Zugleich ist nach der ersten Gleichung § 138, (32):

$$(27) \qquad S^2 a_{kl} = b_{11} u_k^{(1)} u_l^{(1)} = b_{11} u_k^0 u_l^0.$$

Ist die Fläche (1) *eine Doppelebene, so zerfallen die Koeffizienten a_{kl} je in zwei Faktoren im Sinne* (27), *wo u_k^0 die Koordinaten der Doppelebene sind.*[121])

Mit diesen Werten wird aus (1):[118])

$$(28) \qquad S^2 f = b_{11} \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l u_k^0 u_l^0 x_k x_l = b_{11} \Big(\sum_1^4{}^k u_k^0 x_k\Big)^2.$$

Für die Doppelebene ist die Form f selbst ein vollständiges Quadrat.

11. Allgemeinheit der Bedingungen des Ranges. Der Rang einer Fläche (1) wurde unter **1** als eine *Eigenschaft ihrer Determinante* A definiert. Die Entwicklungen **2—10** haben aber die *geometrische Bedeutung* des Ranges ergeben. Sie zeigen, daß die § 81, (27) für *gemeine Koordinaten* aufgestellte Tabelle auch für *Tetraederkoordinaten* dieselbe bleibt.

Die Gleichung (1) *stellt nämlich je nach dem Rang ihrer Determinante folgende Flächen dar*[76]):

$$(29) \qquad \begin{cases} A \neq 0\text{: Eigentliche Flächen zweiter Ordnung;} \\ A = 0,\ A_{kl} \neq 0!\text{: Kegel zweiter Ordnung;} \\ A = 0,\ A_{kl} = 0!,\ \alpha_{kl} \neq 0!\text{: Getrennte Ebenenpaare;} \\ A = 0,\ A_{kl} = 0!,\ \alpha_{kl} = 0!,\ a_{kl} \neq 0!\text{: Doppelebenen.} \end{cases}$$

Dabei soll unter $A_{kl}=0!$ oder $A_{kl}\neq 0!$ usw. verstanden werden, daß „alle $A_{kl}=0$" oder „nicht alle $A_{kl}=0$" usw. Infolge der Identitäten § 79, (10); § 81, (17); (24) können aber bei reellen a_{kl} die drei letzten Zeilen (29) auch in der Form gegeben werden:

$$(30)\quad \begin{cases} A=0,\ A'\neq 0\text{: Kegel zweiter Ordnung;}\\ A=0,\ A'=0,\ A''\neq 0\text{; Getrennte Ebenenpaare;}\\ A=0,\ A'=0,\ A''=0,\ A'''\neq 0\text{: Doppelebene,}\end{cases}$$

wo A', A'', A''' die *Summen der Hauptunterdeterminanten* dritten, zweiten und ersten Grades der Determinante A bedeuten (§ 79, (5); (6); (7)).

§ 140. Gleichzeitige Transformation der Fläche zweiter Ordnung und der Ebene.

1. Gleichungen von Fläche und Ebene. Die beiden Gleichungen:

$$(1)\quad f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l a_{kl}x_kx_l=0,$$

$$(2)\quad u=\sum_1^4{}^k u_kx_k=0$$

stellen zusammen den Ort der Punkte dar, die gleichzeitig einer Fläche zweiter Ordnung und einer Ebene angehören. Es sind *die Gleichungen der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene in laufenden Punktkoordinaten.*

$$(1')\quad F=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l e_{kl}u_ku_l=0,$$

$$(2')\quad x=\sum_1^4{}^k x_ku_k=0$$

stellen zusammen den Ort der Ebenen dar, die gleichzeitig einer Fläche zweiter Klasse und einem Punkte angehören. Es sind *die Gleichungen des Berührungskegels von dem Punkte an die Fläche in laufenden Ebenenkoordinaten.*

2. Gleichzeitige Transformation von Fläche und Ebene. Beim Übergang zu einem neuen Koordinatentetraeder ändert sich die Gleichung (1) nach § 138, (12) in:

$$(3)\quad f=\sum_1^4{}^m\sum_1^4{}^n b_{mn}y_my_n=0$$

und die Gleichung (2) in der Weise (I § 63, (36)):

$$(4)\quad u=\sum_1^4{}^m v_my_m=0,$$

wo v_m den Wert § 138, (31) hat.

Dies sind die Gleichungen der Schnittlinie in bezug auf das neue Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$.

3. Invarianteneigenschaft der geränderten Determinante. Die mit den Koordinaten der Ebene (2) *geränderte Determinante der Fläche* (1):[119])

(5)
$$A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung von Fläche und Ebene, beziehungsweise der Schnittlinie $f \times u$ beider eigentümliche Konstante. In gleicher Weise sei:

(6)
$$B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung der Determinanten (5) und (6) nach den Elementen der letzten Zeilen und Kolonnen ergibt sich:

(7)
$$A^u = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l; \quad B^v = -\sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B_{mn} v_m v_n.$$

Die negative geränderte Determinante ist daher die Form F in § 138, (24):

(8)
$$A^u = -F.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ist wie in § 138, 6 mit Rücksicht auf § 138, (31):

$$\begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{14} & v_1 \\ . & & . & . \\ b_{41} & .. & b_{44} & v_4 \\ v_1 & .. & v_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & .. & x_4^{(1)} & 0 \\ . & & . & . \\ x_1^{(4)} & .. & x_4^{(4)} & 0 \\ 0 & .. & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & .. & f_4^{(1)} & v_1 \\ . & & . & . \\ f_1^{(4)} & .. & f_4^{(4)} & v_4 \\ u_1 & .. & u_4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & .. & f_4^{(1)} & v_1 \\ . & & . & . \\ f_1^{(4)} & .. & f_4^{(4)} & v_4 \\ u_1 & .. & u_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & .. & x_4^{(1)} & 0 \\ . & & . & . \\ x_1^{(4)} & .. & x_4^{(4)} & 0 \\ 0 & .. & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{14} & u_1 \\ . & & . & . \\ a_{41} & .. & a_{44} & u_4 \\ u_1 & .. & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

und danach, in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung § 138, (30):

(9)
$$B^v = S^2 A^u.$$

Die geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Ebene (§ 43, 2).

4. Gleichungen von Fläche und zwei Ebenen. Kommt zu (1) und (2) noch eine Ebene, bezüglich zu (1′) und (2′) noch ein Punkt:

(10) $u' = \sum_1^4{}^k u_k' x_k = 0$	(10′) $x' = \sum_1^4{}^k x_k' u_k = 0$

hinzu, so stellen die drei Gleichungen

(1), (2), (10) das *Paar der Schnittpunkte* dar, welche die Fläche zweiter Ordnung mit der Geraden $q = u \times u'$ gemein hat.	(1′), (2′), (10′) das *Paar der Tangentialebenen* dar, welche die Fläche zweiter Klasse durch die Gerade $p = xx'$ sendet.

Bei der Transformation wird wie in (4):

$$(11) \qquad u' = \sum_1^4{}^m v_m' y_m = 0\,.$$

5. Die zweifach geränderte Determinante als Invariante. Die mit den Koordinaten der beiden Ebenen (2) und (10) geränderte Determinante der Fläche (1)[119]:

$$(12) \qquad A^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung der Fläche und der Schnittlinie der beiden Ebenen (vgl. (16)) eigentümliche Konstante. In gleicher Weise sei:

$$(13) \qquad B^{vv'} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 & v_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Wie unter 3 ergibt sich, wenn S als Determinante fünften Grades dargestellt wird:

$$(14) \qquad B^{vv'} = S^2 A^{uu'}.$$

Die zweifach geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Gerader.

6. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Linienkoordinaten. Die Achsenkoordinaten der Schnittlinie $q = u \times u' = v \times v'$ sind (I § 63, (13); (14)):

$$(15) \qquad q_k = \begin{vmatrix} u_{k_1} & u_{k_1}' \\ u_{k_2} & u_{k_2}' \end{vmatrix}, \quad s_m = \begin{vmatrix} v_{m_1} & v_{m_1}' \\ v_{m_2} & v_{m_2}' \end{vmatrix},$$

wo k und m die Nummern der Variationen $k_1 k_2$ und $m_1 m_2$ in § 138, (20) bedeuten. Nach diesen Koordinaten entwickelt, werden die Determinanten (12) und (13):[193])

(16) $$A^{uu'} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{\bar{k}\bar{l}} q_k q_l, \quad B^{vv'} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta_{\bar{m}\bar{n}} s_m s_n,$$

wo $\bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ die zu k, l, m, n komplementären Variationen sind, oder auch (I Anm. 1, III, (11)):

(17) $$AA^{uu'} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k q_l, \quad BB^{vv'} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \mathsf{B}_{mn} s_m s_n.$$

Setzt man jedoch wie § 138, (26) mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

(18) $$q_k' = \sigma p_{\bar{k}},$$

so wird (I § 63, (28'); (32); (27')):

$$S s_l = S\sigma \sum{}^k p_k^{(l)} p_{\bar{k}} = \sigma \sum{}^k q_{\bar{k}}^{(\bar{l})} p_{\bar{k}} = \sigma \sum{}^k q_k^{(\bar{l})} p_k = \sigma S^2 r_{\bar{l}}$$

und damit:

(18') $$s_l = \sigma S r_{\bar{l}}.$$

Danach kann man für (16) auch schreiben:

(19) $$A^{uu'} = \sigma^2 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l, \quad B^{vv'} = \sigma^2 S^2 \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta_{mn} r_m r_n.$$

Die Invarianteneigenschaft (14) folgt daher auch aus der dritten Formel § 138, (30).

Die zweifach geränderte Determinante deckt sich in der Tat mit den Formen § 138, (25) derart, daß nach (17) und (19):

(20) $$AA^{uu'} = \Phi, \quad A^{uu'} = \sigma^2 \varphi \text{ (vgl. § 138, (27))}.$$

7. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Ebenenkoordinaten. Statt nach den Elementen der *beiden* letzten Zeilen und Kolonnen entwickeln wir jetzt die Determinante (12) nur nach *einer* letzten Zeile und Kolonne und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen sechszehn Unterdeterminanten vierten Grades der geränderten Determinante A^u in (5), die zugleich die geränderten Unterdeterminanten A_{kl} der Determinante A sind (§ 138, (9)), mit:

(21) $$A_{kl}^u = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & a_{k_1 l_3} & u_{k_1} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & a_{k_2 l_3} & u_{k_2} \\ a_{k_3 l_1} & a_{k_3 l_2} & a_{k_3 l_3} & u_{k_3} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & u_{l_3} & 0 \end{vmatrix},$$

wo k und l die Nummern der Variationen $k_1k_2k_3$ und $l_1l_2l_3$ in der Reihe 234, 314, 124, 321 sind (§ 138, (18)). Entsprechend bezeichnen wir die Unterdeterminanten von B^v in (6).

Die Entwicklung der Determinanten (12) *und* (13) *gibt dann:*[193])

(22) $$A^{uu'} = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^u_{kl} u_k' u_l'; \quad B^{vv'} = -\sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B^v_{mn} v_m' v_n'.$$

Vermöge der Transformation von dem einen Koordinatentetraeder auf das andere ist aber nach (14):

(23) $$S^2 \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^u_{kl} u_k' u_l' = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B^v_{mn} v_m' v_n',$$

identisch in bezug auf die beiden Ebenen u, v und u', v'.

8. Beziehung der geränderten Unterdeterminanten zueinander. Setzt man in der Identität (23) mit Rücksicht auf § 138, (28) und (31) entweder links:

(24) $$Su_k' = \sum{}^m u_k^{(m)} v_m', \quad Su_l' = \sum{}^n u_l^{(n)} v_n'$$

oder rechts:

(25) $$v_m' = \sum{}^k x_k^{(m)} u_k', \quad v_n' = \sum{}^l x_l^{(n)} u_l',$$

so folgt identisch in v_m', v_n', bezüglich u_k', u_l':

$$\sum{}^k \sum{}^l A^u_{kl} \sum{}^m \sum{}^n u_k^{(m)} v_m' u_l^{(n)} v_n'$$
$$= \sum{}^m \sum{}^n \left\{ \sum{}^k \sum{}^l A^u_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m' v_n' = \sum{}^m \sum{}^n B^v{}_{mn} v_m v_n'$$

und:

$$S^2 \sum{}^k \sum{}^l A^u_{kl} u_k' u_l' = \sum{}^m \sum{}^n B^v_{mn} \sum{}^k \sum{}^l x_k^{(m)} u_k' x_l^{(n)} u_l'$$
$$= \sum \sum{}^l \left\{ \sum{}^m \sum{}^n B^v_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} u_k' u_l'.$$

Durch Gleichsetzen der beiderseitigen Ko.ffizienten von $v_m' v_n'$ und $u_k' u_l'$ ergibt sich daher:[113])

Zwischen den geränderten Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} und B_{mn} der ursprünglichen Determinante A und der transformierten B bestehen die Beziehungen:

(26) $$\begin{cases} B^v_{mn} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^u_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ S^2 A^u_{kl} = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B^v_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)}. \end{cases}$$

9. Gleichungen von Fläche und drei Ebenen. Nimmt man zu (1), (2), (10) noch eine dritte Ebene:

$$(27) \qquad u'' = \sum_1^4 {}^k u_k'' x_k = 0$$

hinzu, so bedeutet das gleichzeitige Bestehen der vier Gleichungen (1), (2), (10) und (27), *daß der Schnittpunkt* $u \times u' \times u''$ *der drei Ebenen auf der Fläche* f *liegt.*

Bei der Transformation wird wie in (4):

$$(28) \qquad u'' = \sum_1^4 {}^m v_m'' y_m = 0.$$

10. Die dreifach geränderte Determinante als Invariante. Die mit den Koordinaten der drei Ebenen (2), (10), (27) geränderte Determinante der Fläche (1):

$$(29) \qquad A^{uu'u''} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1 & u_1'' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' & u_2'' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' & u_3'' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' & u_4'' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 & 0 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung der Fläche und des Schnittpunktes der drei Ebenen eigentümliche Konstante, die sich nicht ändert, wenn für u, u', u'' drei andere durch den Schnittpunkt gehende Ebenen gesetzt werden (I § 58, (29); Anm. 1, IV, 4). In gleicher Weise sei:

$$(30) \qquad B^{vv'v''} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 & v_1' & v_1'' \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Wie unter **3** ergibt sich, wenn S als Determinante sechsten Grades dargestellt wird:

$$(31) \qquad B^{vv'v''} = S^2 A^{uu'u''}.$$

Die dreifach geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Punkt.

11. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Punktkoordinaten. Die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen (2), (10), (27) sind im alten und neuen System:[113])

$$(32)\qquad x_k = \begin{vmatrix} u_{k_1} & u'_{k_1} & u''_{k_1} \\ u_{k_2} & u'_{k_2} & u''_{k_2} \\ u_{k_3} & u'_{k_3} & u''_{k_3} \end{vmatrix}, \qquad S y_m = \begin{vmatrix} v_{m_1} & v'_{m_1} & v''_{m_1} \\ v_{m_2} & v'_{m_2} & v''_{m_2} \\ v_{m_3} & v'_{m_3} & v''_{m_3} \end{vmatrix},$$

$k.k_1k_2k_3$, $m.m_1m_2m_3 = 1.2\,3\,4,\ 2.3\,1\,4,\ 3.1\,2\,4,\ 4.3\,2\,1$, wo der an sich unwesentliche Faktor S hinzugefügt ist, um den Formeln § 138, (31) zu entsprechen, wie § 43, 4. Damit gibt *die Entwicklung der Determinanten* (29) *und* (30) *nach den Unterdeterminanten der drei letzten Zeilen und Kolonnen:*[193])

$$(33)\ A^{uu'u''} = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = -f; \quad B^{vv'v''} = -S^2 \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n b_{mn} y_m y_n.$$

Die Invarianteneigenschaft (31) folgt daher auch aus der ersten Gleichung § 138, (30).

12. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Linienkoordinaten. Die Achsenkoordinaten der Schnittlinie der beiden Ebenen u' und u'' oder v' und v'' sind wie in (15):

$$(34)\qquad q_k' = \begin{vmatrix} u'_{k_1} & u''_{k_1} \\ u'_{k_2} & u''_{k_2} \end{vmatrix}, \qquad s'_m = \begin{vmatrix} v'_{m_1} & v''_{m_1} \\ v'_{m_2} & v''_{m_2} \end{vmatrix}.$$

Diejenigen 36 Unterdeterminanten dritten Grades der geränderten Determinante A^u in (5), die zugleich die geränderten Unterdeterminanten α_{kl} der Determinante A sind (§ 138, (9)), bezeichnen wir mit (vgl. (21)):

$$(35)\qquad \alpha^u_{kl} = \begin{vmatrix} a_{k_1l_1} & a_{k_1l_2} & u_{k_1} \\ a_{k_2l_1} & a_{k_2l_2} & u_{k_2} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & 0 \end{vmatrix},$$

wo k und l die Nummern der Variationen k_1k_2 und l_1l_2 in § 138, (20) bedeuten. Entsprechend bezeichnen wir die Unterdeterminanten von B^v in (6).

Die Entwicklung der Determinanten (29) *und* (30) *nach den Unterdeterminanten der zwei letzten Zeilen und Kolonnen gibt alsdann:*

$$(36)\qquad A^{uu'u''} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} q'_k q'_l; \quad B^{vv'v''} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta^v_{mn} s'_m s'_n$$

oder nach (18) und (18'):

$$(37)\ A^{uu'u''} = \sigma^2 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} p'_k p'_l; \quad B^{vv'v''} = \sigma^2 S^2 \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta^v_{mn} r'_m r'_n.$$

Danach ist vermöge der Transformation von dem einen Koordinatentetraeder auf das andere nach (31):

$$(38)\qquad \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} p_k' p_l' = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta^v_{mn} r_m' r_n'.$$

13. Beziehung der geränderten Unterdeterminanten zueinander. Setzt man in der vermöge der Transformation identischen Gleichung (38) links, bezüglich rechts nach § 138, (29); (31):

$$(39)\qquad p_k' = \sum{}^m p_k^{(m)} r_m', \quad S^2 r_m' = \sum q_k^{(m)} p_k',$$

so ergibt sich:

$$\sum{}^m \sum{}^n \Big\{ \sum{}^k \sum{}^l \alpha^u_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)} \Big\} r_m' r_n' = \sum{}^m \sum{}^n \beta^v_{mn} r_m' r_n',$$

$$S^4 \sum{}^k \sum{}^l \alpha^u_{kl} p_k' p_l' = \sum \sum{}^l \Big\{ \sum{}^m \sum{}^n \beta^v_{mn} q_k^{(m)} q_l^{(n)} \Big\} p_k' p_l'.$$

Zwischen den geränderten Unterdeterminanten zweiten Grades α_{kl} und β_{mn} der ursprünglichen Determinante A und der transformierten B bestehen die Beziehungen:

$$(40)\qquad \begin{cases} \beta^v_{mn} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)}, \\ S^4 \alpha^u_{kl} = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta^v_{mn} q_k^{(m)} q_l^{(n)}. \end{cases}$$

14. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Ebenenkoordinaten. Wir bezeichnen diejenigen sechszehn Unterdeterminanten fünften Grades der zweifach geränderten Determinante $A^{uu'}$ in (12), die zugleich die zweifach geränderten Unterdeterminanten A_{kl} der Determinante A sind (vgl. (21)), mit:

$$(41)\qquad A^{uu'}_{kl} = \begin{vmatrix} a_{k_1l_1} & a_{k_1l_2} & a_{k_1l_3} & u_{k_1} & u'_{k_1} \\ a_{k_2l_1} & a_{k_2l_2} & a_{k_2l_3} & u_{k_2} & u'_{k_2} \\ a_{k_3l_1} & a_{k_3l_2} & a_{k_3l_3} & u_{k_3} & u'_{k_3} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & u_{l_3} & 0 & 0 \\ u'_{l_1} & u'_{l_2} & u'_{l_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und entsprechend die aus b_{mn}, v_m, v_m' gebildeten.

Die Entwicklung der Determinanten (29) *und* (30) *nach den Elementen der letzten Zeile und Kolonne gibt alsdann:*

$$(42)\qquad A^{uu'u''} = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^{uu'}_{kl} u_k'' u_l''; \quad B^{vv'v''} = -\sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n B^{vv'}_{mn} v_m'' v_n''.$$

Danach folgt aus (31):

$$(43)\qquad S^2\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l A_{kl}^{uu'}u_k''u_l''=\sum_1^4{}^m\sum_1^4{}^n B_{mn}^{vv'}v_m''v_n''.$$

15. Beziehung der geänderten Unterdeterminanten zueinander. Setzt man hier links, bezüglich rechts nach (24) und (25):

$$(44)\qquad Su_k''=\sum{}^m u_k^{(m)}v_m'',\qquad v_m''=\sum x_k^{(m)}u_k'',$$

so folgt:

$$\sum{}^m\sum{}^n\Big\{\sum{}^k\sum{}^l A_{kl}^{uu'}u_k^{(m)}u_l^{(n)}\Big\}v_m''v_n''=\sum{}^m\sum{}^n B_{mn}^{vv'}v_m''v_n'',$$

$$S^2\sum{}^k\sum{}^l A_{kl}^{uu'}u_k''u_l''=\sum{}^k\sum{}^l\Big\{\sum{}^m\sum{}^n B_{mn}^{vv'}x_k^{(m)}x_l^{(n)}\Big\}u_k''u_l''.$$

Zwischen den zweifach geränderten Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} und B_{mn} der Determinanten A und B bestehen daher die Beziehungen:

$$(45)\qquad \begin{cases} B_{mn}^{vv'}=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l A_{kl}^{uu'}u_k^{(m)}u_l^{(n)};\\ S^2A_{kl}^{uu'}=\sum_1^4{}^m\sum_1^4{}^n B_{mn}^{vv'}x_k^{(m)}x_l^{(n)}.\end{cases}$$

§ 141. Einteilung der ebenen Schnitte nach dem Range.

1. Einführung der schneidenden Ebene als Koordinatenebene. Die auf ein Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ bezogenen Gleichungen:

$$(1)\quad f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l a_{kl}x_kx_l=0,\qquad (2)\quad u=\sum_1^4{}^k u_kx_k=0$$

der Schnittkurve einer Fläche zweiter Ordnung f und einer Ebene u erhalten in einem beliebigen neuen Tetraeder mit den Ecken $J_1J_2J_3J_4$ die Form § 140, (3) und (4).

Nimmt man dabei die Ebene u selbst als Seitenfläche I_4 des neuen Tetraeders (I § 63, 8), so werden:

$$(3)\qquad u_1^{(4)}=u_1,\ u_2^{(4)}=u_2,\ u_3^{(4)}=u_3,\ u_4^{(4)}=u_4$$

die alten und mit Rücksicht auf § 138, (31) und die Definition der $u_k^{(m)}$ in § 138, 7:

$$(4)\qquad v_1=0,\ v_2=0,\ v_3=0,\ v_4=\sum_1^4{}^k x_k^{(4)}u_k^{(4)}=S$$

die neuen Koordinaten der schneidenden Ebene.

Die Gleichungen der Schnittkurve im neuen Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ lauten daher:

$$(5)\qquad f = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n b_{mn} y_m y_n = 0, \qquad (6)\qquad u = S y_4 = 0.$$

2. Gleichung der Schnittkurve in ihrer Ebene. Für alle Punkte der Seitenfläche l_4, für die $y_4 = 0$ ist, sind aber y_1, y_2, y_3 zugleich Dreieckskoordinaten in bezug auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$ (I § 57, 16).

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche f mit der Ebene u lautet daher in Dreieckskoordinaten in bezug auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$:

$$(7)\qquad \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Ebene u kann dabei, statt durch die Gleichung (2), auch durch die drei Punkte $J_1 = x_k^{(1)}$, $J_2 = x_k^{(2)}$, $J_3 = x_k^{(3)}$ gegeben sein, da die Koeffizienten b_{mn} direkt von a_{kl}, $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ abhängen (§ 138, (13)).[45])

3. Der Rang der Schnittkurve nach ihrer Determinante in der Ebene. Die Determinante des Kegelschnittes (7), sofern er für sich in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ betrachtet wird, ist:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{44},$$

und ihre Unterdeterminanten sind:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta_{11}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta_{22}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \beta_{33}, \ldots,$$

wo die Benennungen rechts die bereits für die Unterdeterminanten von B eingeführten sind (§ 138, 7; 8). Daher folgt mit Rücksicht auf § 42, 3; 4; 7:

Die Kurve, in der die Fläche (1) *von der Ebene der drei Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ geschnitten wird, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:*

$$(10)\qquad B_{44} \neq 0;$$

ein getrenntes Linienpaar, wenn:

$$(11)\qquad B_{44} = 0;\ \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12} \text{ nicht alle } 0;$$

eine Doppellinie, wenn:

(12) $\beta_{11} = 0,\ \beta_{22} = 0,\ \beta_{33} = 0,\ \beta_{23} = 0,\ \beta_{31} = 0,\ \beta_{12} = 0;$
$b_{11},\ b_{22},\ b_{33},\ b_{23},\ b_{31},\ b_{12}$ *nicht alle* 0;

unbestimmt, wenn:

(13) $b_{11} = 0,\ b_{22} = 0,\ b_{33} = 0,\ b_{23} = 0,\ b_{31} = 0,\ b_{12} = 0.$

4. Der Rang der Schnittkurve nach ihrer Determinante im Raume. Die mit den Koordinaten der Ebene (6) geränderte Determinante der Fläche (5) ist nach § 140, (6):

$$(14)\qquad B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & S \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \end{vmatrix} = -S^2 B_{44}.$$

Ferner wird, wenn $m \cdot m_1 m_2 m_3$, $n \cdot n_1 n_2 n_3$ die Permutationen § 138, (18) durchlaufen:

$$(15)\qquad B^v_{mn} = \begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & b_{m_1 n_3} & v_{m_1} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & b_{m_2 n_3} & v_{m_2} \\ b_{m_3 n_1} & b_{m_3 n_2} & b_{m_3 n_3} & v_{m_3} \\ v_{n_1} & v_{n_2} & v_{n_3} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -S^2\beta_{mn}, & \text{wenn } m, n \text{ beide} = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{wenn } m, n \text{ nicht beide} = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Weiter wird, wenn m und n die Nummern der Variationen $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ in § 138, (20) bedeuten:

$$(16)\qquad \beta^v_{mn} = \begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & v_{m_1} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & v_{m_2} \\ v_{n_1} & v_{n_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -S^2 b_{\bar{m}\bar{n}}, & \text{wenn } m, n \text{ beide} = 4, 5, 6; \\ 0, & \text{wenn } m, n \text{ nicht beide} = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nach § 140, (9); (26); (40) wird demgemäß:

$$(17)\qquad A^u = -B_{44},$$

$$(18)\qquad -S^2\beta_{mn} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^u_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \qquad (m,\ n = 1, 2, 3),$$

$$-S^2 b_{\bar{m}\bar{n}} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)} \qquad (\bar{m},\ \bar{n} = 1, 2, 3);$$

$$(19)\qquad -A^u_{kl} = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n \beta_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)} \qquad (k,\ l = 1, 2, 3, 4),$$

$$-S^2\alpha^u_{kl} = \sum_1^3{}^{\bar{m}} \sum_1^3{}^{\bar{n}} b_{\bar{m}\bar{n}} q_k^{(m)} q_l^{(n)} \qquad (k,\ l = 1, 2, \ldots, 6).$$

Daher verschwindet A^u stets und nur mit B_{44}; verschwinden alle

β_{mn} ($m = 1, 2, 3$), wenn alle A^u_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 4$) verschwinden, und umgekehrt; verschwinden alle $b_{\bar{m}\bar{n}}$ ($\bar{m}, \bar{n} = 1, 2, 3$), wenn alle α^u_{kl} ($k, l = 1, 2, \ldots, 6$) verschwinden, und umgekehrt. Daher folgt aus **3**:

Die Kurve, in der die Fläche (1) *von der Ebene* (2) *geschnitten wird, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:*

$$A^u \neq 0; \tag{20}$$

ein getrenntes Linienpaar, wenn:

(21) $A^u = 0$, *aber nicht alle* A^u_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 4$) *verschwinden;*

eine Doppellinie, wenn:

(22) $A^u = 0$, *alle* $A^u_{kl} = 0$ ($k, l = 1, 2, 3, 4$), *aber nicht alle* α^u_{kl} ($k, l = 1, 2, \ldots, 6$) *verschwinden;*

unbestimmt, wenn:

(23) $A^u = 0$, *alle* $A^u_{kl} = 0$ ($k, l = 1, 2, 3, 4$), *alle* $\alpha^u_{kl} = 0$ ($k, l = 1, 2, \ldots, 6$).

In (22) folgt überdies die Bedingung $A^u = 0$ nach (18), (9), (8), (17) aus $A^u_{kl} = 0$ und in (23) die Bedingungen $A^u = 0$, $A^u_{kl} = 0$ nach (18), (9), (8), (19), (17) aus $\alpha^u_{kl} = 0$.

Damit sind die *Bedingungen des Ranges* der Schnittkurve von dem neueingeführten speziell gewählten Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ wieder auf das ursprüngliche $E_1 E_2 E_3 E_4$ übertragen.[120])

Nach § 140, (9); (26); (40) sind diese Bedingungen sämtlich *invariant* im Sinne von § 139, **1**.

5. Die Summen der Hauptunterdeterminanten. Infolge der mit u_1, u_2, u_3, u_4 für u, v, w, s geschriebenen *Identitäten* § 107, (25); (43) können bei *reellen* a_{kl}, u_k in die Bedingungen (21)—(23) auch die Summen der *Hauptunterdeterminanten* § 107, (22); (23) eingeführt werden, worauf die Merkmale des Ranges der Schnittkurve lauten:

$$\left\{\begin{array}{l} A^u \neq 0\text{: eigentlicher Kegelschnitt;} \\ A^u = 0,\ A'^u \neq 0\text{: getr. Linienpaar;} \\ A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0\text{: Doppellinie;} \\ A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u = 0\text{: unbestimmt.} \end{array}\right. \tag{24}$$

6. Bedingungen für die Koordinaten des Doppelpunktes. Nach Herstellung der *Merkmale* für das Vorhandensein von Doppelelementen, handelt es sich um die *wirkliche Bestimmung* der letzteren.

In der Gleichung (7) fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_3, wenn:

(25) $$b_{13} = f_{13} = 0,\ b_{23} = f_{23} = 0,\ b_{33} = f_{33} = 0$$

oder nach § 138, (6):

(26) $$\sum_1^4 {}^k f_k^{(3)} x_k^{(m)} = 0 \quad \text{für } m = 1, 2, 3.$$

Diese Gleichungen bedeuten aber, daß $f_k^{(3)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten einer Ebene sind, die mit jedem der Punkte $x_k^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, vereinigt liegt und daher die schneidende Ebene (3) selbst ist, so daß mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

(27) $$f_k^{(3)} + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Zu diesen für $x_k^{(3)}$ notwendigen Bedingungen tritt noch die der vereinigten Lage von $x_k^{(3)}$ und u_k:

(28) $$\sum_1^4 {}^k u_k x_k^{(3)} = 0.$$

I. *In der Gleichung* (7) *der Schnittkurve fehlt immer dann und nur dann die Koordinate* y_m $(m = 1, 2$ *oder* $3)$, *wenn die Ecke* $J_m = x_k^{(m)}$ *des neuen Tetraeders unter Elimination von* ϱ *den fünf Gleichungen genügt:*

(29) $f_k + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4;$ (30) $\sum_1^4 {}^k u_k x_k = 0,$

oder ausführlich geschrieben:

(31) $$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + \varrho u_3 = 0, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 + \varrho u_4 = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

Jeder Punkt, der diesen Gleichungen genügt, heißt, wie in § 42, **3** ein *singulärer* oder *Doppelpunkt* der Schnittkurve (§ 107, **1**).[49])

7. **Eigentliche Kegelschnitte.** Im Falle (20) gibt es, da A^u die Determinante der linearen homogenen Gleichungen (31) ist, *keinen* Doppelpunkt. Die Gleichung (7) enthält stets *alle drei* Koordinaten y_1, y_2, y_3.

Wenn für die Fläche (1) selbst alle A_{kl} verschwinden (§ 139, (29)), so kann nach § 140, (7) die Bedingung (20) niemals erfüllt sein; also:

I. *Eigentliche Kegelschnitte als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche* (1) *ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene ist.*

8. **Getrennte Linienpaare und ihr Doppelpunkt.** Unter den Voraussetzungen (21) ist *ein* bestimmter Doppelpunkt vorhanden, für dessen Koordinaten die Auflösung der Gleichungen (31) ergibt:[79])

(32) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho = A_{k1}^{u} : A_{k2}^{u} : A_{k3}^{u} : A_{k4}^{u} : A_{k5}^{u},$$

$k = 1, 2, 3, 4$ oder 5, wo die A_{kl}^{u} allgemein die Unterdeterminanten vierten Grades der Determinanten § 140, (5) sind, die zum Teil schon § 140, (21) eingeführt wurden. Der Punkt x_k^0 ist schon durch die vier ersten Glieder der Proportion (32) bestimmt. Führt man ihn als Ecke $J_3 = x_k^{(3)}$ ein, so wird nach 6, I die Gleichung (7):

(33) $$b_{11} y_1^2 + 2 b_{12} y_1 y_2 + b_{22} y_2^2 = 0.$$

Aus (32) folgt, wie § 44, (28) mit einem Proportionalitätsfaktor τ und mit $k, l = 1, 2, 3, 4$[121]):

(34) $\tau x_k^0 x_l^0 = A_{kl}^{u}$, (35) $\tau x_k^0 \varrho = A_{k5}^{u}$, (36) $\tau \varrho^2 = A_{55}^{u} = A$.

Da nun $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{33} = 0$, so sind neben (8) auch alle Unterdeterminanten (9) gleich Null mit Ausnahme der einen:

(37) $$\beta_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

die im vorliegenden Falle (11); (21) nicht verschwinden kann. Damit wird aus (19):

$$- A_{kl}^{u} = \beta_{33} x_k^{(3)} x_l^{(3)} = \beta_{33} x_k^0 x_l^0.$$

Der Faktor τ in (34) ist daher gleich $-\beta_{33}$.

Schneidet die Ebene (2) *unter der Voraussetzung* (21) *die Fläche* (1) *in einem getrennten Linienpaar mit dem Doppelpunkt* x_k^0, *so gelten für die Unterdeterminanten der geänderten Determinante die Gleichungen:*

(38) $A_{kl}^{u} = -\beta_{33} x_k^0 x_l^0$, (39) $A_{k5}^{u} = -\varrho \beta_{33} x_k^0$, (40) $A = -\varrho^2 \beta_{33}$,

wo k und l je $= 1, 2, 3, 4$.

Daher haben auch $A, A_{11}^{u}, A_{22}^{u}, A_{33}^{u}, A_{44}^{u}$, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen und zwar das entgegengesetzte der Determinante (37).

Infolge von (38) *wird die zweifach geänderte Determinaute* § 140, (22):

(41) $$A^{uu'} = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}^{u} u_k' u_l' = \beta_{33} \Big(\sum_1^4{}^k x_k^0 u_k'\Big)^2$$

ein vollständiges Quadrat.[118])

Da alle A_{kl}^{u} $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ nach § 140, (21) lineare homogene Funktionen der α_{kl} sind, so kann die Bedingung (21) nicht erfüllt sein, wenn alle α_{kl} verschwinden (§ 139, (29)); also:

II. *Getrennte Linienpaare als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche* (1) *eine Doppelebene ist.*

9. Doppelpunkt der Schnittkurve und Doppelpunkt der Fläche. Wenn $A = 0$ ist, wird den fünf Gleichungen (31), mit Hinblick auf (40) bei $\varrho = 0$, durch:

(42) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4, genügt, und zwar den vier ersten nach § 139, (8), der fünften, weil für $A^u = 0$ und $A^u_{55} = A = 0$ wegen $A^u_{k5} A^u_{5k} = A^u_{55} A^u_{kk}$ (nach (32)):

(43) $$-A^u_{k5} = A_{k1} u_1 + A_{k2} u_2 + A_{k3} u_3 + A_{k4} u_4 = 0.$$

Da es aber nur eine Auflösung geben soll, muß alsdann für k (beiderseits unabhängig) $= 1, 2, 3, 4$ gelten:

(44) $$A^u_{k1} : A^u_{k2} : A^u_{k3} : A^u_{k4} = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}.$$

Ist die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene ein getrenntes Linienpaar, so fällt der Doppelpunkt der Kurve stets in die Spitze des Kegels.

Sind alle $A_{kl} = 0$, so wird den Gleichungen (31) bei $\varrho = 0$ genügt durch den Schnittpunkt der Achse q^0 des Ebenenpaares mit der Ebene (2) (§ 139, (16); I § 59, (14)):

(45) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = \alpha_{k6} u_2 - \alpha_{k5} u_3 + \alpha_{k1} u_4 : \alpha_{k4} u_3 - \alpha_{k6} u_1 + \alpha_{k2} u_4 : \ldots : \ldots$$

Da es aber nur einen singulären Punkt geben soll, folgt:

Ist die Schnittkurve eines Ebenenpaares mit einer Ebene ein getrenntes Linienpaar, so fällt der Doppelpunkt der Kurve auf die Achse des Linienpaares.

10. Doppellinien als Schnittkurven. Unter den Voraussetzungen (22) ist die Schnittkurve eine Doppellinie, alle ihre Punkte genügen den Gleichungen (31). Durch Elimination von x_1 und ϱ aus der zweiten, dritten und fünften Gleichung (31) ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & u_2 \\ a_{31} & a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & u_3 \\ u_1 & u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\alpha^u_{13} x_2 - \alpha^u_{12} x_3 + \alpha^u_{14} x_4 = 0.$$

Ebenso folgt:

$$\alpha^u_{11} x_3 - \alpha^u_{13} x_1 + \alpha^u_{15} x_4 = 0, \ldots, \ldots$$

Daher ist für die Achsenkoordinaten der Doppellinie (I § 59, (9)):

(46) $$q_1^0 : q_2^0 : q_3^0 : q_4^0 : q_5^0 : q_6^0 = \alpha^u_{k1} : \alpha^u_{k2} : \alpha^u_{k3} : \alpha^u_{k4} : \alpha^u_{k5} : \alpha^u_{k6},$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Führt man zwei beliebige getrennte Punkte dieser Linie als Ecken $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(3)}$ ein, $q_k^{(4)} = q_k^0$, so wird die Gleichung (7) nach 6, I:

$$(47) \qquad b_{11}\, y_1^2 = 0\,.$$

Da alle b_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ außer b_{11} verschwinden, wird aus (19)[121]:

$$(48) \qquad -S^2 \alpha_{kl}^{u} = b_{11}\, q_k^{(4)} q_l^{(4)} = b_{11}\, q_k^0 q_l^0.$$

Danach haben $\alpha_{11}^{u}, \alpha_{22}^{u}, \ldots, \alpha_{66}^{u}$, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen.

Ferner wird *die dreifach geränderte Determinante* § 140, (37):

$$(49) \qquad -S^2 A^{uu'u''} = \sigma^2 b_{11} \sum_1^6{}^{k} \sum_1^6{}^{l}\, q_k^0 q_l^0 p_k' p_l' = \sigma^2 b_{11} \Big(\sum_1^6{}^{k} q_k^0 p_k'\Big)^2$$

ein vollständiges Quadrat[118]).

Da mit den Bedingungen (22) nach § 107, 4, I auch $A = 0$ ist, so folgt:

III. *Doppellinien als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche* (1) *eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist.*

11. Unbestimmte Schnittkurven. Unter den Voraussetzungen (23) ist die Schnittkurve unbestimmt. Die Ebene (2) ist dann selbst ein Teil der Fläche (1), die somit ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene sein muß (§ 139, (29)).

IV. *Unbestimmte Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche* (1) *eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung oder ein Kegel ist.*

Man erhält die Bedingungen für die unbestimmte Schnittkurve direkt, wenn man unter der Voraussetzung:

$$(50) \qquad u_4 \neq 0$$

den aus (2) folgenden Wert von x_4 in (1) einsetzt:

$$\begin{aligned} u_4^2(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2) + a_{44}(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2 \\ + 2u_4^2(a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2) \\ - 2u_4(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3) = 0, \end{aligned}$$

und nun die Koeffizienten von $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2$ einzeln gleich Null setzt. Man erhält:

$$(51) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}u_4^2 + a_{44}u_1^2 - 2a_{14}u_4u_1 = 0, & a_{23}u_4^2 + a_{44}u_2u_3 - a_{24}u_3u_4 - a_{34}u_2u_4 = 0, \\ a_{22}u_4^2 + a_{44}u_2^2 - 2a_{24}u_4u_2 = 0, & a_{31}u_4^2 + a_{44}u_3u_1 - a_{34}u_1u_4 - a_{14}u_3u_4 = 0, \\ a_{33}u_4^2 + a_{44}u_3^2 - 2a_{34}u_4u_3 = 0, & a_{12}u_4^2 + a_{44}u_1u_2 - a_{14}u_2u_4 - a_{24}u_1u_4 = 0 \end{array} \right.$$

oder:

$$(52) \qquad \alpha_{44}^{u} = 0, \quad \alpha_{55}^{u} = 0, \quad \alpha_{66}^{u} = 0, \quad \alpha_{56}^{u} = 0, \quad \alpha_{64}^{u} = 0, \quad \alpha_{45}^{u} = 0$$

als *notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zugehörigkeit der Ebene* (2) *zur Fläche* (1) *im Falle* (50).

Die Bedingungen (23) sind also überzählige.

§ 142. Einteilung der Schnittpunktpaare nach dem Range.

1. Einführung der schneidenden Geraden als Koordinatenkante. Die auf ein Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ bezogenen Gleichungen:

$$(1)\qquad f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l a_{kl}x_kx_l=0,$$

$$(2)\qquad u=\sum_1^4{}^k u_kx_k=0,\quad u'=\sum_1^4{}^k u_k'x_k=0$$

des *Schnittpunktpaares* einer Fläche zweiter Ordnung f und der geraden Linie $u\times u'$ erhalten in einem neuen Tetraeder mit den Ecken $J_1J_2J_3J_4$ die Form § 140, (3); (4); (11).

Nimmt man dabei die Ebenen u und u' selbst als Seitenflächen $\mathfrak{l}_3$ und $\mathfrak{l}_4$ des neuen Tetraeders (I § 63, 8), so werden:

$$(3)\qquad u_k^{(3)}=u_k,\quad u_k^{(4)}=u_k'$$

die alten und wie § 141, (4):

$$(4)\quad v_1=0,\ v_2=0,\ v_3=S,\ v_4=0;\ v_1'=0,\ v_2'=0,\ v_3'=0,\ v_4'=S$$

die neuen Koordinaten der Ebenen (2).

Die Gleichungen des Schnittpunktpaares im neuen Tetraeder $J_1J_2J_3J_4$ lauten daher:

$$(5)\quad f=\sum_1^4{}^m\sum_1^4{}^n b_{mn}y_my_n=0\qquad (6)\qquad Sy_3=0,\quad Sy_4=0.$$

2. Gleichung des Schnittpunktpaares in der Geraden. Für alle Punkte der Kante $\mathfrak{l}_3\times\mathfrak{l}_4$ oder J_1J_2 sind $y_3=0$, $y_4=0$ und y_1, y_2 Zweieckskoordinaten in bezug auf J_1J_2 (I § 57, **14**).

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Fläche f mit der Geraden $u\times u'$ lautet daher in Zweieckskoordinaten in bezug auf das Zweieck J_1J_2:

$$(7)\qquad b_{11}y_1^2+2b_{12}y_1y_2+b_{22}y_2^2=0,\quad b_{kl}=f_{kl}.$$

Die Gerade (2) kann dabei, statt durch die Ebenen u und u', auch durch die zwei Punkte $J_1=x_k^{(1)}$ und $J_2=x_k^{(2)}$ gegeben sein, von deren Koordinaten die Koeffizienten direkt abhängen (§ 138, (13)). Man erhält dieselbe Gleichung (7) durch Einführung der *Parameterdarstellung* des laufenden Punktes der Verbindungslinie $x_k^{(1)}x_k^{(2)}$ (§ 67, (6), (7)) in die Gleichung (1).[45])

3. Der Rang des Schnittpunktpaares nach seiner Determinante in der Geraden. Die Determinante des Punktepaares (7), sofern es

für sich in der Geraden $J_1 J_2$ betrachtet wird, ist:

(8) $$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \beta_{33},$$

wo die Benennung rechts bereits bei § 138, (21) eingeführt wurde. Daher folgt aus § 39, 8:

Das Punktepaar, in dem die Fläche (1) *von der Verbindungslinie der Punkte* $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$ *geschnitten wird, ist ein getrenntes Punktepaar, wenn:*

(9) $$\beta_{33} \neq 0;$$

ein zusammenfallendes Punktepaar, wenn:

(10) $$\beta_{33} = 0; \quad b_{11}, b_{12}, b_{22} \text{ nicht alle } 0;$$

unbestimmt, wenn:

(11) $$\beta_{33} = 0; \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

4. Der Rang des Schnittpunktpaares nach seiner Determinante im Raume. Die mit den Koordinaten der beiden Ebenen (6) geränderte Determinante der Fläche (5) ist nach § 140, (13):

(12) $$B^{vv'} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & S & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 & S \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^4 \beta_{33}.$$

Ferner wird:

(13) $$B_{11}^{vv'} = S^4 b_{22}, \quad B_{12}^{vv'} = -S^4 b_{12}, \quad B_{22}^{vv'} = S^4 b_{11}; \quad B_{mn}^{vv'} = 0,$$

falls m, n nicht beide 1 oder 2 sind.

Nach § 140, (14); (45) wird demgemäß:

(14) $$A^{uu'} = S^2 \beta_{33};$$

(15) $$S^4 b_{22} = \sum_1^4 {}_k \sum_1^4 {}_l A_{kl}^{uu'} u_k^{(1)} u_l^{(1)}, \quad S^4 b_{12} = -\sum_1^4 {}_k \sum_1^4 {}_l A_{kl}^{uu'} u_k^{(1)} u_l^{(2)},$$
$$S^4 b_{11} = \sum_1^4 {}_k \sum_1^4 {}_l A_{kl}^{uu'} u_k^{(2)} u_l^{(2)};$$

(16) $$A_{kl}^{uu'} = S^2 (b_{22} x_k^{(1)} x_l^{(1)} - 2 b_{12} x_k^{(1)} x_l^{(2)} + b_{11} x_k^{(2)} x_l^{(2)}).$$

Daraus geht nun mit Rücksicht auf 3 sofort hervor[120]):

Das Punktepaar, in dem die Fläche (1) *von der Schnittlinie der Ebenen* (2) *getroffen wird, ist ein getrenntes Punktepaar, wenn:*

(17) $$A^{uu'} \neq 0;$$

ein zusammenfallendes Punktepaar, wenn:

(18) $$A^{uu'} = 0, \text{ nicht alle } A_{kl}^{uu'} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4;$$

unbestimmt, wenn:

(19) $$A^{uu'} = 0; \quad \text{alle } A_{kl}^{uu'} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4,$$

wobei nach (15), (8) und (14), ebenso wie in (11), die erste Bedingung eine Folge der übrigen ist.

Damit sind die *Bedingungen des Ranges* des Schnittpunktpaares von dem neuen speziell gewählten Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ wieder auf das ursprüngliche übertragen.[76]

Nach § 140, (14); (45) sind diese Bedingungen invariant im Sinne von § 139, **1**.

5. Die Summe der Hauptunterdeterminanten. Für die Determinante sechsten Grades § 140, (12) ist unbedingt:

(20) $$\begin{vmatrix} A_{22}^{uu'} & A_{23}^{uu'} \\ A_{32}^{uu'} & A_{33}^{uu'} \end{vmatrix} = A^{uu'} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{41} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix} = A^{uu'} q_4^2,$$

wenn allgemein q_k die Achsenkoordinaten der Geraden $u \times u'$ sind. Mit Hinzunahme der entsprechenden Gleichungen ist also:

(21) $$\begin{cases} A_{22}^{uu'} A_{33}^{uu'} - (A_{23}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_4^2, & A_{33}^{uu'} A_{11}^{uu'} - (A_{31}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_5^2, \\ A_{11}^{uu'} A_{22}^{uu'} - (A_{12}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_6^2, & A_{11}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{14}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_1^2, \\ A_{22}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{24}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_2^2, & A_{33}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{34}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_3^2. \end{cases}$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

(22) $$A'^{uu'} = A_{11}^{uu'} + A_{22}^{uu'} + A_{33}^{uu'} + A_{44}^{uu'},$$

so wird:

$$A_{11}^{uu'} A'^{uu'} = (A_{11}^{uu'})^2 + (A_{12}^{uu'})^2 + (A_{13}^{uu'})^2 + (A_{14}^{uu'})^2 + A^{uu'}(q_5^2 + q_6^2 + q_1^2), \ldots, \ldots, \ldots$$

und folgt durch Addition die *identische Gleichung* (§ 107, (25))[80]:

(23) $$(A'^{uu'})^2 = (A_{11}^{uu'})^2 + (A_{22}^{uu'})^2 + (A_{33}^{uu'})^2 + (A_{44}^{uu'})^2 + 2(A_{23}^{uu'})^2 + 2(A_{31}^{uu'})^2 \\ + 2(A_{12}^{uu'})^2 + 2(A_{14}^{uu'})^2 + 2(A_{24}^{uu'})^2 + 2(A_{34}^{uu'})^2 \\ + 2A^{uu'}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2).$$

Wenn daher $A^{uu'} = 0$ *und* $A'^{uu'} = 0$, *so verschwinden nach* (23) *alle* $A_{kl}^{uu'} (k, l = 1, 2, 3, 4)$, *und nach* (21) *und* (22) *auch umgekehrt.*

Demnach können die *Merkmale des Ranges* (17)—(19) bei *reellen* a_{kl}, u_k, u_k' auch kürzer so angegeben werden (§ 141, (24)):

$$(24) \quad \begin{cases} A^{uu'} \neq 0: \text{ Getrenntes Punktepaar;} \\ A^{uu'} = 0, \; A'^{uu'} \neq 0: \text{ Zusammenfallendes Punktepaar;} \\ A^{uu'} = 0, \; A'^{uu'} = 0: \text{ Unbestimmt.} \end{cases}$$

6. Bedingungen für die Koordinaten des Doppelpunktes. Nach Herstellung der Merkmale für das Vorhandensein eines Doppelpunktes, handelt es sich um die wirkliche Bestimmung des letzteren.

In der Gleichung (7) fehlt die Koordinate y_2 immer dann und nur dann, wenn:

$$(25) \qquad b_{12} = f_{12} = 0, \quad b_{22} = f_{22} = 0$$

oder nach § 138, (6):

$$(26) \qquad \sum_1^4 {}_k f_k^{(2)} x_k^{(m)} = 0 \quad \text{für} \quad m = 1, 2.$$

Diese beiden Gleichungen bedeuten aber, daß $f_k^{(2)}$ die Koordinaten einer Ebene sind, die mit jedem der Punkte $x_k^{(m)}$ vereinigt liegt, die also durch die Achse der Ebenen (2) geht. Dazu muß mit zwei Proportionalitätsfaktoren ϱ und ϱ' (I § 64, (3')):

$$f_k^{(2)} + \varrho u_k + \varrho' u_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Diesen vier Gleichungen muß also der Punkt $x_k^{(2)}$ genügen, und da er außerdem nach 2 auf den beiden Ebenen (2) liegt, so folgt:

I. *In der Gleichung* (7) *des Schnittpunktpaares fehlt immer dann und nur dann die Koordinate* y_2, *wenn die Ecke* $J_2 = x_k^{(2)}$ *des neuen Tetraeders unter Elimination von* ϱ *und* ϱ' *den sechs Gleichungen genügt:*

$$(27) \; f_k + \varrho u_k + \varrho' u_k' = 0, \; k = 1, 2, 3, 4; \; \sum_1^4 u_k x_k = 0, \; \sum_1^4 {}_k u_k' x_k = 0,$$

oder ausführlich geschrieben[49]):

$$(28) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u_1' = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u_2' = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u_3' = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \varrho u_4 + \varrho' u_4' = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 \qquad\qquad = 0, \\ u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4 \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

7. Eigentliche Punktepaare. Unter der Voraussetzung (17) gibt es keinen Punkt, der den Gleichungen (28) genügt. Die Gleichung

(7) enthält stets *beide* Koordinaten y_1 und y_2 und stellt ein *getrenntes Punktepaar* dar (§ 39, 10).

Wenn die Fläche eine Doppelebene ist, also alle α_{kl} verschwinden (§ 139, (29)), kann nach § 140, (19) die Bedingung (17) niemals erfüllt sein.

Getrennte Schnittpunktpaare kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) *eine Doppelebene ist.*

8. Koordinaten des Doppelpunktes. Unter den Bedingungen (18) schneidet die Gerade (2) die Kurve (1) in einem *zusammenfallenden Punktepaar* oder *Doppelpunkt* x_k^0, für den die Auflösung der Gleichungen (28) ergibt:

$$(29)\quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho : \varrho' = A_{k1}^{uu'} : A_{k2}^{uu'} : A_{k3}^{uu'} : A_{k4}^{uu'} : A_{k5}^{uu'} : A_{k6}^{uu'},$$

wo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 sein kann, aber der Punkt schon durch die vier ersten Glieder der Proportion und mit $k = 1, 2, 3, 4$ bestimmt ist. Die $A_{kl}^{uu'}$ sind allgemein die Unterdeterminanten fünften Grades der Determinante § 140, (12).

Nimmt man den Punkt (29) als Ecke $J_2 = x_k^{(2)}$, so wird die Gleichung (7) nach **6**, I:

$$(30)\quad b_{11} y_1^2 = 0.$$

Aus (29) folgt mit einem Proportionalitätsfaktor τ und mit $k, l = 1, 2, 3, 4$, wie § 141, (34)[121]):

$$(31)\quad \tau x_k^0 x_l^0 = A_{kl}^{uu'};$$

$$(32)\quad \tau x_k^0 \varrho = A_{k5}^{uu'}, \quad \tau x_k^0 \varrho' = A_{k6}^{uu'};$$

$$(33)\quad \tau \varrho^2 = A_{55}^{uu'} = F(u_k'), \quad \tau \varrho'^2 = A_{66}^{uu'} = F(u_k), \quad \tau \varrho \varrho' = A_{56}^{uu'}.$$

Da nach (16) mit $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$:

$$A_{kl}^{uu'} = S^2 b_{11} x_k^0 x_l^0$$

ist, so kann man setzen:

$$(34)\quad \tau = S^2 b_{11}.$$

Gleichzeitig wird die dreifach geränderte Determinante § 140, (42):

$$(35)\quad A^{uu'u''} = -\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}^{uu'} u_k'' u_l'' = -S^2 b_{11} \Big(\sum_1^4{}^k x_k^0 u_k''\Big)^2$$

ein vollständiges Quadrat.[118])

Ist neben (18) noch $A^u = 0$, so wird den Gleichungen (28) bei $\varrho' = 0$ auch genügt durch den Punkt (§ 141, (32)):

$$(36)\quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u : A_{k5}^u.$$

Schneidet also die *Gerade* $u \times u'$ die Fläche (1) in einem Doppel-

punkt, so ist dieser zugleich Doppelpunkt der *Schnittkurve* der Fläche mit der durch die Gerade gehenden Tangentialebene u (§ 143, (2)).

9. Unbestimmte Punktepaare. Unter der Bedingung (19) ist das Punktepaar *unbestimmt.* Die Schnittlinie der beiden Ebenen (2) liegt dann in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche (1).

Man kann die Bedingungen hierfür direkt entwickeln, indem man als Gleichungen der Schnittlinie der Ebenen (2) die folgenden benutzt (I § 59, (9)):

$$(37)\qquad q_4 x_1 = -q_5 x_2 - q_6 x_3, \quad q_4 x_4 = -q_3 x_2 + q_2 x_3,$$

$q_4 \neq 0$ angenommen. Eliminiert man mittels (37) x_1 und x_4 aus (1), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & a_{11}(q_5 x_2 + q_6 x_3)^2 + a_{22} q_4^2 x_2^2 + a_{33} q_4^2 x_3^2 + a_{44}(q_3 x_2 - q_2 x_3)^2 \\ & + 2a_{23} q_4^2 x_2 x_3 - 2(a_{31} x_3 + a_{12} x_2) q_4 (q_5 x_2 + q_6 x_3) \\ & + 2a_{14}(q_5 x_2 + q_6 x_3)(q_3 x_2 - q_2 x_3) \\ & - 2(a_{24} x_2 + a_{34} x_3) q_4 (q_3 x_2 - q_2 x_3) = 0, \end{aligned}$$

und durch Nullsetzen der Koeffizienten von x_2^2, x_3^2, $x_2 x_3$:

$$(38)\left\{\begin{aligned} & a_{11} q_5^2 + a_{22} q_4^2 + a_{44} q_3^2 - 2a_{24} q_4 q_3 + 2a_{41} q_3 q_5 - 2a_{12} q_5 q_4 = 0, \\ & a_{11} q_6^2 + a_{33} q_4^2 + a_{44} q_2^2 + 2a_{34} q_4 q_2 - 2a_{41} q_2 q_6 - 2a_{13} q_6 q_4 = 0, \\ & a_{11} q_5 q_6 + a_{23} q_4^2 - a_{44} q_2 q_3 + a_{24} q_2 q_4 - a_{34} q_3 q_4 - a_{12} q_4 q_6 \\ & - a_{13} q_4 q_5 + a_{14} q_3 q_6 - a_{14} q_2 q_5 = 0. \end{aligned}\right.$$

Die linken Seiten sind aber die Entwicklungen der Unterdeterminanten $A_{33}^{uu'}$, $A_{22}^{uu'}$, $-A_{23}^{uu'}$, also:

Für die Zugehörigkeit der Schnittlinie q der beiden Ebenen (2) *zur Fläche* (1) *sind, falls $q_4 = u_1 u_4' - u_4 u_1' \neq 0$ ist, die Bedingungen:*

$$(39)\qquad A_{22}^{uu'} = 0, \quad A_{23}^{uu'} = 0, \quad A_{33}^{uu'} = 0$$

notwendig und hinreichend.

Die zehn Bedingungen (19) sind überzählige (§ 141, **11**).

10. Die Unterdeterminanten von $A^{uu'}$ bei unbestimmtem Punktepaar. Wenn $A^{uu'} = 0$ ist, gilt die Entwicklung:

$$(40)\quad a_{k1} A_{l1}^{uu'} + a_{k2} A_{l2}^{uu'} + a_{k3} A_{l3}^{uu'} + a_{k4} A_{l4}^{uu'} + u_k A_{l5}^{uu'} + u_k' A_{l6}^{uu'} = 0$$

für $k = 1, 2, 3, 4$ und $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sie reduziert sich unter den Bedingungen (19) für $k = 1, 2, 3, 4$ und $l = 1, 2, 3, 4$ auf:

$$(41)\qquad u_k A_{l5}^{uu'} + u_k' A_{l6}^{uu'} = 0.$$

Da aber die Ebenen u_k und u_k' als verschieden vorauszusetzen sind, so folgt aus solchen vier Gleichungen (41), die bei festem l den vier Werten von k entsprechen (I § 51, (3)):

(42) $A_{15}^{uu'} = A_{51}^{uu'} = 0\,,\quad A_{16}^{uu'} = A_{61}^{uu'} = 0\,,\quad l = 1, 2, 3, 4\,.$

Infolge von (42) reduziert sich aber (40) auch für $l = 5, 6$ auf (41), worauf wiederum (41) auch für $l = 5, 6$ folgt (§ 107, 4).

Sind die sechzehn Unterdeterminanten fünften Grades $A_{kl}^{uu'}$, $k, l = 1, 2, 3, 4$, *von* $A^{uu'}$ *gleich Null, so verschwinden auch alle übrigen Unterdeterminanten fünften Grades* (42) *mit* $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Unter diesen befinden sich auch (§ 140, (12); (8)):

(43) $A_{66}^{uu'} = A^{u} = -F(u_1, u_2, u_3, u_4),\quad A_{55}^{uu'} = A^{u'} = -F(u_1', u_2', u_3', u_4');$

(44) $$A_{56}^{uu'} = A_{65}^{uu'} = -\{F_1(u_1u_2u_3u_4)u_1' + F_2(u_1u_2u_3u_4)u_2' + F_3(u_1u_2u_3u_4)u_3' + F_4(u_1u_2u_3u_4)u_4'\}.$$

§ 143. Tangentialebenen und Gleichungen in Ebenenkoordinaten.

1. Einfache und stationäre Tangentialebenen. Eine Ebene, die die *Fläche zweiter Ordnung* in einem *getrennten Linienpaar* schneidet, heißt eine *(einfache) Tangentialebene* und der Doppelpunkt des Linienpaares ihr *Berührungspunkt.* Eine Ebene, die die Fläche in einer *Doppellinie* schneidet, heißt eine *stationäre Tangentialebene* und alle Punkte der Doppellinie sind ihre Berührungspunkte. Eine Ebene, die der Fläche ganz angehört, kann als eine *inzidente Tangentialebene* der Fläche bezeichnet werden.

Wenn dual die durch einen Punkt gehenden Ebenen einer *Fläche zweiter Klasse zwei Ebenenbüschel mit getrennten Achsen* bilden (statt, wie im allgemeinen, einen Kegel zweiter Klasse), so heißt der Punkt ein *(einfacher) Berührungspunkt* und die Verbindungsebene der Achsen seine *Tangentialebene.* Fallen die Achsen der beiden Ebenenbüschel zusammen, so wird der Punkt ein *stationärer Berührungspunkt* und alle Ebenen der Achse sind seine Tangentialebenen. Ein Punkt, dessen sämtliche Ebenen der Fläche angehören, kann als ein *inzidenter Berührungspunkt* der Fläche bezeichnet werden.

Der Inbegriff aller Tangentialebenen u_k der Fläche zweiter Ordnung:

(1) $$f = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, a_{kl}x_kx_l = 0$$

ist nach § 141, (21) durch die Bedingung:

(2) $$A^u = -\sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, A_{kl}u_ku_l = 0$$

gekennzeichnet.[122])

2. Beziehung zwischen Tangentialebene und Berührungspunkt. Zwischen der Tangentialebene u_k und ihrem Berührungspunkt x_k^0, bezüglich ihren Berührungspunkten, bestehen nach § 141, (29) die fünf Gleichungen:

$$(3)\quad f_k^0 + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (4) \qquad \sum_1^4 {}^k u_k x_k^0 = 0.$$

Ist die Ebene u_k gegeben, so bestimmt man hieraus nach § 141, (32) unter Elimination von ϱ den Berührungspunkt x_k^0.

Ist ein Punkt x_k^0 der Fläche als Berührungspunkt gegeben, so folgt aus (3) für die Koordinaten der Tangentialebene:

$$(3') \qquad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = f_1^0 : f_2^0 : f_3^0 : f_4^0; \quad -\varrho u_k = f_k^0.$$

Damit ist die Bedingung (4) nach § 138, (4) schon von selbst erfüllt, da x_k^0 ein Punkt der Fläche sein sollte.

Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche (1) *im Punkte* x_k^0 *ist daher* (§ 67, (17))[47]):

$$(5) \qquad f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 + f_3^0 x_3 + f_4^0 x_4 = 0; \quad \sum_1^4 {}^k f_k^0 x_k = 0.$$

3. Tangentialebenen der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung. Die *eigentliche* Fläche zweiter Ordnung $A \neq 0$ hat nach § 141, **10**, III nur *einfache* Tangentialebenen; sie genügen der Gleichung (2) und bilden demnach nach § 138, (1') eine Fläche zweiter Klasse, die wegen:

$$(6) \qquad A_{kl} = A^3 \neq 0$$

ebenfalls eine *eigentliche* ist.[77])

I. *Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist auch eigentliche Fläche zweiter Klasse und umgekehrt* (§ 78, 7).

Da nach § 139, 3 $f_1^0, f_2^0, f_3^0, f_4^0$ niemals alle vier verschwinden können, so folgt:

II. *Zu jedem Punkte* x_k^0 *der Fläche gehört vermöge* (3') *eine bestimmte Tangentialebene* u_k.

Anderseits ist nach § 141, (39) mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

$$(7) \qquad \sigma x_k^0 = A_{k5}^u = -\sum_1^4 {}^l A_{kl} u_l$$

(§ 141, (43)), und damit wegen (6):

III. *Zu jeder Tangentialebene* u_k *gehört vermöge* (7) *ein bestimmter Berührungspunkt* x_k^0.

4. Tangentialebenen des Kegels überhaupt. Beim *Kegel* wird aus (2) nach § 139, (14):

$$(8) \qquad \left(\sum_1^4{}^k x_k^0 u_k\right)^2 = 0,$$

wo x_k^0 die Koordinaten der Spitze sind.

I. *Beim Kegel deckt sich der Inbegriff aller Tangentialebenen mit dem Ebenenbündel an der Spitze.*

Die Fläche (2) ist als *Fläche zweiter Klasse* vom Range 1 (I Anm. 1, III, (21)).

II. *Eine der Gleichungen:*

$$(9) \qquad \sum_1^4{}^l A_{kl} u_l = 0 \quad \text{oder} \quad A_{k5}^u = 0, \quad k = 1, 2, 3 \text{ oder } 4,$$

ist (§ 141, (42)) *die Gleichung der Spitze in laufenden Ebenenkoordinaten.*

Zu jedem Punkte x_k^0 des Kegels gehört vermöge (3') eine bestimmte Tangentialebene, nur zur Spitze gehören ∞^2 solche.

Zu jeder *einfachen* Tangentialebene gehört als Berührungspunkt die Spitze, da für ihn nach § 141, (42); (44):

$$(10) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}.$$

5. Stationäre Tangentialebenen des Kegels. Unter den ∞^2 Tangentialebenen des Bündels (8) sind nach § 141, (22) diejenigen stationär, für die zugleich alle A_{kl}^u, $k, l = 1, 2, 3, 4$, verschwinden. Da aber für $A^u = 0$ nach § 107, (21):

$$(10') \qquad (A_{kl}^u)^2 = A_{kk}^u A_{ll}^u,$$

so reicht dazu das Verschwinden der Diagonalunterdeterminanten A_{kk}^u aus.

Daher sind die stationären Tangentialebenen des Kegels durch eine Gleichung (9) *in Verbindung mit den Gleichungen:*

$$(11) \qquad A_{11}^u = 0, \quad A_{22}^u = 0, \quad A_{33}^u = 0, \quad A_{44}^u = 0$$

gekennzeichnet.

Die einzelne Gleichung (11), wie:

$$(12) \qquad -A_{44}^u = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l \alpha_{kl} u_k u_l = 0,$$

stellt eine *Fläche zweiter Klasse* dar, die vom Range 3 (§ 139, (10)), nämlich ein Kegelschnitt in der Ebene $x_4 = 0$ ist, falls (I Anm. 1, II, (4)):

(13)
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = A_{44}^2 \neq 0,$$

also nach (10) die Spitze des Kegels nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegt.

Da nach (10′), (10):

$$(A_{k4}^u)^2 = A_{kk}^u A_{44}^u, \quad A_{44} A_{kk}^u = A_{4k} A_{k4}^u, \quad k = 1, 2, 3,$$

so folgen, falls $A_{44} \neq 0$, aus der vierten Gleichung (11) die übrigen.

Der Inbegriff der ∞^1 *stationären Tangentialebenen des Kegels ist daher durch zwei Gleichungen, eine Gleichung* (9) *und eine der Gleichungen* (11) *dargestellt.*[69])

Jene ist die Gleichung der Spitze, diese sind die Gleichungen der Schnittkurven des Kegels mit den vier Koordinatenebenen, je in laufenden Ebenenkoordinaten (§ 71, (12′)).

6. Tangentialebenen des Ebenenpaares. Beim *Ebenenpaar* ist mit $A_{kl} = 0$ (§ 139, (29)) die Gleichung (2) identisch erfüllt. Alle Ebenen des Raumes sind Tangentialebenen. Einfache Tangentialebenen haben ihren Berührungspunkt auf der Achse q_k^0 des Ebenenpaares, stationäre gehen durch die Achse q_k^0 hindurch. Für die letzteren gelten wieder die Gleichungen (11). Jedoch wird aus (12) nach § 139, (21):

$$-S^4 A_{44}^u = \beta_{33}\Big(\sum_1^3{}^k q_k^0 u_k\Big)^2,$$

und entsprechend mit $-S^4 : \beta_{33} = \tau$[118]):

$$(14)\quad \begin{cases} \tau A_{11}^u = (q_6^0 u_2 - q_5^0 u_3 + q_1^0 u_4)^2, & \tau A_{22}^u = (q_4^0 u_3 - q_6^0 u_1 + q_2^0 u_4)^2, \\ \tau A_{33}^u = (q_5^0 u_1 - q_4^0 u_2 + q_3^0 u_4)^2, & \tau A_{44}^u = (q_1^0 u_1 + q_2^0 u_2 + q_3^0 u_3)^2. \end{cases}$$

Jede der Gleichungen (11) stellt eine Fläche zweiter Klasse vom Range 1, nämlich den doppelt gezählten Punkt dar, in dem die Achse q_k^0 die Koordinatenebenen schneidet.

Die vier Gleichungen (11) zählen für zwei unabhängige und drücken aus, daß die Ebene u_k durch die Achse q_k^0 geht (I § 59, (12)). *Sie sind die überzähligen Gleichungen der Achse in laufenden Ebenenkoordinaten.*

7. Die Ebenen des Ebenenpaares selbst. Für die Ebenen des Ebenenpaares selbst verschwinden nach § 141, (23) alle α_{kl}^u. Die Gleichung:

$$(15)\qquad -\alpha_{44}^u = a_{11} u_4^2 + a_{44} u_1^2 - 2 a_{14} u_4 u_1 = 0$$

stellt nun für sich allein ein getrenntes Punktepaar auf der Kante $E_1 E_4$ des Koordinatentetraeders dar, falls

(16) $$\alpha_{44} = a_{11} a_{44} - a_{14}^2 \neq 0,$$

also die Achse § 139, (16) des Ebenenpaares die Kante $E_1 E_4$ nicht schneidet (I § 59, (15); (21)).

Das Ebenenpaar selbst wird daher in Ebenenkoordinaten durch drei Gleichungen ausgedrückt, zwei von den vier linearen Gleichungen (11); (14), *welche die Achse des Paares, und eine von den quadratischen Gleichungen:*

(17) $$\alpha_{11}^u = 0, \quad \alpha_{22}^u = 0, \quad \alpha_{33}^u = 0, \quad \alpha_{44}^u = 0, \quad \alpha_{55}^u = 0, \quad \alpha_{66}^u = 0,$$

welche die Schnittpunktpaare mit den sechs Kanten des Koordinatentetraeders darstellen.[69])

Man behält (11) und (17) als überzählige Gleichungen bei, um nicht an eine bestimmte Voraussetzung (16) gebunden zu sein, ebenso wie man schon bei einer geraden Linie vier Gleichungen als überzählige hat (I § 59, (12)).

8. Die Doppelebene. Bei der *Doppelebene* ist nach § 141, 8, II jede Ebene des Raumes stationäre Tangentialebene. Für die Doppelebene u_k^0 selbst sind wiederum nach § 141, (23) alle $\alpha_{kl}^u = 0$. Da aber nach § 139, (27) die Gleichung (15) die Form annimmt[118]):

(18) $$-S^2 \alpha_{44}^u = b_{11}(u_1^0 u_4 - u_4^0 u_1)^2 = 0,$$

also ein vollständiges Quadrat wird und den Schnittpunkt der Doppelebene mit der Kante $E_1 E_4$ darstellt, so *wird die Doppelebene durch drei von den Gleichungen* (17) *ausgedrückt,* die die Verhältnisse ihrer Ebenenkoordinaten eindeutig bestimmen. Die Gleichungen (17) sind überzählige.

§ 144. Tangenten und Gleichungen in Linienkoordinaten.

1. Begriff der Tangenten und Erzeugenden.

Eine Gerade, die die *Fläche zweiter Ordnung* in zwei zusammenfallenden Punkten (einem Doppelpunkt) schneidet, ist eine *(einfache) Tangente* der Fläche und der Doppelpunkt ihr Berührungspunkt.

Eine Gerade, deren sämtliche Punkte der Fläche angehören, ist eine *stationäre Tangente* oder *Erzeugende.*

Eine Gerade, durch die an die *Fläche zweiter Klasse* zwei zusammenfallende Berührungsebenen gehen, ist eine *(einfache) Tangente* der Fläche und die Doppelebene ihre Berührungsebene.

Eine Gerade, deren sämtliche Ebenen der Fläche angehören, ist eine *stationäre Tangente* oder *Erzeugende.*

Die *Bedingung* dafür, daß eine Gerade *überhaupt Tangente* (einfache oder stationäre) der Fläche zweiter Ordnung:

(1) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

sei, kann in verschiedener Form gefaßt werden.

2. Bedingung für die Linienkoordinaten einer Tangente. Die Bedingung einer Tangente lautet nach § 142, (18) und § 140, (19) in ihren Strahlenkoordinaten p_k oder Achsenkoordinaten q_k:

(2) $$\sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{\overline{kl}} q_k q_l.$$

Es ist *die Gleichung der Fläche in laufenden Strahlenkoordinaten* oder *die Gleichung des Tangentenkomplexes* der Fläche.[172]) Auf ihrer linken Seite kann der Ausdruck $\lambda(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6)$ mit beliebigem λ hinzuaddiert werden (I § 59, (5')).

3. Bedingung für zwei Ebenen durch eine Tangente. Unmittelbar aus § 142, (18) folgt:

Die Schnittlinie zweier Ebenen ist Tangente der Fläche (1), *wenn die mit den Koordinaten u_k und u_k' der beiden Ebenen geränderte Determinante der Fläche verschwindet:*

(3) $$A^{uu'} = 0.$$

Zwischen dem Berührungspunkt x_k^0 der Tangente und zwei durch sie gehenden Ebenen u_k und u_k' bestehen alsdann die Beziehungen § 142, (27):

(4) $$f_k^0 + \varrho u_k + \varrho' u_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum_1^4{}^k u_k x_k^0 = 0, \quad \sum_1^4{}^k u_k' x_k^0 = 0.$$

4. Bedingung für zwei Punkte auf einer Tangente. Nach § 142, (14) kann die Bedingung (3) auch durch das Verschwinden der Determinante § 142, (8), wo $b_{kl} = f_{kl}$, ausgedrückt werden, woraus folgt:

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist Tangente der Fläche (1), *wenn die Koordinaten $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ der beiden Punkte die Bedingung erfüllen:*

(6) $$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Stellt man den laufenden Punkt der Verbindungslinie durch Zweieckskoordinaten y_1, y_2 in der Weise (I § 64, (12)):

(7) $$x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2$$

dar, so ist für die Zweieckskoordinaten des Doppelpunktes § 142, (7) nach § 39, (25):

(8) $$y_1^0 : y_2^0 = -f_{12} : f_{11} = f_{22} : -f_{21}.$$

Bei festem $x_k^{(2)}$ hat man in (6) die Gleichung des *Tangentenkegels* der Fläche vom Punkte $x_k^{(1)}$, *des Ortes aller durch diesen Punkt gehenden Tangenten*. Ordnet man die Gleichung (6) nach:

$$x_k^{(1)} x_l^{(2)} - x_k^{(2)} x_l^{(1)} = p_{kl},$$

so erhält man wieder die Entwicklung (2) zurück, so daß (2), (3) *und* (6) *nur verschiedene Formen derselben Bedingung* sind.

5. Bedingung für die Tangente in einem Punkte der Fläche. Ist $x_k^{(2)}$ auf der Fläche selbst gelegen, so daß $f_{22} = 0$, so folgt aus (6)

Die Verbindungslinie eines Punktes $x_k^{(1)}$ des Raumes mit einem Punkte $x_k^{(2)}$ der Fläche ist Tangente im Punkte $x_k^{(2)}$, wenn neben $f_{22} = 0$:

(9) $$f_{12} = 0.$$

Bei festem $x^{(2)}$ und mit Unterdrückung des Index 1 lautet diese Gleichung:

(10) $$\sum_1^4{}^k f_k^{(2)} x_k = 0$$

und stellt dann *die Tangentialebene als Ort aller Tangenten* im Punkte $x_k^{(2)}$ dar (§ 143, (5)).

6. Die Komplexgleichung der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung. Für die *eigentliche* Fläche zweiter Ordnung ist die Determinante der Komplexgleichung (2):

(11) $$|\alpha_{kl}| = A^3$$

(I Anm. 1, III, (13)) von Null verschieden. Die linearen Gleichungen:

(12) $$\sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_l = 0$$

sind daher durch keine Gerade p_l des Raumes erfüllbar (§ 139, (6)).

7. Die Komplexgleichung des Kegels. Für den *Kegel* kann die Komplexgleichung (2) nach § 138, (30), in bezug auf ein neues Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, wo nach § 139, (11) alle Unterdeterminanten β_{mn}, für die nicht $m, n = 1, 2, 3$ ist, verschwinden, in der Form:

(13) $$\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n \beta_{mn} r_m r_n = 0$$

dargestellt werden. Die Spitze des Kegels ist dabei als Ecke J_4 des

neuen Tetraeders genommen. Die Kanten $p_k^{(4)}$, $p_k^{(5)}$, $p_k^{(6)}$ gehören dem Komplex (13) an (I § 63, Fig. 320).

Die Komplexgleichung (2) wird, wie die Form (13) zeigt (I § 72, 13), erfüllt von allen Strahlen, die in einer stationären Tangentialebene des Kegels liegen, also entweder durch die Spitze gehen oder Tangenten in einem andern Punkte des Kegels sind (§ 71, (16)).

Die durch die Spitze § 139, (8) des Kegels gehenden Geraden sind durch die Gleichungen (I § 59, (10)) dargestellt:

$$(14)\qquad \begin{cases} A_{24}p_6 - A_{34}p_5 + A_{44}p_1 = 0, \\ A_{34}p_4 - A_{14}p_6 + A_{44}p_2 = 0, \\ A_{14}p_5 - A_{24}p_4 + A_{44}p_3 = 0, \\ A_{14}p_1 + A_{24}p_2 + A_{34}p_4 = 0. \end{cases}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen sind aber, falls $A_{44} \neq 0$ ist, die Auflösungen der Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \alpha_{13}p_3 + \alpha_{14}p_4 + \alpha_{15}p_5 + \alpha_{16}p_6 = 0, \\ \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \alpha_{23}p_3 + \alpha_{24}p_4 + \alpha_{25}p_5 + \alpha_{26}p_6 = 0, \\ \alpha_{31}p_1 + \alpha_{32}p_2 + \alpha_{33}p_3 + \alpha_{34}p_4 + \alpha_{35}p_5 + \alpha_{36}p_6 = 0 \end{cases}$$

nach p_1, p_2, p_3 und gehen aus diesen hervor, wenn man mit a_{11}, a_{21}, a_{31} oder a_{12}, a_{22}, a_{32} oder a_{13}, a_{23}, a_{33} multipliziert und addiert (§ 97, (23)). So folgt allgemein:

Die sechs Gleichungen:

$$(16)\qquad \sum_1^6{}_l\, \alpha_{kl}p_l = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

sind die (überzähligen) Gleichungen der Kegelspitze in Strahlenkoordinaten (vgl. § 143, (9)).

Sie zählen für *drei* unabhängige (I § 60, 1), weil mit dem Verschwinden der Determinante sechsten Grades (11) auch alle ihre Unterdeterminanten fünften und vierten Grades verschwinden (I Anm. 1, III, (14); (15)). Sie haben, wie die Form (14) für $A_{44} \neq 0$ zeigt, die Bedingung:

$$(17)\qquad P = p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

schon zur Folge.

8. Die Komplexgleichung des Ebenenpaares. Ist die Fläche (1) ein *Ebenenpaar*, dessen Achse die Koordinaten q_k^0 hat, so *wird die Gleichung* (2) nach § 139, (22):

$$(18)\qquad \Big(\sum_1^6{}_k\, q_k^0 p_k\Big)^2 = 0,$$

also *das Quadrat der Gleichung der Achse in Strahlenkoordinaten* (I § 60, (8)).

9. Komplexkurve und Komplexkegel. Die Gleichung (2), die sich auf ein ursprüngliches Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezieht, lautet in einem neuen Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ nach § 138, (30); § 140, (18'):

$$(19) \quad \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta_{mn} r_m r_n = 0 \quad \text{oder} \quad (19') \quad \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \beta_{\overline{m}\overline{n}} s_m s_n = 0,$$

wo die Ecke J_4 als beliebiger Punkt und die Ebene $\mathfrak{l}_4 = J_1 J_2 J_3$ als beliebige Ebene gelten kann.

Liegt nun die Gerade p_k in der Ebene $\mathfrak{l}_4$, so sind $r_4 = r_5 = r_6 = 0$ und $r_1 = v_1$, $r_2 = v_2$, $r_3 = v_3$ Linienkoordinaten in dieser Ebene (I § 64, 3) und die Gleichung (19) kommt zurück auf:

$$(20) \quad \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n \beta_{mn} v_m v_n = 0.$$

Geht die Gerade q_k durch die Ecke J_4, so sind $s_4 = s_5 = s_6 = 0$ und $s_1 = y_1$, $s_2 = y_2$, $s_3 = y_3$ Linienkoordinaten im Bündel an J_4 und die Gleichung (19') kommt zurück auf:

$$(20') \quad \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n \beta_{\overline{m}\overline{n}} y_m y_n = 0.$$

Die Koeffizienten (§ 138, (23)):

$$(21) \qquad \beta_{mn} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)}$$

hängen, soweit sie in (20) vorkommen, nur von den in der Ebene $\mathfrak{l}_4$ liegenden Kanten $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$, und soweit sie in (20') vorkommen, nur von den durch die Ecke J_4 gehenden Kanten $p_k^{(4)}$, $p_k^{(5)}$, $p_k^{(6)}$ des Koordinatentetraeders $J_1 J_2 J_3 J_4$ ab (I § 63, Fig. 320). Daher folgt (I § 72, 12):

Die in der Ebene dreier Strahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$, $p_k^{(3)}$ liegende Komplexkurve des Tangentenkomplexes (2) hat in laufenden, auf das Dreieck der drei Strahlen bezogenen Linienkoordinaten die Gleichung (20).

Die Komplexkurve ist zugleich die Schnittkurve der Fläche (1) mit der gemeinsamen Ebene der drei Strahlen, erzeugt von ihren Tangenten.

Der am Schnittpunkt dreier Strahlen $p_k^{(4)}$, $p_k^{(5)}$, $p_k^{(6)}$ befindliche Komplexkegel des Tangentenkomplexes (2) hat in laufenden, auf das Dreikant der drei Strahlen bezogenen Strahlenkoordinaten die Gleichung (20').

Der Komplexkegel ist zugleich der Berührungskegel der Fläche (1) mit dem gemeinsamen Punkte der drei Strahlen, erzeugt von seinen Geraden.

§ 145. Umbeschriebene Vierseite.

1. Das umbeschriebene Vierseit und das Koordinatentetraeder. Ist der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 \\ + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \end{aligned}$$

ein *windschiefes Vierseit umbeschrieben*, so kann man dessen Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 als Ecken des Koordinatentetraeders nehmen derart, daß E_2E_3 und E_1E_4, sowie E_3E_1 und E_2E_4 (Fig. 217) die Gegenseiten des Vierseits sind. Die Schnittpunktpaare dieser vier Seiten mit der Fläche (1) sind dann:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,\ x_1 = 0,\ x_4 = 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{44}x_4^2 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0; \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0, \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0,\ x_1 = 0,\ x_3 = 0. \end{array}\right.$$

Da aber die Seiten Tangenten sein sollen, müssen diese Punktepaare in Doppelpunkte zusammenfallen, also die vier Bedingungen bestehen:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0, & \alpha_{44} = a_{11}a_{44} - a_{14}^2 = 0; \\ \alpha_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2 = 0, & \alpha_{55} = a_{22}a_{44} - a_{24}^2 = 0, \end{array}\right.$$

oder bei willkürlicher fester Wahl der doppelt gestrichenen Quadratwurzeln und unbestimmt bleibenden Vorzeichen ε_{ki}:

$$(4)\quad \begin{array}{ll} a_{23} = \varepsilon_{23}\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{33}}, & a_{14} = \varepsilon_{14}\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{44}}; \\ a_{31} = \varepsilon_{31}\sqrt{a_{33}}\sqrt{a_{11}}, & a_{24} = \varepsilon_{24}\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{44}}. \end{array}$$

Die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ der *vier Berührungspunkte* B_{23}, B_{14}; B_{31}, B_{24} des Vierseits (Fig. 217) mit der Fläche werden dann nach (2) (§ 39, (25)):

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 : -a_{23} : a_{22} : 0 = 0 : a_{33} : -a_{23} : 0, \\ -a_{14} : 0 : 0 : a_{11} = a_{44} : 0 : 0 : -a_{14}, \\ a_{33} : 0 : -a_{31} : 0 = -a_{31} : 0 : a_{11} : 0, \\ 0 : -a_{24} : 0 : a_{22} = 0 : a_{44} : 0 : -a_{24}. \end{array}\right.$$

2. Die Ebene dreier Berührungspunkte. Die Ebene der drei letzten Punkte (5) hat die Gleichung:

$$(6)\quad a_{11}a_{24}x_1 + a_{22}a_{14}x_2 + a_{31}a_{24}x_3 + a_{14}a_{24}x_4 = 0,$$

der ersichtlich die Koordinaten aller drei Punkte genügen.

Die Koordinaten des ersten Berührungspunktes B_{23} und de vierten harmonischen B'_{23} zu E_2, E_3 und B_{23} (§ 40, (4)) sind bezüg-

lich 0, $-a_{23}$, a_{22}, 0 und 0, a_{23}, a_{22}, 0 oder in eine gemeinsame Bezeichnung zusammengefaßt:

(7) $0, \ -\delta a_{23}, \ a_{22}, \ 0$ mit $\delta = 1$ für B_{23}, $\delta = -1$ für B'_{23}.

Setzt man diese Koordinaten in (6) ein, so ergibt sich mit Fortfall des Faktors a_{22}:

$$-\delta a_{23} a_{14} + a_{31} a_{24} = 0,$$

oder nach (4):

(8) $$-\delta \varepsilon_{23} \varepsilon_{14} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{24} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber, wie auch die Vorzeichen ε_{kl} ausfallen, stets entweder mit $\delta = +1$ oder mit $\delta = -1$ erfüllt, sodaß entweder B_{23} oder B'_{23} auf der Ebene (6) liegt. Also[191]):

Wenn einer Fläche zweiter Ordnung ein windschiefes Vierseit umbeschrieben ist, so liegen entweder die Berührungspunkte der vier Seiten in einer Ebene oder jede Seite wird von ihrem Berührungspunkt und ihrem Schnittpunkt mit der Ebene der drei andern Berührungspunkte harmonisch geteilt.

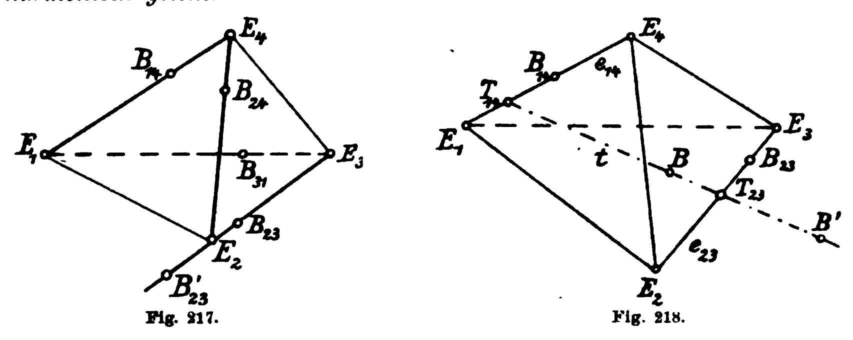


Fig. 217. Fig. 218.

3. Zwei feste Tangenten als Gegenkanten des Koordinatentetraeders. Wenn die Fläche (1) nur von den beiden Kanten $e_{23} = E_2 E_3$ und $e_{14} = E_1 E_4$ berührt wird, ist:

(9) $$\alpha_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 = 0, \quad \alpha_{44} = a_{11} a_{44} - a_{14}^2 = 0.$$

Da nun bei gleichbleibendem Koordinatentetraeder den Koeffizienten a_{23} und a_{14} durch geeignete Wahl der Vorzeichen von x_2 und x_1 (I § 57, (12)) je ein willkürliches Vorzeichen erteilt werden kann, so liegt keine Beschränkung darin, wenn wir mit beliebig gewählten Vorzeichen der doppelt gestrichenen Wurzeln setzen:

(10) $$a_{23} = \sqrt{a_{22}} \sqrt{a_{33}}, \quad a_{14} = \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{44}}.$$

Eine Fläche zweiter Ordnung, die von zwei windschiefen Geraden berührt wird, kann daher, indem diese Geraden als Gegenkanten $e_{23} = E_2 E_3$

und $e_{14} = E_1 E_4$ *des Koordinatentetraeders gewählt werden, in der Form dargestellt werden* (Fig. 218):

$$(11) \qquad (\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4)^2 + 2(a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) = 0.$$

Die Berührungspunkte B_{23} und B_{14} der beiden Kanten e_{23} und e_{14} haben alsdann die Koordinaten:

$$(12) \qquad B_{23}: 0,\ -\sqrt{a_{33}},\ \sqrt{a_{22}},\ 0; \quad B_{14}: -\sqrt{a_{44}},\ 0,\ 0,\ \sqrt{a_{11}}.$$

4. Tangente als Transversale zweier Tangenten. Sind nun die Koordinaten der Treffpunkte T_{23} und T_{14} einer Transversale t der beiden Tangenten e_{23} und e_{14}:

$$(13) \qquad T_{23}: 0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ 0; \quad T_{14}: x_1^0,\ 0,\ 0,\ x_4^0,$$

so sind die Koordinaten des laufenden Punktes P der Transversale t:

$$(14) \qquad P: x_1 = \lambda \cdot 0 + \mu x_1^0,\ x_2 = \lambda x_2^0 + \mu \cdot 0,\ x_3 = \lambda x_3^0 + \mu \cdot 0,\ x_4 = \lambda \cdot 0 + \mu x_4^0.$$

Der Parameter $\lambda : \mu$ eines Schnittpunktes der Transversale mit der Fläche genügt nach (11) der Gleichung:

$$(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)^2\lambda^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0)^2\mu^2 + 2(a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0)\lambda\mu = 0.$$

Soll die Transversale selbst Tangente sein, muß demnach werden:

$$(a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0)^2 - (\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)^2(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0)^2 = 0,$$

oder mit:

$$(15) \qquad \varepsilon = \pm 1:$$

$$(16) \qquad (a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0) - \varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0) = 0.$$

Diese Bedingung drückt aus, daß die Transversale $t = T_{23}T_{14}$ Tangente der Fläche ist. Der laufende Punkt (14) der Transversale genügt alsdann der Gleichung:

$$(17) \qquad (a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) - \varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0,$$

die mit dem doppelten Werte (15) zwei Flächen zweiter Ordnung darstellt.

Der Ort einer Tangente der Fläche zweiter Ordnung (11), *welche*

zwei feste Tangenten e_{23} und e_{14} beständig schneidet, ist die eine oder andere der beiden Linienflächen zweiter Ordnung (17).

5. Ort der Berührungspunkte der Transversaltangente zweier Tangenten. Der Berührungspunkt B der laufenden Tangente $t = T_{23}T_{14}$ genügt gleichzeitig den Gleichungen (11) und (17), also auch der Gleichung:

$$(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4)^2 \\ + 2\varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0.$$

Er liegt also auf einer der beiden ($\varepsilon = \pm 1$) Ebenen:

$$(18) \qquad (\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3) + \varepsilon(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0,$$

die sich nach (10) zu dem Ebenenpaar:

$$(19) \quad a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 - 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 = 0$$

zusammensetzen. Dieses Ebenenpaar, dessen Achse nach (18) durch die Punkte (12) geht, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten. Es folgt somit:

Der Ort der Berührungspunkte einer Tangente t der Fläche (11), *welche zwei feste Tangenten e_{23} und e_{14} beständig schneidet, besteht aus zwei Kegelschnitten, deren jeder durch die beiden Berührungspunkte B_{23} und B_{14} der festen Tangenten geht.*

6. Harmonische Teilung der Transversaltangente. Der laufende Punkt einer Tangente t, welche die beiden Tangenten e_{23} und e_{14} schneidet, hat die Koordinaten (14) mit dem Parameter $\lambda : \mu$, wobei zwischen x_2^0, x_3^0 und x_1^0, x_4^0 die Gleichung (16) besteht. Für die Schnittpunkte der Transversaltangente t mit den beiden Ebenen (18), von denen der eine nach 5 der Berührungspunkt B ist, der andere B' heiße (Fig. 218), genügt der Parameter $\lambda : \mu$ der Gleichung:

$$\lambda(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0) + \varepsilon\mu(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0) = 0,$$

die aus (18) mit Subtstitution der Werte (14) folgt.

Da hieraus für $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ zwei entgegengesetzte Werte von $\lambda : \mu$ folgen, so sind die beiden Schnittpunkte B und B' zu den Punkten $T_{23}(\mu = 0)$ und $T_{14}(\lambda = 0)$ der Punktreihe (14) harmonisch.

Jede Tangente t der Fläche, welche die beiden festen Tangenten e_{23} und e_{14} in T_{23} und T_{14} schneidet, wird von den beiden Ebenen (19) *in zwei zu T_{23} und T_{14} harmonischen Punkten B und B' geschnitten, von denen der eine ihr Berührungspunkt mit der Fläche ist.*

7. Zwei Transversaltangenten zweier Tangenten. Sind nun t und t_0 zwei Tangenten, welche die beiden festen Tangenten e_{23} und e_{14} schneiden, also mit ihnen ein umbeschriebenes Vierseit bilden, und sind B, B' und B_0, B_0' ihre Schnittpunkte mit den beiden Ebenen (18) und B und B_0 ihre Berührungspunkte mit der Fläche, so liegt entweder B_0 oder B_0' in derselben Ebene (18), wie B. Im ersteren Falle aber liegen alle vier Berührungspunkte B_{23}, B_{14}, B, B_0 in derselben Ebene, im letzteren schneidet die Ebene der drei Berührungspunkte B_{23}, B_{14}, B die Tangente t_0 in dem vierten harmonischen B_0' zu ihrem Berührungspunkt B_0. Damit ergibt sich also wieder der Satz unter 2.

§ 146. Die Erzeugenden der Fläche zweiter Ordnung.

1. Bedingung für zwei Ebenen einer Erzeugenden. Die Schnittlinie zweier Ebenen u und u' gehört nach § 142, (19) ganz der Fläche zweiter Ordnung:

(1) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

an, wenn neben der Bedingung der Tangente (§ 144, (3)):

(2) $$A^{uu'} = 0$$

auch noch die Bedingungen bestehen:

(3) $$A^{uu'}_{kl} = 0; \qquad k, l = 1, 2, 3, 4,$$

welche nach § 142, (19) die Bedingung (2) zur Folge haben.

I. *Die Schnittlinie zweier Ebenen ist also Erzeugende der Fläche* (1), *wenn die mit den Koordinaten u_k und u_k' der beiden Ebenen geränderten Unterdeterminanten* (3) *sämtlich verschwinden.*

Da aus (3) nach § 142, (43) folgt:

(4) $$A^u = -F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad A^{u'} = -F(u_1', u_2', u_3', u_4') = 0,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf § 143, (2):

II. *Jede durch eine Erzeugende der Fläche* (1) *gehende Ebene ist Tangentialebene.*

Über die Bedeutung von $A^{uu'}_{56} = 0$ in § 142, (44) s. später § 149, (13').

2. Quadratische Komplexe der Erzeugenden. Die Gleichungen (3) stellen zehn Komplexe zweiten Grades dar, denen eine Erzeugende angehören muß.[192]) Insbesondere sind:

$$(5)\quad\begin{cases} A_{11}^{\varkappa\varkappa'} = a_{22}q_6^2 + a_{33}q_5^2 + a_{44}q_1^2 - 2a_{34}q_5q_1 + 2a_{42}q_1q_6 - 2a_{23}q_6q_5 \\ \qquad = A_{11}^{\varkappa\varkappa'}(q_6, -q_5, q_1) = 0, \\ A_{22}^{\varkappa\varkappa'} = a_{33}q_4^2 + a_{11}q_6^2 + a_{44}q_2^2 - 2a_{14}q_6q_2 + 2a_{43}q_2q_4 - 2a_{31}q_4q_6 \\ \qquad = A_{22}^{\varkappa\varkappa'}(q_4, -q_6, q_2) = 0, \\ A_{33}^{\varkappa\varkappa'} = a_{11}q_5^2 + a_{22}q_4^2 + a_{44}q_3^2 - 2a_{24}q_4q_3 + 2a_{41}q_3q_5 - 2a_{12}q_5q_4 \\ \qquad = A_{33}^{\varkappa\varkappa'}(q_5, -q_4, q_3) = 0, \\ A_{44}^{\varkappa\varkappa'} = a_{11}q_1^2 + a_{22}q_2^2 + a_{33}q_3^2 + 2a_{23}q_2q_3 + 2a_{31}q_3q_1 + 2a_{12}q_1q_2 \\ \qquad = A_{44}^{\varkappa\varkappa'}(q_1, q_2, q_3) = 0 \end{cases}$$

die *Komplexgleichungen* (I § 72, (24')) *derjenigen Kegelschnitte, in denen die Fläche* (1) *von den vier Koordinatenebenen geschnitten wird* und deren Gleichungen in Punktkoordinaten dieser Ebenen lauten:

$$(6)\quad A_{11}^{\varkappa\varkappa'}(x_2, x_3, x_4) = 0,\quad A_{22}^{\varkappa\varkappa'}(x_3, x_1, x_4) = 0,\quad A_{33}^{\varkappa\varkappa'}(x_1, x_2, x_4) = 0,\quad A_{44}^{\varkappa\varkappa'}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(I § 59, (18'); (19')).

3. Bedingung für zwei Punkte einer Erzeugenden. Ist eine Gerade durch zwei Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ gegeben, so sind nach § 142, (11) die Bedingungen dafür, daß sie eine Erzeugende der Fläche ist:

$$f_{11} = 0,\quad f_{12} = 0,\quad f_{22} = 0.$$

Die Gleichungen sind in ihrer Gesamtheit unabhängig davon, daß für $x_k^{(1)}$ oder $x_k^{(2)}$ ein anderer Punkt $x_k^{(1)} + \lambda x_k^{(2)}$ der Geraden gesetzt wird. Die beiden äußeren bedeuten, daß die Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ auf der Fläche liegen, die Bedeutung der mittleren vgl. § 140, (6).

Die Verbindungslinie der Punkte $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$ *ist Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung* (1), *wenn:*	*Die Schnittlinie der Ebenen* $u_k^{(1)}$ *und* $u_k^{(2)}$ *ist Erzeugende der Fläche zweiter Klasse* § 138, (1'), *wenn:*
(7) $f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} = 0.$	(7') $F_{11} = 0,\ F_{12} = 0,\ F_{22} = 0.$

4. Erzeugende und Tangentialebene. Die zweite Gleichung (7) gibt nach § 143, (5) bei festem Punkte $x_k^{(1)}$ die Tangentialebene in ihm in laufenden Koordinaten $x_k^{(2)}$ und bei festem Punkte $x_k^{(2)}$ die Tangentialebene in ihm in laufenden Koordinaten $x_k^{(1)}$ (falls es sich nicht um einen singulären Punkt handelt).

Die Verbindungslinie zweier Punkte der Fläche ist Erzeugende, wenn jeder in der Tangentialebene des andern liegt.

Dabei ist also $x^{(2)}$ irgend ein Punkt der Schnittlinie der Fläche mit der Tangentialebene des Punktes $x^{(1)}$. Diese schneidet aber, wenn sie nicht ganz der Fläche angehört, in zwei getrennten oder zusammenfallenden Geraden:

Durch jeden Punkt der Fläche zweiter Ordnung gehen im allgemeinen zwei Erzeugende.

In jeder Tangentialebene der Fläche zweiter Klasse liegen im allgemeinen zwei Erzeugende.

5. Lineare Bedingungen der Erzeugenden. Die drei Gleichungen (7) können in der Form geschrieben werden (§ 138, (6)):

$$(8)\quad \sum_1^4{}^k f_k^{(1)} x_k^{(1)} = 0,\quad \sum_1^4{}^k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4{}^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0,\quad \sum_1^4{}^k f_k^{(2)} x_k^{(2)} = 0$$

oder, wenn wir mit:

$$(9)\quad u_k^{(1)} = f_k^{(1)},\quad u_k^{(2)} = f_k^{(2)}$$

die Koordinaten der Tangentialebenen der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ bezeichnen:

$$(10)\quad \sum{}^k u_k^{(1)} x_k^{(1)} = 0,\quad \sum{}^k u_k^{(1)} x_k^{(2)} = 0,\quad \sum{}^k u_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0,\quad \sum{}^k u_k^{(2)} x_k^{(2)} = 0.$$

Sie sagen dann aus, daß die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ beide in der Ebene $u^{(1)}$ und beide in der Ebene $u^{(2)}$ liegen, oder daß der Strahl $p = x^{(1)} x^{(2)}$ mit der Achse $q = u^{(1)} \times u^{(2)}$ zusammenfällt, also (I § 59, (8)) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(11)\quad \varrho p_{\bar{k}} = q_k .$$

Nun ist aber nach (9), wie § 68, 22:

$$\begin{aligned} q_{kl} &= u_k^{(1)} u_l^{(2)} - u_k^{(2)} u_l^{(1)} = f_k^{(1)} f_l^{(2)} - f_k^{(2)} f_l^{(1)} \\ &= \sum_1^4{}^m a_{km} x_m^{(1)} \sum_1^4{}^n a_{ln} x_n^{(2)} - \sum_1^4{}^m a_{lm} x_m^{(1)} \sum_1^4{}^n a_{kn} x_n^{(2)} \\ &= \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n (a_{km} a_{ln} - a_{lm} a_{kn}) x_m^{(1)} x_n^{(2)} \\ &= \sum_1^6{}^{mn} (a_{km} a_{ln} - a_{lm} a_{kn}) (x_m^{(1)} x_n^{(2)} - x_m^{(2)} x_n^{(1)}), \end{aligned}$$

wo mn die Reihe § 138, (20) durchläuft, also mit der Bezeichnung § 138, (9) (I § 59, **1**):

$$(12)\quad q_k = \sum_1^6{}^m \alpha_{km} p_m .$$

Damit ergibt sich aus (11)[173]:

Die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden der Fläche genügen den sechs Bedingungen (auch aus § 149, (4) *mit* $q_k' = q_k = p_{\bar{k}}$*):*

$$(13)\quad \varrho p_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^m \alpha_{km} p_m ,$$

wo k und $\bar{k}$ komplementäre Kombinationen der Reihe § 138, (20) *bedeuten.*

6. Erzeugende des Kegels. Da auch beim *Kegel* nach **1**, II zwei Ebenen, die eine Erzeugende bestimmen, beide Tangentialebenen sind und daher beide durch die Spitze gehen (§ 143, **4**, I), so folgt:

Jede Erzeugende des Kegels geht durch seine Spitze.

Dann kann einer der beiden Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, die die Erzeugende bestimmen, etwa $x^{(1)}$ in der Spitze angenommen werden. Für diesen ist dann mit:

$$f_1^{(1)} = 0, \quad f_2^{(1)} = 0, \quad f_3^{(1)} = 0, \quad f_4^{(1)} = 0$$

(§ 139, (5)) schon von selbst:

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0$$

(§ 138, (6)), so daß nur die dritte Bedingung (7) bleibt.

Jede Gerade, die einen Punkt des Kegels mit der Spitze verbindet, ist eine Erzeugende.

Durch jeden Punkt des Kegels, außer der Spitze, geht nur eine Erzeugende hindurch.

Die Gleichungen (13) sind beim Kegel (§ 144, (16)) mit $\varrho = 0$ erfüllt, also:

(14) $$\sum_1^6 {}_m \alpha_{km} p_m = 0$$

und stellen die ∞^2 Strahlen durch die Spitze des Kegels dar.

Die Erzeugenden des Kegels sind daher in Linienkoordinaten durch die Gleichungen (14) *in Verbindung mit einer der Gleichungen* (5) *dargestellt,* für $A_{44} \neq 0$ der letzten (§ 71, (20)):

(15) $$A_{44}^{uu'}(p_4, p_5, p_6) = 0.$$

7. Die Erzeugenden des Ebenenpaares. Beim *Ebenenpaar* reduzieren sich die sechs Gleichungen (14) nach § 139, (16) auf die einzige:

(16) $$\sum_1^6 {}_m q_m^0 p_m = 0,$$

die *Gleichung der Achse* q^0 *des Paares in Linienkoordinaten* (I § 60, (8)). Die Gleichung (15) aber zerfällt wegen $A_{44} = 0$ in zwei lineare Faktoren, deren jeder eine Gerade darstellt. Die gemeinsamen Transversalen einer jeden solchen Geraden und der Achse des Paares geben die Erzeugenden des Paares. *Zwei* Gleichungen (6) sind nötig.[157])

8. Die Erzeugenden der Doppelebene. Für die *Doppelebene* werden die Gleichungen (14) nach § 139, (29) identisch, während die Gleichungen (5) nach § 139, (27) *vollständige Quadrate* werden[118]):

(17) $$S^2 A_{44}^{uu'}(p_4, p_5, p_6) = b_{11}(u_1^0 q_1 + u_2^0 q_2 + u_3^0 q_3)^2; \ldots$$

Es sind also dann drei von den Gleichungen (5) als Gleichungen der Doppelebene in Strahlenkoordinaten nötig (I § 60, (1')).

§ 147. Die linearen Komplexe der Erzeugenden.

1. Die linearen Komplexe der Erzeugenden. Die Bedingungen für die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden der eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse (§ 143, **1**; **3**):

$$(1)\quad f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (1')\quad F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l = 0$$

lauten nach § 146, (13):

$$(2)\qquad \varrho p_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^m \alpha_{km} p_m,$$

wo k die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und $\bar{k}$ die entsprechenden 4, 5, 6, 1, 2, 3 durchläuft.

Die Gleichungen (2) *stellen sechs lineare Komplexe dar, denen die Erzeugenden der Fläche angehören* (§ 86, (1)).

Wenn aber unendlich viele Wertsysteme der *fünf* Verhältnisse der sechs Strahlenkoordinaten, die schon an die Bedingung:

$$(3)\qquad P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

gebunden sind, auch noch den sechs Gleichungen (2) genügen sollen, so können diese nicht unabhängig voneinander sein. Die Art ihrer *Abhängigkeit* soll zunächst untersucht werden.

2. Die Determinante des Problems. Da die sechs Gleichungen (2) in den sechs Größen p_m linear und homogen sind, muß ihre Determinante:

$$(4)\qquad \Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}-\varrho & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}-\varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}-\varrho \\ \alpha_{41}-\varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52}-\varrho & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}-\varrho & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

verschwinden, also *der Faktor* ϱ *eine Wurzel der Gleichung sechsten Grades:*

$$(5)\qquad \Theta(\varrho) = 0$$

sein.

3. Die Reziprozität der Gleichung sechsten Grades. Die Determinante:

$$(6)\qquad \mathsf{A} = \Theta(0) = |\alpha_{kl}|$$

hat den Wert (I Anm. 1, III, (13)):

$$(7)\qquad \mathsf{A} = A^3,$$

wo A die Determinante der Fläche (1) ist.

Indem man nun die Determinante (6) in der Form:

$$(8)\qquad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante (4) multipliziert und dabei die Beziehungen (I Anm. 1, III,(19)):

$$(9)\qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{km}\alpha_{l\bar m} \quad \text{oder} \quad \sum_1^6{}^m \alpha_{mk}\alpha_{\bar m l} = \begin{cases} A & \text{für } l = \bar k, \\ 0 & \text{„} \quad l \neq \bar k, \end{cases}$$

benutzt, ergibt sich:

$$\mathsf{A}\Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} A-\alpha_{41}\varrho & -\alpha_{51}\varrho & -\alpha_{61}\varrho & -\alpha_{11}\varrho & -\alpha_{21}\varrho & -\alpha_{31}\varrho \\ -\alpha_{42}\varrho & A-\alpha_{52}\varrho & -\alpha_{62}\varrho & -\alpha_{12}\varrho & -\alpha_{22}\varrho & -\alpha_{32}\varrho \\ -\alpha_{43}\varrho & -\alpha_{53}\varrho & A-\alpha_{63}\varrho & -\alpha_{13}\varrho & -\alpha_{23}\varrho & -\alpha_{33}\varrho \\ -\alpha_{44}\varrho & -\alpha_{54}\varrho & -\alpha_{64}\varrho & A-\alpha_{14}\varrho & -\alpha_{24}\varrho & -\alpha_{34}\varrho \\ -\alpha_{45}\varrho & -\alpha_{55}\varrho & -\alpha_{65}\varrho & -\alpha_{15}\varrho & A-\alpha_{25}\varrho & -\alpha_{35}\varrho \\ -\alpha_{46}\varrho & -\alpha_{56}\varrho & -\alpha_{66}\varrho & -\alpha_{16}\varrho & -\alpha_{26}\varrho & A-\alpha_{36}\varrho \end{vmatrix}$$

oder, wenn man rechts den Faktor $(-\varrho)^6$ heraushebt, die drei letzten Kolonnen mit den drei ersten und α_{kl} mit α_{lk} vertauscht:

$$(10)\qquad A^3 \cdot \Theta(\varrho) = -\varrho^6 \cdot \Theta\left(\frac{A}{\varrho}\right).$$

Nimmt man nun für die Entwicklung der ganzen Funktionen (4) mit Rücksicht auf (6) und (7) die Form:[193])

$$\Theta(\varrho) = A^3 + b'\varrho + c'\varrho^2 + a\varrho^3 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6$$

an, so folgt aus (10) identisch in ϱ:

$$A^3(A^3 + b'\varrho + c'\varrho^2 + a\varrho^3 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6)$$
$$= -A^6\varrho^6 - Ab'\varrho^5 - A^2c'\varrho^4 - A^3a\varrho^3 - A^4c\varrho^2 - A^5b\varrho + A^6$$

und damit:

$$-Ab' = A^3 b,\quad -A^2 c' = A^3 c,\quad -A^3 a = A^3 a,\quad -A^4 c = A^3 c',\quad -A^5 b = A^3 b'$$

oder:

$$b' = -A^2 b\,,\quad c' = -Ac\,,\quad a = 0\,.$$

Die ganze Funktion $\Theta(\varrho)$ *hat daher die Form:*

$$(11)\qquad \Theta(\varrho) = A^3 - A^2 b\varrho - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6,$$

wo b und c noch zu bestimmen bleiben.

4. Bestimmung des Koeffizienten *b*. Da der Koeffizient von ϱ auch der Nullwert des Differentialquotienten:[193])

$$\Theta'(\varrho) = -\frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{14}-\varrho)} - \frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{25}-\varrho)} - \frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{36}-\varrho)} - \frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{41}-\varrho)} - \frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{52}-\varrho)} - \frac{\partial\Theta}{\partial(\alpha_{63}-\varrho)}$$

ist, so folgt:

$$-A^2 b = \Theta'(0) = -2\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha_{14}} + \frac{\partial A}{\partial\alpha_{25}} + \frac{\partial A}{\partial\alpha_{36}}\right)$$

oder (I Anm. 1, III, (14)):

$$-A^2 b = -2A^2(\alpha_{14} + \alpha_{25} + \alpha_{36})$$

oder, da die Summe von α_{14}, α_{25}, α_{36} nach § 81, (13) verschwindet:

$$b = 0.$$

Die ganze Funktion $\Theta(\varrho)$ *hat daher die Form:*

$$(12)\qquad \Theta(\varrho) = A^3 - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 - \varrho^6.$$

5. $\Theta(\varrho)$ **als vollständiger Kubus.** Multipliziert man die Determinante $\Theta(\varrho)$ in (4) mit der Determinante $\Theta(-\varrho)$, für die man aber die in (8) getroffene Anordnung der Zeilen und Kolonnen wählt, so folgt nach (9):

$$\Theta(\varrho)\Theta(-\varrho) = \begin{vmatrix} A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (A-\varrho^2)^6.$$

Da aber nach (12) $\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho)$, so wird auch:

$$\Theta^2(\varrho) = (A-\varrho^2)^6$$

und hiernach, da ϱ^6 in (12) den Koeffizienten -1 hat:

$$(13)\qquad \Theta(\varrho) = (A-\varrho^2)^3.$$

Die Determinante (4) *ist also ein vollständiger Kubus, und die Gleichung sechsten Grades* (5) *hat zwei dreifache Wurzeln:*

$$(14)\qquad \varrho = +\sqrt{A}\quad \textit{und}\quad \varrho = -\sqrt{A}\,.$$

6. Die Elementarteiler von $\Theta(\varrho)$. Nach dem Multiplikationsverfahren, welches in 5 für $\Theta(\varrho)\Theta(-\varrho)$ gebraucht wurde, folgt, wenn man für die Bildung der Differentialquotienten von $\Theta(\varrho)$ vor-

übergehend α_{kl} und α_{lk} als verschieden behandelt:

$$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} \Theta(-\varrho) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}-\varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}-\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41}+\varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52}+\varrho & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}+\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} & \alpha_{15} & \alpha_{25}+\varrho & \alpha_{35} \\ 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \alpha_{45}(A-\varrho^2)^5,$$

oder da nach (13):

$$\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho) = (A-\varrho^2)^3$$

ist:

(15) $$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} = (A-\varrho^2)^2 \alpha_{45},$$

und ebenso:

(15) $$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial (\alpha_{14}-\varrho)} = (A-\varrho^2)^2(\alpha_{41}+\varrho),$$

und entsprechend alle übrigen Unterdeterminanten von $\Theta(\varrho)$. Auf gleiche Weise erhält man:

(16) $$\frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12} \partial \alpha_{31}} = (A-\varrho^2) \begin{vmatrix} \alpha_{45} & \alpha_{44} \\ \alpha_{65} & \alpha_{64} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial (\alpha_{14}-\varrho) \partial \alpha_{65}} = (A-\varrho^2) \begin{vmatrix} \alpha_{41}+\varrho & \alpha_{42} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, \ldots$$

Jede der beiden dreifachen Wurzeln (14) *der Determinante sechsten Grades* $\Theta(\varrho)$ *ist also zweifache Wurzel aller Unterdeterminanten fünften und einfache Wurzel aller Unterdeterminanten vierten Grades* (§ 50, 9).

7. Die Abhängigkeit der sechs linearen Komplexe. Die sechs linearen homogenen Gleichungen (2) können nach 2 nur bestehen, wenn ϱ einen der beiden Werte (14) hat. Daher müssen die Erzeugenden der Fläche (1) dem einen oder andern der beiden Gleichungssysteme genügen ($k = 1, 2, 3, \ldots, 6$):

(17) $$\sqrt{A}\, p_{\bar{k}} = \sum_1^6 {}^m \alpha_{km} p_m, \qquad (18) \quad -\sqrt{A}\, p_{\bar{k}} = \sum_1^6 {}^m \alpha_{km} p_m.$$

Da aber nach 5 und 6 nicht nur die Determinante eines jeden der beiden Systeme von sechs Gleichungen, sondern auch alle ihre Unterdeterminanten fünften und vierten Grades verschwinden, so enthält jedes der beiden Systeme nur *drei unabhängige* Gleichungen, also:

Die Erzeugenden der Fläche (1) *zerfallen in zwei Scharen* (17)

und (18); *jede Schar besteht aus den gemeinsamen Geraden dreier unabhängiger linearer Komplexe.*[178])

8. Beziehung der beiden Scharen zueinander. Ist p irgend eine Gerade der Schar (17) und p' eine der Schar (18), also:

$$\sqrt{A}\, p_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^m \alpha_{km} p_m, \qquad -\sqrt{A}\, p_k' = \sum_1^6{}^n \alpha_{\bar{k}n} p_n',$$

so folgt durch Multiplikation beider Gleichungen und Summation über k:

$$-A \sum_1^6{}^k p_{\bar{k}} p_k' = \sum_1^6{}^m \sum_1^6{}^n \left(\sum_1^6{}^k \alpha_{km} \alpha_{\bar{k}n}\right) p_m p_n',$$

oder da nach (9) der Ausdruck in runder Klammer A oder 0 ist, je nachdem $n = \bar{m}$ oder $n \neq \bar{m}$:

$$-A \sum_1^6{}^k p_{\bar{k}} p_k' = A \sum_1^6{}^m p_m p_{\bar{m}}',$$

also, da die beiden Summen dieselben sind:

$$2A \sum_1^6{}^k p_{\bar{k}} p_k' = 0.$$

Dies bedeutet aber, da $A \neq 0$ (I § 59, (15)):

Jede Gerade der einen Schar (17) *oder* (18) *schneidet jede Gerade der andern.*[158])

9. Besondere Fälle. Für das *einschalige Hyperboloid:*

(19) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{22} = \frac{1}{b^2},\ a_{33} = -\frac{1}{c^2},\ a_{44} = -1;\ \sqrt{A} = \frac{1}{-\varepsilon abc},\ \varepsilon = \pm 1.$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{b^2c^2},\ \alpha_{22} = -\frac{1}{c^2a^2},\ \alpha_{33} = \frac{1}{a^2b^2},\ \alpha_{44} = -\frac{1}{a^2},\ \alpha_{55} = -\frac{1}{b^2}\ \ \alpha_{66} = \frac{1}{c^2},$$

alle übrigen a_{kl} und $\alpha_{kl} = 0$. Die sechs linearen Komplexe (17) oder (18) werden daher:

$$\frac{p_1}{\varepsilon abc} = \frac{p_4}{a^2},\quad \frac{p_2}{\varepsilon abc} = \frac{p_5}{b^2},\quad \frac{p_3}{\varepsilon abc} = -\frac{p_6}{c^2},$$

$$\frac{p_4}{\varepsilon abc} = \frac{p_1}{b^2c^2},\quad \frac{p_5}{\varepsilon abc} = \frac{p_2}{c^2a^2},\quad \frac{p_6}{\varepsilon abc} = -\frac{p_3}{a^2b^2}$$

und enthalten nur die drei unabhängigen:

(20) $$\frac{p_1}{bc} = \varepsilon \frac{p_4}{a},\quad \frac{p_2}{ca} = \varepsilon \frac{p_5}{b},\quad \frac{p_3}{ab} = -\varepsilon \frac{p_6}{c},$$

wie sie § 82, (22) gefunden wurden.

Für das *hyperbolische Paraboloid*:

(21) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

sind:

$$a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = -\frac{1}{c^2}, \quad a_{14} = 1; \quad \sqrt{A} = \frac{1}{-\varepsilon b c}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{b^2 c^2}, \quad \alpha_{26} = -\frac{1}{c^2}, \quad \alpha_{35} = -\frac{1}{b^2}, \quad \alpha_{44} = -1,$$

alle übrigen a_{kl} und α_{kl} gleich 0. Die sechs linearen Komplexe (17) oder (18) werden daher:

$$\frac{p_1}{-\varepsilon b c} = -p_4, \quad \frac{p_2}{-\varepsilon b c} = -\frac{p_3}{b^2}, \quad \frac{p_3}{-\varepsilon b c} = -\frac{p_2}{c^2},$$

$$\frac{p_4}{-\varepsilon b c} = -\frac{p_1}{b^2 c^2}, \quad \frac{p_5}{-\varepsilon b c} = -\frac{p_6}{c^2}, \quad \frac{p_6}{-\varepsilon b c} = -\frac{p_5}{b^2},$$

und enthalten nur die drei unabhängigen:

(22) $$p_1 = \varepsilon b c p_4, \quad b p_2 = \varepsilon c p_3, \quad c p_5 = \varepsilon b p_6,$$

wie sie § 83, (19) gefunden wurden.

10. Die Linienfläche dreier Komplexe in Punktkoordinaten. Sind jetzt irgend drei lineare Komplexe durch die Gleichungen gegeben:

(23) $$\begin{cases} c_{11} p_1 + c_{12} p_2 + c_{13} p_3 + c_{14} p_4 + c_{15} p_5 + c_{16} p_6 = 0, \\ c_{21} p_1 + c_{22} p_2 + c_{23} p_3 + c_{24} p_4 + c_{25} p_5 + c_{26} p_6 = 0, \\ c_{31} p_1 + c_{32} p_2 + c_{33} p_3 + c_{34} p_4 + c_{35} p_5 + c_{36} p_6 = 0, \end{cases}$$

so fragen wir nach dem Ort derjenigen Geraden, die jedem der drei Komplexe angehören.[171])

Ist p_k eine solche Gerade und x_k ein Punkt auf ihr, so bestehen die Bedingungen (I § 59, (10); § 60, (1)):

(24) $$\begin{cases} p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0, \\ p_4 x_3 - p_6 x_1 + p_2 x_4 = 0, \\ p_5 x_1 - p_4 x_2 + p_3 x_4 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

von denen drei, für $x_4 \neq 0$ die drei ersten, in bezug auf die Koordinaten p_k unabhängig sind. Für den Ort des laufenden Punktes x einer gemeinsamen Geraden p_k der drei Komplexe erhält man daher durch Elimination der p_k aus den Gleichungen (23) und den drei ersten (24):

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante (25) nach den Unterdeterminanten der drei ersten und der drei letzten Zeilen und setzt zur Abkürzung:[198])

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} c_{1k} & c_{1l} & c_{1m} \\ c_{2k} & c_{2l} & c_{2m} \\ c_{3k} & c_{3l} & c_{3m} \end{vmatrix} = (klm) = -(lkm),$$

so lautet die Gleichung (25):

$$(27)\qquad x_4 g = 0,$$

wo:

$$(28)\qquad g = (234)x_1^2 + (315)x_2^2 + (126)x_3^2 + (456)x_4^2 + [(125) + (316)]x_2x_3 \\ + [(245) - (364)]x_1x_4 + [(236) + (124)]x_3x_1 + [(356) - (145)]x_2x_4 \\ + [(314) + (235)]x_1x_2 + [(164) - (256)]x_3x_4.$$

Hätten wir bei vorstehendem Verfahren, statt die vierte Gleichung (24) wegzulassen, die erste, zweite oder dritte unterdrückt, so hätten wir statt (27) erhalten:

$$(29)\qquad x_1 g = 0, \quad x_2 g = 0, \quad x_3 g = 0.$$

Da aber x_1, x_2, x_3, x_4 nicht alle 0 sind, folgt für den gesuchten Ort jedenfalls:

$$(30)\qquad g = 0.$$

Der Ort der gemeinsamen Geraden der drei linearen Komplexe (23) *ist eine Fläche zweiter Ordnung* (30) *mit der Bedeutung* (28) *von g.*

11. Die Linienfläche dreier Komplexe in Ebenenkoordinaten. Benutzt man an Stelle von (24) die Bedingungen der vereinigten Lage einer Ebene u_k mit einer gemeinsamen Linie der Komplexe (23) (I § 59, (11)), so ergibt sich für die Ebene die Bedingung:

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ 0 & -u_3 & u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & u_4 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} = u_4 G = 0,$$

wo wiederum mit der Abkürzung (26):

$$(32)\quad G = (561)u_1^2 + (642)u_2^2 + (453)u_3^2 + (123)u_4^2 + [(452) + (643)]u_2u_3 + [(512) - (631)]u_1u_4 + [(563) + (451)]u_3u_1 + [(623) - (412)]u_2u_4 + [(641) + (562)]u_1u_2 + [(431) - (523)]u_3u_4.$$

Die Koeffizienten in (28) und (32) unterscheiden sich nur durch die Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 bezüglich mit 4, 5, 6. Dual zu **10** ergibt sich daher:

Die Gesamtheit aller Ebenen, die durch eine gemeinsame Gerade der drei linearen Komplexe (23) *gehen, umhüllt eine Fläche zweiter Klasse.*

$$(33)\qquad G = 0,$$

wo G die Bedeutung (32) *hat.*

12. Besonderer Fall. Die Komplexe (23) können auch *spezielle* Komplexe sein (§ 86, 4). Dies ist unter anderen der Fall, wenn ihre Gleichungen die Form haben:

$$(34)\qquad \begin{cases} p_1 + np_5 + mp_6 = 0, \\ p_2 + lp_6 + np_4 = 0, \\ p_3 + mp_4 + lp_5 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (25) wird dann mit Einführung schiefwinkliger Koordinaten $x, y, z, 1$ für x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & 1 & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & m & l & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n+z & m-y \\ 0 & 0 & 0 & n-z & 0 & l+x \\ 0 & 0 & 0 & m+y & l-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & n+z & m-y \\ n-z & 0 & l+x \\ m+y & l-x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine bereits § 74, (22) gefundene Gleichung.[171])

§ 148. Darstellung der Schnittgebilde in Ebenen- und Linienkoordinaten.

1. Gleichung eines ebenen Schnittes in Ebenenkoordinaten. Die Bedingung dafür, daß die Schnittlinie q der beiden Ebenen u_k und u_k' Tangente der Fläche:

$$(1)\qquad f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl}x_kx_l = 0$$

sei, ist nach § 144, (3):

(2) $$A^{uu'} = 0$$

oder auch nach § 140, (22):

(3) $$\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}^u \, u_k' \, u_l' = 0 \, .$$

Hält man nun die Ebene u_k fest, so ist dies die Bedingung dafür, daß die laufende Ebene u_k' durch eine in der Ebene u_k liegende Tangente der Fläche, also eine Tangente der Schnittkurve geht.

Die Gleichung (2) *oder* (3) *stellt in laufenden Ebenenkoordinaten* u_k' *die Schnittkurve der Fläche* (1) *mit der Ebene* u_k *dar.*[122])

2. Der Rang der Schnittkurve als einer Fläche zweiter Klasse. Als Fläche zweiter Klasse ist das durch (3) dargestellte Gebilde zunächst vom Range 3 (§ 139, 4), da die Determinante ($k, l = 1, 2, 3, 4$):

(4) $$A_{kl}^{u}{}' = (A^u)^3 \cdot 0 = 0 \, ,$$

wie § 45, (19).[123])

Ist dagegen die schneidende Ebene u_k einfache Tangentialebene, so erhält nach § 141, (41) die Gleichung (3) die Form:

(5) $$\Bigl(\sum_1^4{}^k x_k^0 \, u_k'\Bigr)^2 = 0 \, ,$$

wird also vom Range 1. *Sie stellt dann den doppelt zählenden Berührungspunkt als Ebenenbündel dar.*

Ist die schneidende Ebene u_k stationäre Tangentialebene, so wird die Gleichung (3) nach § 141, (22) identisch erfüllt.

3. Gleichungen der in einer Tangentialebene liegenden Erzeugenden in Ebenenkoordinaten. Unter den ∞^2 Ebenen des Bündels (5) sind diejenigen ausgezeichnet, die nicht nur durch den Berührungspunkt der Tangentialebene u_k, sondern auch durch eine der beiden sich in ihm kreuzenden Erzeugenden der Fläche gehen. Die Bedingungen, daß die Schnittlinie q der Ebenen u und u' eine Erzeugende ist, sind nach § 146, (3):

(6) $$A_{kl}^{uu'} = 0 \, ; \quad k, l = 1, 2, 3, 4 .$$

Entwickelt, ist beispielsweise:

(7) $$A_{44}^{uu'} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l \alpha_{kl}^u \, u_k' \, u_l' = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse in der Ebene $x_4 = 0$. Diese muß in das Punktepaar zerfallen, in dem die beiden gesuchten Erzeugenden die Ebene $x_4 = 0$ schneiden.

Ist daher u_k eine Tangentialebene, so daß $A^u = 0$, so werden die beiden in ihr liegenden Erzeugenden in laufenden Ebenenkoordinaten u_k' dargestellt durch die Gleichung (2), *die das Bündel am Berührungspunkt, und durch eine der Gleichungen:*

$$(8) \qquad A_{11}^{uu'} = 0, \; A_{22}^{uu'} = 0, \; A_{33}^{uu'} = 0, \; A_{44}^{uu'} = 0,$$

die die Schnittpunktpunktpaare der beiden Erzeugenden mit den vier Koordinatenebenen ausdrücken.

Besteht aber die Schnittkurve der Fläche mit der Tangentialebene nicht aus zwei sich kreuzenden Geraden, sondern aus einer Doppellinie q_k^0, indem neben A^u auch alle A_{kl}^u verschwinden, so wird aus (7) nach § 141, (48):

$$(9) \qquad -S^2 A_{44}^{uu'} = b_{11}(q_1^0 u_1' + q_2^0 u_2' + q_3^0 u_3')^2$$

ein vollständiges Quadrat. Jede der Gleichungen (8) stellt dann einen der Schnittpunkte der Doppellinie mit einer Koordinatenebene dar; *zwei von ihnen sind also die Gleichungen der Doppellinie in Ebenenkoordinaten* (I § 59, (12)).

4. Gleichung der Schnittkurve in Linienkoordinaten. Die Gleichung:

$$(10) \qquad A^{uu'u''} = 0$$

bedeutet nach § 140, (33), daß *der Schnittpunkt der drei Ebenen u, u', u'' auf der Fläche* (1) *liegt.*

Nach den Strahlenkoordinaten p_k' der Geraden $u' \times u''$ entwickelt, lautet die Gleichung (10) nach § 140, (37):

$$(11) \qquad \sum_1^6 {}^k \sum_1^6 {}^l \alpha''_{kl}\, p_k' p_l' = 0.$$

Diese Gleichung drückt daher bei festen u_k die Bedingung aus, daß die laufende Gerade p_k' die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene u trifft, oder:

Die Gleichung (11) *ist die Gleichung der Schnittkurve der Fläche* (1) *mit der Ebene u in laufenden Strahlenkoordinaten p_k' (die Komplexgleichung der Schnittkurve).*

Ist die Ebene eine stationäre Tangentialebene mit der Berührungslinie q_k^0, so wird die linke Seite der Gleichung (11) ein vollständiges Quadrat (§ 141, (48)):

$$(12) \qquad \Big(\sum_1^6 {}^k q_k^0 p_k'\Big)^2 = 0.$$

5. Gleichung des Schnittpunktpaares in Ebenenkoordinaten. Nach den Ebenenkoordinaten u_k'' entwickelt, lautet die Gleichung (10) nach § 140, (42):

$$(13)\qquad \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}^{uu'} u_k'' u_l'' = 0 .$$

Diese Gleichung drückt daher bei festen u_k, u_k' aus, daß die laufende Ebene u_k'' durch einen Schnittpunkt der Achse $q_k = u \times u'$ mit der Fläche geht.

Die Gleichung (13) *stellt das Schnittpunktpaar der Fläche* (1) *und der Geraden* $u \times u'$ *in laufenden Ebenenkoordinaten* u_k'' *dar.*[122])

Ist jedoch mit $A^{uu'} = 0$ die Gerade $u \times u'$ Tangente der Fläche, so wird die Gleichung (13) nach § 142, (35):

$$(14)\qquad \left(\sum_1^4{}^k x_k^0 u_k''\right)^2 = 0 ,$$

wo x_k^0 die Koordinaten des Berührungspunktes sind. Diesen stellt alsdann die Gleichung (13) doppelt zählend in laufenden Ebenenkoordinaten u_k'' dar.

II. Kapitel.

Polartetraeder, Polarberührungstetraeder und Schmiegungstetraeder.

§ 149. Polartetraeder und Quadratdarstellung.

1. Harmonische Pole. Das Schnittpunktpaar der Fläche § 142, (1) mit der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ hat nach § 142, (7) in Zweieckskoordinaten y_1, y_2 in bezug auf diese Punkte die Gleichung:

$$(1^0)\qquad f_{11} y_1^2 + 2 f_{12} y_1 y_2 + f_{22} y_2^2 = 0.$$

Nach § 40, (3) ist daher:

$$(2^0)\qquad f_{12} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu dem Schnittpunktpaar harmonisch, also harmonische Pole der Fläche sind (§ 68, 5).

Die Theorie der harmonischen Pole und ihre Folgerungen finden daher in *Tetraederkoordinaten* formal denselben Ausdruck, wie in *homogenen gemeinen Koordinaten,* wo ebenfalls die Bedingung § 68, (7) den Ausgangspunkt bildete. Es bedarf daher nur der Angabe der bezüglichen Formeln in Tretraederkoordinaten:

In bezug auf die Fläche zweiter Ordnung § 138, (1):

(1) $$f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{kl} x_k x_l = 0$$

sind zwei Punkte $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$ *harmonische Pole unter der Bedingung:*

(2) $$f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0.$$

In bezug auf die Fläche zweiter Klasse § 138, (1'):

(1') $$F = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{kl} u_k u_l = 0$$

sind zwei Ebenen $u_k^{(1)}$ *und* $u_k^{(2)}$ *harmonische Polarebenen unter der Bedingung:*

(2') $$F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^4 F_k^{(2)} u_k^{(1)} = 0.$$

2. Koordinaten der Polarelemente. In bezug auf (1), bezüglich (1') sind ferner (§ 68, (18); (22); (25); § 77, (7); (8); (9)) die Koordinaten

der Polarebene eines Punktes x_l:

(3) $$\varrho u_k = f_k = \sum_1^4 a_{kl} x_l;$$

der Polare einer Geraden p_l:

(4) $$\varrho q_k' = \varphi_k = \sum_1^6 \alpha_{kl} p_l;$$

des Poles einer Ebene u_l:

(5) $$\varrho x_k = F_k = \sum_1^4 A_{kl} u_l.$$

des Poles einer Ebene u_l:

(3') $$\sigma x_k = F_k = \sum_1^4 e_{kl} u_l;$$

der Polare einer Geraden q_l:

(4') $$\sigma p_k' = \Phi_k = \sum_1^6 \varepsilon_{kl} q_l;$$

der Polarebene eines Punktes x_l:

(5') $$\sigma u_k = f_k = \sum_1^4 E_{kl} x_l.$$

3. Konjugierte Elemente. Konjugiert sind (§ 68, **29**; **31**) zwei Elemente, wenn jedes mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt. Dabei ist (§ 68, (7); § 77, (2)):

(6) $$f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Punkte* $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder die *Gleichung der Polarebene* (§ 68, (14))

(6') $$F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Ebenen* $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ oder die *Gleichung des Poles* (§ 77, (5)) der

des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_k^{(2)}$;

(7) $$\varphi_{12}=\sum_1^6{}^k\varphi_k^{(1)}p_k^{(2)}=\sum_1^6{}^k\sum_1^6{}^l\alpha_{kl}p_k^{(1)}p_l^{(2)}=0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Strahlen* $p_k^{(1)}$ und $p_k^{(2)}$ (§ 68, (29)) oder die *Gleichung der Polare* (§ 68, (28)) des Strahles $p_k^{(1)}$ in laufenden Strahlenkoordinaten $p_k^{(2)}$;

(8) $$F_{12}=\sum_1^4{}^kF_k^{(1)}u_k^{(2)}=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^lA_{kl}u_k^{(1)}u_l^{(2)}=0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Ebenen* $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ (§ 68, (27)) oder die *Gleichung des Poles* (§ 68, (26)) der Ebene $u_k^{(1)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten $u_k^{(2)}$.

Ebene $u_k^{(1)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten $u_k^{(2)}$;

(7′) $$\Phi_{12}=\sum_1^6{}^k\Phi_k^{(1)}q_k^{(2)}=\sum_1^6{}^k\sum_1^6{}^l\varepsilon_{kl}q_k^{(1)}q_l^{(2)}=0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Achsen* $q_k^{(1)}$ und $q_k^{(2)}$ (§ 77, (13)) oder die *Gleichung der Polare* (§ 77, (11)) der Achse $q_k^{(1)}$ in laufenden Achsenkoordinaten $q_k^{(2)}$;

(8′) $$f_{12}=\sum_1^4{}^kf_k^{(1)}x_k^{(2)}=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^lE_{kl}x_k^{(1)}x_l^{(2)}=0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Punkte* (§ 77, (12)) $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder die *Gleichung der Polarebene* (§ 77, (10)) des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_k^{(2)}$.

4. Eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der *eigentlichen* Fläche zweiter Ordnung und Klasse lauten nach § 78, (10); (11) *in Punkt- und Ebenenkoordinaten:*

(9) $$f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^la_{kl}x_kx_l=0,\qquad (9')\quad F=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^lA_{kl}u_ku_l=0;$$

ferner nach § 78, (28); (29) in *Strahlen- und Achsenkoordinaten:*

(10) $$\varphi=\sum_1^6{}^k\sum_1^6{}^l\alpha_{kl}p_kp_l=0,\qquad (10')\quad \Phi=\sum_1^6{}^k\sum_1^6{}^l\mathsf{A}_{kl}q_kq_l=0.$$

Von den Beziehungen zwischen den *Koordinaten von Pol und Polarebene* (3), (5), (3′), (5′):

(11) $$\varrho u_k=f_k=\sum_1^4{}^la_{kl}x_l,\qquad (11')\quad \sigma x_l=F_l=\sum_1^4{}^kA_{kl}u_k$$

sind (§ 78, 9) mit $\varrho\sigma=A$ die einen die *Auflösungen* der andern. Dasselbe gilt mit $\varrho\sigma=A^2$ von den Beziehungen zwischen den *Koordinaten reziproker Polaren* (4) und (4′), wenn wir, mit Rücksicht

auf die Reziprozität, in (4') p_k', q_l mit p_k, q_l' vertauschen (I § 63, (19); (20)):

(12) $$\varrho q_k' = \varphi_k = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_l,$$ (12') $$\sigma p_l = \Phi_l = \sum_1^6{}^k \mathsf{A}_{kl} q_k'.$$

Die sechs Gleichungen (6), (6')—(8), (8') zwischen *konjugierten Punkten, Ebenen und Geraden* ziehen sich entsprechend auf folgende vier zusammen:

(13) $$f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0,$$

(13') $$F_{12} = \sum_1^4{}^k F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0,$$

(14) $$\varphi_{12} = \sum_1^6{}^k \varphi_k^{(1)} p_k^{(2)} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k^{(1)} p_l^{(2)} = 0,$$

(14') $$\Phi_{12} = \sum_1^6{}^k \Phi_k^{(1)} q_k^{(2)} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k^{(1)} q_l^{(2)} = 0.$$

5. Die uneigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die *uneigentlichen* Flächen zweiter Ordnung sind nicht zugleich Flächen zweiter Klasse. Es gelten also nur die links stehenden Formeln (1)—(8) ohne Beziehung zu den rechts stehenden. Das Umgekehrte gilt für die uneigentlichen Flächen zweiter Klasse. Charakteristisch ist für alle diese Flächen das Auftreten *unbestimmter Polarelemente*:

Punkte unbestimmter Polarebene, den Gleichungen:

(15) $$\sum_1^4{}^l a_{kl} x_l = 0$$

genügend, sind beim Kegel die Spitze, beim Ebenenpaar die ∞^1 Punkte der Achse, bei der Doppelebene die ∞^2 Punkte der Fläche (§ 139, (6)).

Ebenen unbestimmten Poles, den Gleichungen:

(15') $$\sum_1^4{}^l e_{kl} u_l = 0$$

genügend, sind beim Kegelschnitt dessen Ebene, beim Punktepaar die ∞^1 Ebenen der Verbindungslinie, beim Doppelpunkt die ∞^2 Ebenen desselben.

Strahlen unbestimmter Polare:

(16) $$\sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_l = 0,$$

sind beim Kegel die ∞^2 Spitzenstrahlen, beim Ebenenpaar die ∞^3

Achsen unbestimmter Polare:

(16') $$\sum_1^6{}^l \varepsilon_{kl} q_l = 0,$$

sind beim Kegelschnitt die ∞^2 Achsen seiner Ebene, beim Punkte-

Treffgeraden der Achse, bei der Doppelebene die ∞^4 Geraden des Raumes (§ 144, (16); § 139, (16)).

Ebenen unbestimmten Poles:

$$(17) \quad \sum_1^4 {}_l A_{kl} u_l = 0,$$

sind beim Kegel die ∞^2 Ebenen der Spitze, beim Ebenenpaar die ∞^3 Ebenen des Raumes (§ 143, (9)).

paar die ∞^3 Treffgeraden der Verbindungslinie, beim Doppelpunkt die ∞^4 Geraden des Raumes.

Punkte unbestimmter Polarebene:

$$(17') \quad \sum_1^4 {}_l E_{kl} x_l = 0,$$

sind beim Kegelschnitt die ∞^2 Punkte seiner Ebene, beim Punktepaar die ∞^3 Punkte des Raumes.

6. Polzweiecke und Quadratdarstellung des Schnittpunktpaares. Zwei *getrennte* harmonische Pole bilden ein *Polzweieck der Fläche* (1), zwei *getrennte* harmonische Polarebenen ein *Polarzweiflach der Fläche* (1').

Da die Bedingung (2⁰) der harmonischen Pole gleichzeitig das Fehlen des Produktgliedes in der Gleichung (1⁰) ausdrückt, so ergibt sich (§ 40, (4)):

Die Gleichung des Schnittpunktpaares einer Geraden mit der Fläche (1) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$(18) \quad f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 = 0,$$

wenn die auf der Geraden liegenden Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, auf die sich die Zweieckskoordinaten y_1, y_2 beziehen, ein Polzweieck der Fläche bilden.

Die Gleichung des Tangentialebenenpaares durch eine Gerade an die Fläche (1') *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$(18') \quad F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 = 0,$$

wenn die durch die Gerade gehenden Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, auf die sich die Zweiflachskoordinaten v_1, v_2 beziehen, ein Polarzweiflach der Fläche bilden.

Nach § 66, 9 und § 40, 3 gibt es auf jeder Geraden des Raumes, die nicht ganz der Fläche angehört, ∞^1 Polzweiecke der Fläche (1). Ist das Punktepaar (18) ein getrenntes, gehört keine, ist es ein zusammenfallendes, gehört eine Ecke des Polzweiecks der Fläche an.

7. Poldreieck und Quadratdarstellung der Schnittkurven. Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, von denen jeder harmonischer Pol jedes andern ist, bilden ein *Poldreieck der Fläche* (1) und gleichzeitig der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene der drei Punkte. Ebenso bilden drei nicht durch eine Gerade gehende Ebenen, von denen jede harmonische Polarebene jeder andern ist, ein *Polardreiflach*

der Fläche (1′) und gleichzeitig des Berührungskegels der vom Schnittpunkt der drei Ebenen an die Fläche geht.

Da für die Ecken $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ eines solchen Poldreiecks nach (1) $f_{23} = f_{31} = f_{12} = 0$, so folgt mit Rücksicht auf § 141, (7):

Die Gleichung der Schnittkurve einer Ebene mit der Fläche (1) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

(19) $f_{11}y_1^2 + f_{22}y_2^2 + f_{33}y_3^2 = 0,$

wenn die in der Ebene liegenden Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$, *auf die sich die Dreieckskoordinaten* y_1, y_2, y_3 *beziehen, ein Poldreieck bilden.*

Die Gleichung des Berührungskegels von einem Punkte an die Fläche (1′) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

(19′) $F_{11}v_1^2 + F_{22}v_2^2 + F_{33}v_3^2 = 0,$

wenn die durch den Punkt gehenden Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$, *auf die sich die Dreiflachskoordinaten* v_1, v_2, v_3 *beziehen, ein Polardreiflach bilden.*

Nach § 46, **10**—**12** gibt es, wenn die Schnittkurve ein eigentlicher Kegelschnitt oder ein getrenntes Linienpaar ist, in der schneidenden Ebene ∞^3 Poldreiecke, wenn sie eine Doppelgerade ist, deren ∞^4.

Es ist also stets auf unendlich viele Weisen möglich, die Gleichung der Schnittkurve auf die Form (19) zu bringen.

8. Begriff des Poltetraeders.[123])

I. *Ein Tetraeder ist dann ein Poltetraeder der Fläche* (1), *wenn jede seiner Ecken harmonischer Pol jeder der drei andern ist.*

I′. *Ein Tetraeder ist ein Polarebenentetraeder der Fläche* (1′), *wenn jede seiner Seitenebenen harmonische Polarebene jeder der drei andern ist*

Aus § 68, **8** und § 77, **3** ergibt sich dann die weitere charakteristische Eigenschaft:

II. *Bei einem Poltetraeder ist jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke.*

II′. *Bei einem Polarebenentetraeder ist jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche.*

9. Konstruktion eines Poltetraeders. Um ein Poltetraeder $J_1J_2J_3J_4$ zu konstruieren, nimmt man einen Punkt J_1 an, der nicht auf der Fläche liegt, dessen Polarebene $\mathfrak{l}_1$ also nach § 68, **9**, I nicht durch J_1 geht. Auf dieser nimmt man wieder einen Punkt J_2 an, der nicht auf der Fläche liegt (vgl. jedoch **14**), dessen Polarebene $\mathfrak{l}_2$ also nicht durch J_2, aber nach § 68, **13**, II durch J_1 geht. Auf der Schnittlinie $\mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{l}_2$ nimmt man wieder einen Punkt J_3 an, der nicht auf der Fläche liegt (vgl. jedoch **13**), dessen Polarebene $\mathfrak{l}_3$ also nicht durch J_3, aber nach § 68, **13**, II durch J_1 und J_2 geht. Der Schnitt

punkt $J_4 = \mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_3$, dessen Polarebene die Ebene $\mathfrak{l}_4 = J_1 J_2 J_3$ ist, bildet mit J_1, J_2 und J_3 ein Poltetraeder.

10. Gleichungen in bezug auf ein Poltetraeder. Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, so sind die Bedingungen, daß in der transformierten Gleichung § 138, (12) die Produktglieder fehlen, nämlich:

$$(20)\quad b_{23} = f_{23} = 0,\ b_{31} = f_{31} = 0,\ b_{12} = f_{12} = 0,\ b_{14} = f_{14} = 0,\ b_{24} = f_{24} = 0,\ b_{34} = f_{34} = 0,$$

nach (2) gleichzeitig die Bedingungen, daß die neuen Ecken $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$, $x_k^{(4)}$ ein Poltetraeder bilden.[114])

Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(21)\quad f = f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 + f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 = 0,$$

wenn das Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten y_k beziehen, ein Poltetraeder ist.

Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(21')\quad F = F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 + F_{33} v_3^2 + F_{44} v_4^2 = 0,$$

wenn das Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten v_k beziehen, ein Polarebenentetraeder ist.

Die Determinante der Form (21):

$$(22)\quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = b_{11} b_{22} b_{33} b_{44},\quad b_{kl} = f_{kl},$$

hat die Unterdeterminanten:

$$(23)\quad B_{11} = b_{22} b_{33} b_{44},\ B_{22} = b_{11} b_{33} b_{44},\ B_{33} = b_{11} b_{22} b_{44},\ B_{44} = b_{11} b_{22} b_{33},$$
$$B_{23} = B_{31} = B_{12} = B_{14} = B_{24} = B_{34} = 0;$$

$$(24)\quad \beta_{11} = b_{22} b_{33},\quad \beta_{22} = b_{33} b_{11},\quad \beta_{33} = b_{11} b_{22},\quad \beta_{44} = b_{11} b_{44},$$
$$\beta_{55} = b_{22} b_{44},\quad \beta_{66} = b_{33} b_{44},$$
$$\beta_{kl} = 0,\quad k \neq l.$$

Erhält daher in bezug auf ein Poltetraeder die Form f den Ausdruck (21), so werden gleichzeitig nach § 138, (30) *die kovarianten Formen:*

$$(25)\qquad \varphi = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l = \sum_1^6{}^k \beta_{kk} r_k^2;$$

$$S^4\Phi = S^4 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k q_l = \sum_1^6{}^k \mathsf{B}_{kk} s_k^2.$$

$$(26)\qquad S^2 F = S^2 \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l = \sum_1^4{}^k B_{kk} v_k^2.$$

11. Polartetraeder der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Bei der eigentlichen Fläche *ist jedes Poltetraeder zugleich Polarebenentetraeder* und umgekehrt, da die Erklärungen **8**, II und II′ nach § 78, **9** dasselbe besagen. Wir nennen das sich selbst duale Gebilde ein *Polartetraeder* und entnehmen aus **8**—**10** die Eigenschaften:

I. *Je zwei Ecken, je zwei Seitenflächen, je zwei Kanten eines Polartetraeders sind einander konjugiert* (§ 68, **31**).

II. *Jede Ecke ist der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche, jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke, jede Kante die reziproke Polare der gegenüberliegenden Kante* (§ 68, **15**, I).

III. *Jede durch eine Ecke eines Polartetraeders gehende Gerade trifft die Fläche in zwei Punkten, die zu der Ecke und dem Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenebene harmonisch sind.*

III′. *Durch jede in einer Seitenebene des Polartetraeders liegende Gerade gehen zwei Tangentialebenen, die zu der Seitenebene und der Verbindungsebene mit der gegenüberliegenden Ecke harmonisch sind.*

IV. *Auf jeder Transversale von zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind die Treffpunkte mit diesen und die Schnittpunkte mit der Fläche harmonisch.*

IV′. *An jeder Transversale von zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind die Verbindungsebenen mit diesen und die beiden Tangentialebenen der Fläche harmonisch.*

Die Polarebene $\mathfrak{l}_1$ irgend einer der ∞^3 nicht auf der Fläche liegenden Punkte J_1 des Raumes schneidet nach § 68, **9**; § 107, **2**; **3** die Fläche in einem *eigentlichen* Kegelschnitt, und zu diesem gibt es nach § 46, **10**, V ∞^3 Poldreiecke $J_2J_3J_4$, deren Ecken nicht auf dem Kegelschnitt liegen. Aus **8** folgt daher:

V. *Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse hat* ∞^6 *Polartetraeder.*

VI. *Keine Ecke eines Polartetraeders ist ein Punkt der Fläche, keine Kante eine Tangente, keine Seitenebene eine Tangentialebene der Fläche* (§ 68, **9**; **17**).

VII. *Die Gleichungen* (9), (9′) *und* (10), (10′) *der Fläche in Punkt- und Ebenenkoordinaten, in Strahlen- und Achsenkoordinaten nehmen in bezug auf ein Polartetraeder die zusammengehörigen Formen an:*

$$(27)\qquad f = \sum_1^4{}_k b_{kk} y_k^2 = 0, \qquad S^2 F = \sum_1^4{}_k B_{kk} v_k^2 = 0,$$

$$(28)\qquad \varphi = \sum_1^6{}_k \beta_{kk} r_k^2 = 0, \qquad S^4 \Phi = \sum_1^6{}_k \mathrm{B}_{kk} s_k^2 = 0.$$

Da für die eigentliche Fläche nach (22):

$$b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} \neq 0,$$

so folgt mit Rücksicht auf (23) und (24):

VIII. *In allen Gleichungen* (27); (28) *kann keiner der Koeffizienten verschwinden.*

Dies ist zugleich der analytische Ausdruck des Satzes VI. Denn $b_{11} = f_{11} = 0$ würde bedeuten, daß die Ecke J_1 auf der Fläche liegt; $B_{11} = 0$, daß die Ebene l_1 Tangentialebene; $\beta_{11} = 0$ ($\mathrm{B}_{44} = 0$), daß die Kante i_1 (ι_4) Tangente der Fläche ist (I § 59, (21)).

12. Poltetraeder der Kegel. Da beim Kegel nach § 79, 4 die Polarebenen aller Punkte, mit Ausnahme der Spitze, durch die Spitze gehen, fällt der Punkt J_4 in der Konstruktion 9 stets in die Spitze, die ihrerseits zu jedem Punkte des Raumes konjugiert ist, also auch zu den in 9 benutzten Punkten J_1, J_2, J_3. Die Punkte J_1, J_2, J_3 können als ein Poldreieck der Schnittkurve des Kegels mit einer beliebigen nicht durch die Spitze gehenden Ebene gelten. In jeder der ∞^3 derartigen Ebenen gibt es nach § 46, 10, V ∞^3 Poldreiecke, also folgt:

I. *Der Kegel besitzt* ∞^6 *Poltetraeder.*

II. *Die eine Ecke fällt stets in die Spitze, die drei andern bilden ein Poldreieck der Schnittkurve des Kegels mit einer nicht durch die Spitze gehenden Ebene.*

I′. *Der Kegelschnitt besitzt* ∞^6 *Polarebenentetraeder.*

II′. *Die eine Seitenebene fällt in die Ebene der Kurve, die drei andern bilden ein Polarebenendreiflach des von einem Punkte außerhalb dieser Ebene über der Kurve errichteten Berührungskegels.*

Da J_4 auf dem Kegel liegt, verschwindet in (21) $b_{44} = f_{44}$, während b_{11}, b_{22}, b_{33} von 0 verschieden sind, da nicht alle Unterdeterminanten (23) verschwinden dürfen.

III. *Die Gleichung des Kegels* (1) *in bezug auf ein Poltetraeder lautet:*

(29) $f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 = 0.$

III'. *Die Gleichung des Kegelschnittes* (1') *in bezug auf ein Polarebenentetraeder lautet:*

(29') $F = F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 + F_{33} v_3^2 = 0.$

Gleichzeitig mit (29) nehmen die Formen (28) und (27) wegen $b_{44} = 0$ die Gestalt an:

(30) $\varphi = \beta_{11} r_1^2 + \beta_{22} r_2^2 + \beta_{33} r_3^2 = 0, \quad S^2 F = B_{44} v_4^2 = 0.$

In (29) und (30) verschwindet alsdann kein weiterer Koeffizient.

13. Poltetraeder der Ebenenpaare. Beim Ebenenpaar geht (§ 81, **3**) die Polarebene eines außerhalb der Doppellinie liegenden Punktes stets durch die Doppellinie, die demnach auch die Schnittlinie der beiden Ebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ der Konstruktion **9** ist. Die Punkte J_3 und J_4 liegen daher auf der Doppellinie und haben unbestimmte Polarebenen.

Bei dem Ebenenpaar besteht ein Poltetraeder aus irgend zwei Punkten der Achse und zwei harmonischen Polen, die auf einer nicht durch die Achse gehenden Geraden liegen.

Die Gleichung (21) der Fläche in bezug auf ein solches wird:

(31) $$f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0,$$

wobei nach (28) gleichzeitig:

(32) $$\varphi = \beta_{33} r_3^2 = 0.$$

14. Poltetraeder der Doppelebene. *Bei der Doppelebene besteht ein Poltetraeder aus einem beliebigen, ihr nicht angehörigen Punkte* J_1 *und drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten* J_2, J_3, J_4 *der Fläche selbst.* Die Gleichung (21) wird:

(33) $$f = b_{11} y_1^2 = 0.$$

15. Rang und Quadratdarstellung. Mit Rücksicht auf § 139, **1** geht aus (27), (29), (31), (33) hervor:

Der Rang einer Fläche zweiter Ordnung ist die Anzahl der nicht verschwindenden Quadrate in der auf irgend ein Poltetraeder bezogenen Gleichung.[76])

16. Polarsystem in bezug auf ein Polartetraeder. In bezug auf die eigentliche Fläche zweiter Ordnung (27); (28) lauten die *Beziehungen* (11), (11') *zwischen Pol* y_k *und Polarebene* v_k:

(34) $$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = b_{11} y_1 : b_{22} y_2 : b_{33} y_3 : b_{44} y_4;$$

und (12) zwischen zwei reziproken Polaren r_k und s_k':

(35) $$s_1' : s_2' : s_3' : s_4' : s_5' : s_6' = \beta_{11} r_1 : \beta_{22} r_2 : \beta_{33} r_3 : \beta_{44} r_4 : \beta_{55} r_5 : \beta_{66} r_6.$$

Zwischen konjugierten Punkten, Ebenen und Geraden bestehen gleichzeitig nach (13); (14) die Bedingungen:

(36) $$\sum_1^4 {}^k b_{kk} y_k^{(1)} y_k^{(2)} = 0, \qquad \sum_1^4 {}^k B_{kk} v_k^{(1)} v_k^{(2)} = 0,$$

(37) $$\sum_1^6 {}^k \beta_{kk} r_k^{(1)} r_k^{(2)} = 0, \qquad \sum_1^6 {}^k \mathrm{B}_{kk} s_k^{(1)} s_k^{(2)} = 0.$$

In bezug auf die imaginäre Fläche zweiter Ordnung:

(38) $$\sum_1^4 {}^k y_k^2 = 0, \qquad \sum_1^4 {}^k v_k^2 = 0, \qquad \sum_1^6 {}^k r_k^2 = 0$$

geht das Polarsystem (34), (35) über in (§ 46, (24))[85]:

(39) $$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4,$$

(40) $$s_1' : s_2' : s_3' : s_4' : s_5' : s_6' = r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6.$$

§ 150. Besondere Polartetraeder.

1. Polartetraeder mit unendlich ferner Seitenebene. Von drei konjugierten Durchmessern des Ellipsoides oder Hyperboloides ist die Ebene je zweier die Polarebene des unendlich fernen Punktes des dritten (§ 72. **1**, II; **7**, II). Zugleich ist die unendlich ferne Ebene die Polarebene des Mittelpunktes (§ 68, **11**, II). Daher ergibt sich aus § 149, **11**, II:

Für das Ellipsoid und Hyperboloid bilden die Verbindungsebenen dreier konjugierten Durchmesser und die unendlich ferne Ebene ein Polartetraeder (§ 47, **1**).

Dies ist der Grund dafür, daß die Gleichung § 72, (14) die Form § 149, (21) hat. Der Satz § 72, **1**, III ist ein Spezialfall von § 149, **11**, II.

Bei den Paraboloiden ist die unendlich ferne Ebene Tangentialebene (§ 70, **10**). Sie kann somit nach § 149, **11**, VI nicht Seitenebene eines Polartetraeders sein. Daher ist es *unmöglich, die Paraboloide in gemeinen Koordinaten durch eine Gleichung mit nur Quadraten darzustellen* (§ 47, **1**).

Für den *imaginären Kugelkreis* bilden irgend drei rechtwinklige Ebenen (§ 84, **5**, I) zusammen mit der unendlich fernen Ebene ein Polarebenentetraeder im Sinne von § 149, **12**, II′. Daher enthält die Gleichung § 84, (9′) nur die *Quadrate* dreier Ebenenkoordinaten.

2. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polartetraeders. Die Gleichung:

(1) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

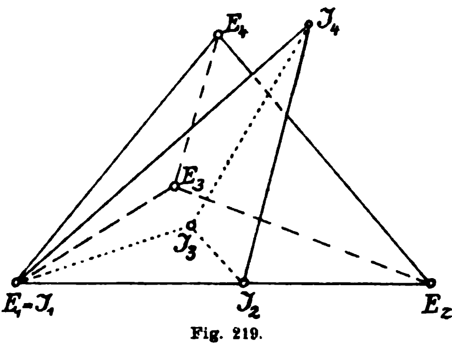


Fig. 219.

einer Fläche zweiter Ordnung bezieht sich auf ein gegebenes Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$. Wir führen ein Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein, *das sich möglichst an $E_1 E_2 E_3 E_4$ anlehnt.* Wir legen zu dem Ende (Fig. 219) *die Ecke* J_1 in die Ecke E_1, also:

(2) $$x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0,$$

wobei wir mit:

(3) $$a_{11} \neq 0$$

voraussetzen, daß die Ecke E_1 nicht auf der Fläche (1) liegt. Die Polarebene $\mathfrak{l}_1$ des Punktes (2) hat nach § 149, (3) die Koordinaten:

(4) $$u_1^{(1)} = f_1^{(1)} = a_{11}, \quad u_2^{(1)} = f_2^{(1)} = a_{21}, \quad u_3^{(1)} = f_3^{(1)} = a_{31}, \quad u_4^{(1)} = f_4^{(1)} = a_{41}$$

und die Gleichung:

(5) $$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 = 0.$$

3. Die zweite Ecke. Wir legen die Ecke J_2 in den Schnittpunkt der Ebene (5) mit der Kante $e_3 = E_1 E_2$ des alten Tetraeders, nämlich:

(6) $$x_1^{(2)} = -a_{12}, \quad x_2^{(2)} = a_{11}, \quad x_3^{(2)} = 0, \quad x_4^{(2)} = 0,$$

der infolge von (3) bestimmt ist. Die Polarebene $\mathfrak{l}_2$ von J_2 hat die Koordinaten:

(7) $$u_1^{(2)} = f_1^{(2)} = 0, \quad u_2^{(2)} = f_2^{(2)} = -a_{21} a_{12} + a_{22} a_{11} = \alpha_{33},$$
$$u_3^{(2)} = f_3^{(2)} = -a_{31} a_{12} + a_{32} a_{11} = -\alpha_{23}, \quad u_4^{(2)} = f_4^{(2)} = -a_{41} a_{12} + a_{42} a_{11} = \alpha_{34}$$

und die Gleichung:

(8) $$\alpha_{33} x_2 - \alpha_{23} x_3 + \alpha_{34} x_4 = 0.$$

Wir setzen mit:

(9) $$\alpha_{33} \neq 0$$

voraus, daß die Ecke (6) nicht auf ihrer Polarebene (8) liegt.

4. Die dritte Ecke. Wir legen die dritte Ecke J_3 in den Schnittpunkt der neuen Kante $\mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{l}_2$ mit der Ebene $E_1 E_2 E_3$ des alten Tetraeders, für den aus (5) (vgl. $f_1^{(3)} = 0$ in (11)) und (8):

(10) $$x_1^{(3)} = \alpha_{13}, \quad x_2^{(3)} = \alpha_{23}, \quad x_3^{(3)} = \alpha_{33}, \quad x_4^{(3)} = 0,$$

und der somit wegen (9) bestimmt ist.

Die Palarebene l_3 dieses Punktes hat die Koordinaten:

$$u_k^{(3)} = f_k^{(3)} = a_{k1}\alpha_{31} + a_{k2}\alpha_{32} + a_{k3}\alpha_{33}.$$

Da aber $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ die Unterdeterminanten der Elemente letzter Zeile in jeder der beiden Determinanten:

$$-A_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sind, so bekommt l_3 die Koordinaten:

(11) $u_1^{(3)} = f_1^{(3)} = 0,\ u_2^{(3)} = f_2^{(3)} = 0,\ u_3^{(3)} = f_3^{(3)} = A_{44},\ u_4^{(3)} = f_4^{(3)} = -A_{34}$

und die Gleichung:

(12) $$A_{44}x_3 - A_{34}x_4 = 0.$$

Wir setzen mit:

(13) $$A_{44} \neq 0$$

voraus, daß der Punkt (10) nicht auf seiner Polarebene (12) liegt.

5. Die vierte Ecke. Die vierte Ecke J_4 ist jetzt der Schnittpunkt der drei Ebenen $\mathsf{l}_1, \mathsf{l}_2, \mathsf{l}_3$. Für diesen folgt aus (12) zunächst:

$$x_3^{(4)} = A_{34}, \quad x_4^{(4)} = A_{44}$$

und dann aus (8):

$$x_2^{(4)} = \frac{\alpha_{23}A_{34} - \alpha_{34}A_{44}}{\alpha_{33}} = \frac{\mathsf{A}_{56}A_{34} - \mathsf{A}_{61}A_{44}}{\mathsf{A}_{66}} \quad \text{(I Anm. 1, III, (11))}.$$

Da aber $\mathsf{A}_{66}, -\mathsf{A}_{65}, \mathsf{A}_{61}$ die Unterdeterminanten der Elemente erster Zeile der Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

sind, sodaß:

$$A_{42}\mathsf{A}_{66} - A_{43}\mathsf{A}_{65} + A_{44}\mathsf{A}_{61} = 0,$$

so wird:

$$x_2^{(4)} = A_{24}.$$

Danach ergibt sich aber aus (5):

$$-a_{11}x_1^{(4)} = a_{21}A_{24} + a_{31}A_{34} + a_{41}A_{44} = -a_{11}A_{14} \quad \text{(I Anm. 1, III, (17))}.$$

Der Punkt J_4 erhält also die Koordinaten:

(14) $$x_1^{(4)} = A_{41},\ x_2^{(4)} = A_{42},\ x_3^{(4)} = A_{43},\ x_4^{(4)} = A_{44},$$

seine Polarebene l_4 aber die Koordinaten:

(15) $$u_1^{(4)} = f_1^{(4)} = 0,\ u_2^{(4)} = f_2^{(4)} = 0,\ u_3^{(4)} = f_3^{(4)} = 0,\ u_4^{(4)} = f_4^{(4)} = A.$$

Sie ist in der Tat die Ebene $J_1J_2J_3$, die mit der Ebene $E_1E_2E_3$ zusammenfällt. Sie ist bestimmt für $A \neq 0$, unbestimmt für $A = 0$,

kann aber auch im letzteren Falle, wo die Ecke J_4 in (14) die Kegelspitze ist (§ 139, (8)), in die Ebene $E_1E_2E_3$ gelegt werden, da jede Ebene Polarebene der Spitze ist. Nach (13) liegt der Punkt J_4 jedenfalls nicht in der Ebene $J_1J_2J_3$.

6. Transformation auf das eingeführte Polartetraeder. Mit den Werten (2), (4); (6), (7); (10), (11); (14), (15) wird nun:

$$(16)\qquad f_{11}=\sum_1^4{}^k f_k^{(1)}x_k^{(1)}=a_{11},\quad f_{22}=\sum_1^4{}^k f_k^{(2)}x_k^{(2)}=a_{11}\,\alpha_{33},$$
$$f_{33}=\sum_1^4{}^k f_k^{(3)}x_k^{(3)}=\alpha_{33}\,A_{44},\quad f_{44}=\sum_1^4{}^k f_k^{(4)}x_k^{(4)}=A_{44}A$$

und folgt nach § 138, (10); (12):

Die auf ein ursprüngliches Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ bezogene Gleichung (1) *geht durch die Substitution* (§ 47, (13)):

$$(17)\qquad \begin{cases} x_1=y_1-a_{12}y_2+\alpha_{13}y_3+A_{14}y_4,\\ x_2=\qquad a_{11}y_2+\alpha_{23}y_3+A_{24}y_4,\\ x_3=\qquad\qquad \alpha_{33}y_3+A_{34}y_4,\\ x_4=\qquad\qquad\qquad A_{44}y_4\end{cases}$$

mit der Substitutionsdeterminante:

$$(18)\qquad S=a_{11}\,\alpha_{33}\,A_{44}$$

über in:

$$(19)\qquad f=a_{11}y_1^2+a_{11}\alpha_{33}y_2^2+\alpha_{33}A_{44}y_3^2+A_{44}Ay_4^2=0.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß:

$$(20)\qquad a_{11}\neq 0,\quad \alpha_{33}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\quad A_{44}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,$$

also die Ecke E_1 kein Punkt, die Kante E_1E_2 keine Tangente und die Seitenebene $E_1E_2E_3$ keine Tangentialebene der Fläche (1) *ist* (§ 149, (10); I § 59, (21)).[114]

Damit ist die *Fläche* auf eines ihrer ∞^6 Polartetraeder $J_1J_2J_3J_4$ transformiert, *das sich tunlichst eng an das alte Tetraeder $E_1E_2E_3E_4$ anlehnt,* indem die Ecke $E_1=J_1$, die Kante $E_1E_2=J_1J_2$ und die Ebene $E_1E_2E_3=J_1J_2J_3$ erhalten geblieben sind (Fig. 219).

7. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polardreiecks der ebenen Schnittkurve. Für die Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene:

$$(21)\qquad \sum_1^4{}^k u_kx_k=0$$

führen wir ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein (Fig. 220), dessen Ecken $J_1 J_2 J_3$ ein in der Ebene (21) gelegenes Polardreieck der Schnittkurve bilden.



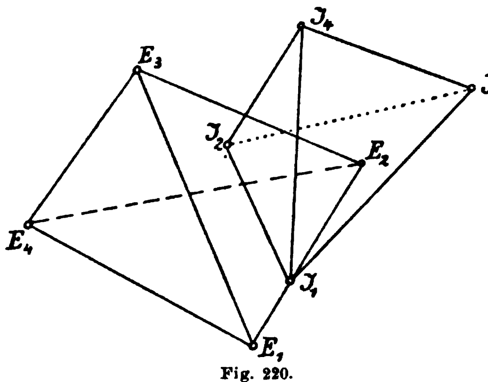


Fig. 220.

Die erste Ecke J_1 sei der Schnittpunkt der Kante $e_3 = E_1 E_2$ ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) des alten Tetraeders mit der Ebene (21) also:

(22) $$x_1^{(1)} = -u_2, \quad x_2^{(1)} = u_1, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0,$$

wobei wir voraussetzen, daß:

(23) u_1 und u_2 nicht beide 0 sind, also die Ebene (21) nicht selbst durch die Kante e_3 geht.

Die Polarebene $\mathfrak{l}_1$ von J_1 hat die Koordinaten:

(24) $$u_k^{(1)} = f_k^{(1)} = -a_{k1} u_2 + a_{k2} u_1, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und die Gleichung (§ 138, (3)):

(25) $$-f_1 u_2 + f_2 u_1 = 0.$$

Zugleich wird (§ 138, (6)):

(26) $$f_{11} = \sum_1^4 {}_k f_k^{(1)} x_k^{(1)} = -(-a_{11} u_2 + a_{12} u_1) u_2 + (-a_{21} u_2 + a_{22} u_1) u_1 = -\alpha_{33}^u.$$

Wir setzen voraus, daß:

(27) $$\alpha_{33}^u \neq 0,$$

also der Punkt J_1 nicht auf f liegt, die Kante e_3 somit keine Transversale der Schnittkurve ist.

Die Ebene $\mathfrak{l}_1$ liegt alsdann nicht mit der Ecke J_1 vereinigt. Die Voraussetzung (23) ist nach (26) in (27) mit eingeschlossen.

8. Die zweite Ecke. Die zweite Ecke J_2 sei jetzt der Schnittpunkt der Ebene $\mathsf{E}_4 = E_1 E_2 E_3 (x_4 = 0)$ des alten Tetraeders mit der Schnittlinie der Ebenen (21) und (25). Er genügt neben $x_4 = 0$ den drei Gleichungen:

(28) $$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \varrho u_2 = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

deren beide ersten die Gleichung (25) unter Einschiebung eines Proportionalitätsfaktors ϱ ersetzen.

Hieraus folgt:

(29) $$x_1 : x_2 : x_3 : \varrho = \alpha_{31}^u : \alpha_{32}^u : \alpha_{33}^u : \alpha_0^u,$$

wo die Ausdrücke rechts die Unterdeterminanten dritten Grades der Matrix (I Anm. 2, III, (14)):

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

bedeuten. Man kann daher setzen:

$$(31)\qquad x_1^{(2)} = \alpha_{31}^u,\ x_2^{(2)} = \alpha_{32}^u,\ x_3^{(2)} = \alpha_{33}^u,\ x_4^{(2)} = 0.$$

Die Polarebene $\mathfrak{l}_2$ von J_2 hat die Koordinaten:

$$(32)\qquad u_k^{(2)} = f_k^{(2)} = a_{k1}\alpha_{31}^u + a_{k2}\alpha_{32}^u + a_{k3}\alpha_{33}^u.$$

Nun sind aber die Unterdeterminanten der Matrix (30) zugleich die Unterdeterminanten der Elemente dritter Zeile der beiden Determinanten:

$$(33)\qquad A_{44}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad -A_{34}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

sodaß:

$$(34)\qquad \begin{cases} a_{k1}\alpha_{31}^u + a_{k2}\alpha_{32}^u + a_{k3}\alpha_{33}^u + u_k\alpha_0{}^u = 0 \text{ für } k = 1, 2; \\ \qquad\qquad = A_{44}^u \text{ für } k = 3; \ = -A_{34}^u \text{ für } k = 4; \\ u_1\alpha_{31}^u + u_2\alpha_{32}^u + u_3\alpha_{33}^u = 0. \end{cases}$$

Infolge dessen werden die Koordinaten (32) der Ebene $\mathfrak{l}_2$:

$$(35)\qquad u_1^{(2)} = f_1^{(2)} = -\alpha_0{}^u u_1, \quad u_2^{(2)} = f_2^{(2)} = -\alpha_0{}^u u_2,$$
$$u_3^{(2)} = f_3^{(2)} = -\alpha_0{}^u u_3 + A_{44}^u, \quad u_4^{(2)} = f_4^{(2)} = -\alpha_0{}^u u_4 - A$$

und ihre Gleichung:

$$(36)\qquad -\alpha_0{}^u(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4) + A_{44}^u x_3 - A_{34}^u x_4 = 0.$$

Sie geht durch J_1. Zugleich wird infolge von (31) und (35):

$$f_{22} = \sum_1^4{}_k f_k^{(2)}x_k^{(2)} = -\alpha_0{}^u(u_1\alpha_{31}^u + u_2\alpha_{32}^u + u_3\alpha_{33}^u) + A_{44}^u\alpha_{33}^u$$

und mit Rücksicht auf (34):

$$(37)\qquad f_{22} = \alpha_{33}^u A_{44}^u.$$

Wir setzen voraus:

$$(38)\qquad A_{44}^u \neq 0,$$

damit J_2 nicht auf f und dann mit $\mathfrak{l}_2$ vereinigt liege.

9. Die dritte Ecke. Nunmehr ist J_3 als Schnittpunkt der Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ und $u_k^{(4)}$ bestimmt, also durch die Gleichungen (25), (36) und (21) oder mit einem Faktor ϱ durch:

$$(39)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 \qquad = 0, \\ \qquad A^u_{44}x_3 - A^u_{44}x_4 = 0. \end{cases}$$

Nun ist für die Determinante A^u (§ 140, (5)):

$$(40)\quad \begin{cases} a_{k1}A^u_{41} + a_{k2}A^u_{42} + a_{k3}A^u_{43} + a_{k4}A^u_{44} + u_kA^u_{45} = 0 \\ \qquad\qquad \text{für } k = 1, 2, 3; \; = A^u \text{ für } k = 4; \\ u_1A^u_{41} + u_2A^u_{42} + u_3A^u_{43} + u_4A^u_{44} \qquad = 0. \end{cases}$$

Daher wird den Gleichungen (39) genügt durch den Punkt:

$$(41)\quad x_1^{(3)} = A^u_{41},\; x_2^{(3)} = A^u_{42},\; x_3^{(3)} = A^u_{43},\; x_4^{(3)} = A^u_{44},\; (\varrho = A^u_{45}).$$

Die Koordinaten seiner Polarebene $\mathfrak{l}_3$ sind:

$$(42)\quad u_k^{(3)} = f_k^{(3)} = a_{k1}A^u_{41} + a_{k2}A^u_{42} + a_{k3}A^u_{43} + a_{k4}A^u_{44},$$

oder nach (40):

$$(43)\quad f_1^{(3)} = -u_1A^u_{45},\quad f_2^{(3)} = -u_2A^u_{45},\quad f_3^{(3)} = -u_3A^u_{45},\quad f_4^{(3)} = -u_4A^u_{45} + A^u.$$

Sie geht durch J_1 und nach (34) durch J_2. Zugleich wird:

$$f_{33} = \sum_1^4 f_k^{(3)}x_k^{(3)} = -A^u_{45}(u_1A^u_{41} + u_2A^u_{42} + u_3A^u_{43} + u_4A^u_{44}) + A^uA^u_{44},$$

oder nach (40):

$$(44)\quad f_{33} = A^u_{44}A^u.$$

Der Punkt J_3 kann, falls $A^u = 0$ ist, auf der Schnittkurve liegen, worauf die Ebene $\mathfrak{l}_3$ in (21) fällt.

10. Resultat der Transformation. Die Ecke J_4 ist nun als Schnittpunkt der drei Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$ bestimmt. Da J_2 auf der Polarebene (25) von J_1, und J_3 auf den Polarebenen (25) und (36) von J_1 und J_2 gewählt ist, bilden J_1, J_2, J_3 ein Polardreieck, in bezug auf das die Gleichung der Schnittkurve die Form § 149, (19) erhält; und zwar ergibt sich mit Rücksicht auf (26), (37) und (44):

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche (1) *mit der Ebene* (21) *kann unter den Voraussetzungen:*

$$(45)\quad \alpha^u_{33} \neq 0,\quad A^u_{44} \neq 0$$

auf die Form gebracht werden (§ 47, (15)):

$$(46)\quad -\alpha^u_{33}y_1^2 + \alpha^u_{33}A^u_{44}y_2^2 + A^u_{44}A^uy_3^2 = 0.$$

Damit ist die *Schnittkurve* auf eines ihrer ∞^3 Polardreiecke $J_1J_2J_3$ transformiert, *welches sich tunlichst an das alte Tetraeder*

$E_1 E_2 E_3 E_4$ *anlehnt,* indem J_1 auf der Kante $E_1 E_2$ und J_2 in der Ebene $E_1 E_2 E_3$ liegt.

Für $A^u = 0$ ist nach (46) die Ecke J_3 ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$) Doppelpunkt der Schnittkurve. Ihre alten Koordinaten (41) stimmen dann in der Tat mit § 141, (32) überein.

11. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polzweiecks des Schnittpunktpaares. Für das Schnittpunktpaar der Fläche (1) mit der Geraden q:

(47) $$\sum_1^4{}^k u_k x_k = 0, \quad \sum_1^4{}^k u_k' x_k = 0,$$

führen wir ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein (Fig. 221), dessen Ecken $J_1 J_2$ ein auf der Geraden q gelegenes Polzweieck des Schnittpunktpaares bilden.

Die erste Ecke J_1 sei der Schnittpunkt der Geraden q mit der Ebene

$$E_1 E_2 E_3 \ (x_4 = 0),$$

also (I § 59, (13')):

(48) $$x_1^{(1)} = q_1, \quad x_2^{(1)} = q_2, \quad x_3^{(1)} = q_3, \quad x_4^{(1)} = 0,$$

Fig. 221.

wobei q_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) die Achsenkoordinaten der Geraden q sind und vorausgesetzt wird, daß:

(49). $$q_1, q_2, q_3 \text{ nicht alle } 0$$

sind, also q_k nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegt.

Die Polarebene des Punktes J_1 hat die Koordinaten:

(50) $$u_k^{(1)} = f_k^{(1)} = a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und die Gleichung:

(51) $$f_1 q_1 + f_2 q_2 + f_3 q_3 = 0.$$

Zugleich wird (§ 146, (5)):

(52) $$f_{11} = \sum_1^4{}^k f_k^{(1)} x_k^{(1)} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} q_k q_l = A_{44}^{uu'}.$$

Wir setzen voraus:

(53) $$A_{44}^{uu'} \neq 0,$$

worin zugleich nach (52) die Voraussetzung (49) eingeschlossen ist. Der Punkt J_1 liegt dann nach (52) nicht auf der Fläche (1).

12. Die zweite Ecke. Die zweite Ecke J_2 des Polzweiecks ist nun der Schnittpunkt der Geraden q mit der Polarebene (51) von J_1. Die Gleichung (51) ist das Resultat der Elimination von ϱ und ϱ' aus den drei Gleichungen (§ 140, (15)):

(54) $$f_k + \varrho u_k + \varrho' u_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Daher bestimmt sich der Punkt J_2 unter Elimination von ϱ und ϱ' aus den fünf Gleichungen:

(55) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u_1' = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u_2' = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u_3' = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \\ u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4 = 0, \end{cases}$$

denen infolge der für die Determinante $A^{uu'}$ (§ 140, (12)) geltenden Entwicklungen genügt wird durch die Werte:

(56) $$x_1^{(2)} = A_{41}^{uu'}, \quad x_2^{(2)} = A_{42}^{uu'}, \quad x_3^{(2)} = A_{43}^{uu'}, \quad x_4^{(2)} = A_{44}^{uu'};$$

(57) $$\varrho = A_{45}^{uu'}, \quad \varrho' = A_{46}^{uu'}.$$

Da gleichzeitig:

(58) $$a_{41}A_{41}^{uu'} + a_{42}A_{42}^{uu'} + a_{43}A_{43}^{uu} + a_{44}A_{44}^{uu'} + u_4 A_{45}^{uu'} + u_4' A_{46}^{uu'} = A^{uu'},$$

so hat die Polarebene des Punktes (56) die Koordinaten:

(59) $$f_k^{(2)} = -(u_k A_{45}^{uu'} + u_k' A_{46}^{uu'}), \quad k = 1, 2, 3;$$
$$f_4^{(2)} = -(u_4 A_{45}^{uu'} + u_4' A_{46}^{uu'}) + A^{uu'}.$$

Danach aber wird mit Rücksicht auf (56) und die beiden letzten Gleichungen (55):

(60) $$f_{22} = \sum_1^4 {}_k f_k^{(2)} x_k^{(2)} = A^{uu'} A_{44}^{uu'}.$$

13. Resultat der Transformation. Da J_2 auf der Polarebene von J_1 liegt, bilden die Punkte $J_1 J_2$ ein Polzweieck, in bezug auf welches das Schnittpunktpaar eine Gleichung von der Form § 149, (18) erhält; und zwar ergibt sich infolge von (52) und (60):

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Fläche (1) *mit der Geraden* (47) *kann unter der Vorraussetzung:*

(61) $$A_{44}^{uu'} \neq 0$$

auf die Form gebracht werden (§ 47, (32)):

(62) $$A_{44}^{uu'} y_1^2 + A_{44}^{uu'} A^{uu'} y_2^2 = 0.$$

Damit ist das *Schnittpunktpaar* auf eines seiner ∞^2 Polzweiecke $J_1 J_2$

transformiert, *welches sich tunlichst an das alte Tetraeder* $E_1E_2E_3E_4$ *anlehnt*, indem J_1 in der Ebene $E_1E_2E_3$ liegt.

Für $A^{uu'}=0$ fällt das Punktpaar in der Ecke $J_2(y_1=0,\ y_2=1)$ zusammen. Ihre alten Koordinaten (56) stimmen dann in der Tat mit § 142, (29) überein.

§ 151. Verschiedene Sätze der Polarentheorie.

1. Beziehung zwischen den Ecken und Seitenebenen zweier Polartetraeder. Transformiert man die auf irgend ein Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ bezogene *eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse*:

$$(1)\qquad f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l a_{kl}x_kx_l=0,\quad F=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l A_{kl}u_ku_l=0$$

auf ein *Polartetraeder mit den Ecken* $x_k^{(m)}$ *und Seitenebenen* $u_k^{(m)}$, so nehmen ihre Gleichungen nach § 149, (21) die Form an:

$$(2)\qquad f=\sum_1^4{}^m b_{mm}y_m^2,\quad S^2F=\sum_1^4{}^m B_{mm}v_m^2$$

und bestehen nach § 138, (32) zwischen alten und neuen Koeffizienten die Beziehungen:

$$(3)\qquad S^2a_{kl}=\sum_1^4{}^m b_{mm}u_k^{(m)}u_l^{(m)},\quad S^2A_{kl}=\sum_1^4{}^m B_{mm}x_k^{(m)}x_l^{(m)}.$$

Für ein *zweites Polartetraeder mit den Ecken* $x_k'^{(m)}$ *und Seitenebenen* $u_k'^{(m)}$ ist ebenso:

$$(4)\qquad S'^2a_{kl}=\sum_1^4{}^m b'_{mm}u_k'^{(m)}u_l'^{(m)},\quad S'^2A_{kl}=\sum_1^4{}^m B'_{mm}x_k'^{(m)}x_l'^{(m)}.$$

Zwischen den Koordinaten der Ecken und Seitenebenen der beiden Polartetraeder bestehen daher die Beziehungen (k, l je $=1,2,3,4$):

$$(5)\qquad S'^2\sum_1^4{}^m b_{mm}u_k^{(m)}u_l^{(m)}=S^2\sum_1^4{}^m b'_{mm}u_k'^{(m)}u_l'^{(m)};$$

$$(6)\qquad S'^2\sum_1^4{}^m B_{mm}x_k^{(m)}x_l^{(m)}=S^2\sum_1^4{}^m B'_{mm}x_k'^{(m)}x_l'^{(m)}.$$

2. Flächen durch die Ecken zweier Polartetraeder. Multipliziert man die Gleichungen (5) mit den Koeffizienten C_{kl} und die Gleichungen (6) mit den Koeffizienten c_{kl} *irgend* einer Fläche zweiter Klasse, bezüglich zweiter Ordnung:

$$(7)\qquad G=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l C_{kl}u_k u_l=0,\quad g=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l c_{kl}x_k x_l=0$$

und summiert alsdann über k und l, so ergibt sich mit Benutzung der Abkürzungen (§ 138, (6)):

$$(8)\qquad G_{mm}=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l C_{kl}u_k^{(m)}u_l^{(m)},\quad g_{mm}=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^l c_{kl}x_k^{(m)}x_l^{(m)},$$

und der entsprechenden mit Akzenten zu G_{mm}, $u_k^{(m)}$, $u_l^{(m)}$; g_{mm}, $x_k^{(m)}$, $x_l^{(m)}$ (§ 48, 2):

$$(9)\qquad S'^2\sum_1^4{}^m b_{mm}G_{mm}=S^2\sum_1^4{}^m b'_{mm}G'_{mm},$$

$$(10)\qquad S'^2\sum_1^4{}^m B_{mm}g_{mm}=S^2\sum_1^4{}^m B'_{mm}g'_{mm}.$$

Die Relation (10) ist linear und homogen in den acht Größen g_{mm}, g'_{mm}, und keiner der acht Koeffizienten S'^2B_{mm} und $S^2B'_{mm}$ kann verschwinden, da f eine eigentliche Fläche sein sollte (§ 149, **11**, VIII). Das Verschwinden von g_{mm} aber bedeutet nach (8), daß die Ecke $x_k^{(m)}$ auf der Fläche $g=0$ in (7) liegt.

Es folgt daher aus (10) und dual aus (9) (§ 48, 2, I):

I. *Jede Fläche zweiter Ordnung, die durch sieben von den Ecken zweier Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung geht, geht auch durch die achte Ecke.*

I'. *Jede Fläche zweiter Klasse, die sieben von den Seitenebenen zweier Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Klasse berührt, berührt auch die achte Seitenfläche.*[124])

3. Einbeschriebene Polartetraeder. Eine Fläche $g=0$ gehe durch die Ecken *eines* Polartetraeders $J_1J_2J_3J_4$ der eigentlichen Fläche $f=0$. Um ein zweites Polartetraeder $J_1'J_2'J_3'J_4'$ von $f=0$ zu konstruieren, kann man nach § 149, 9 im Raume eine Ecke J_1', alsdann in deren Polarebene $\mathfrak{l}_1'$ eine zweite Ecke J_2' und endlich in der Schnittlinie der Polarebenen $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_2'$ eine dritte Ecke J_3' beliebig nehmen, worauf J_4' bestimmt ist. Wählt man nun aber J_1' auf $g=0$, J_2' auf der Schnittkurve der Ebene $\mathfrak{l}_1'$ mit $g=0$ und nimmt als J_3' einen Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{l}_1'\times\mathfrak{l}_2'$ mit $g=0$, so muß, da J_1, J_2, J_3, J_4, J_1', J_2', J_3' auf $g=0$ liegen, nach 2, I auch J_4' auf $g=0$ fallen. Ebenso dual, also:

II. *Gibt es ein Polartetraeder der eigentlichen Fläche zweiter Ord-*

nung $f = 0$, *welches der Fläche zweiter Ordnung* $g = 0$ *ein-(bezüglich um-)beschrieben ist, so gibt es* ∞^3 *solche Polartetraeder* (§ 48, **3**).

4. Polartetraeder mit einer gemeinsamen Ecke. Zwei Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ und $J_1' J_2' J_3' J_4'$ der Fläche (1) mögen die Ecke $J_1' = J_1$, folglich auch die gegenüberliegende Seitenebene $\mathfrak{l}_1' = \mathfrak{l}_1$ gemein haben. Der durch die fünf Kanten $J_1 J_2$, $J_1 J_3$, $J_1 J_4$, $J_1 J_2'$, $J_1 J_3'$ bestimmte Kegel zweiter Ordnung ist eine Fläche zweiter Ordnung, die durch die sieben Ecken $J_1 = J_1'$, J_2, J_3, J_4, J_2', J_3' der beiden Polartetraeder, also nach 2, I auch durch die Ecke J_4' und damit durch die Kante $J_1 J_4'$ geht: Es folgt also mit Hinzufügung des dualen Satzes:

III. *Haben zwei Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse eine Ecke, bezüglich eine Seitenebene gemein,*

so geht jeder Kegel zweiter Ordnung, der durch fünf von der gemeinsamen Ecke ausgehende Kanten geht, auch durch die sechste.

so berührt jeder Kegelschnitt, der fünf in der gemeinsamen Ebene liegende Kanten berührt, auch die sechste.

5. Polardreikante des Kegels. In der gemeinsamen Ebene $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_1'$ bilden die beiden Dreiecke $J_2 J_3 J_4$ und $J_2' J_3' J_4'$ zwei Polardreiecke der Schnittkurve der Ebene mit der Fläche $f = 0$. Für diese Ebene folgt daher (§ 149, **11**, VI; § 143, (2), § 141, (20)):

IV. *Jeder Kegelschnitt g der durch fünf von den Ecken zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegelschnittes f geht, geht auch durch die sechste Ecke.*

IV'. *Jeder Kegel zweiter Klasse g der fünf von den Seitenebenen zweier Polardreiflache eines eigentlichen Kegels zweiter Klasse berührt, berührt auch die sechste.*

Andererseits folgt aber, indem man die Figur des Satzes IV. von einem beliebigen Punkte aus projiziert oder die des Satzes IV'. mit einer beliebigen Ebene schneidet:

V. *Jeder Kegel zweiter Ordnung g, der durch fünf Kanten zweier Polardreikante eines eigentlichen Kegels zweiter Ordnung f geht, geht auch durch die sechste.*

V'. *Jede Kurve zweiter Klasse g, die fünf Seiten eines Polardreiecks eines eigentlichen Kegelschnittes berührt, berührt auch die sechste.*

Die Sätze IV. und V'. sind schon § 48, **2** bewiesen, die Sätze IV'. und V. sind die entsprechenden für den Kegel. Zugleich folgt aus jenen für den Kegel:

VI. *Gibt es ein Polardreikant des eigentlichen Kegels zweiter Ordnung und Klasse f, welches einem Kegel g ein- oder umbeschrieben ist, so gibt es unendlich viele solche.*

6. Zwei Systeme konjugierter Durchmesser. Drei konjugierte Durchmesser eines Ellipsoides oder Hyperboloides sind die Kanten eines Polardreikants des zugehörigen Asymptotenkegels (§ 84, **3**). Daher folgt aus V und IV′:

VII. *Zwei Tripel konjugierter Durchmesser des Ellipsoides oder Hyperboloides stehen in der Beziehung, daß der durch fünf von ihnen bestimmte Kegel zweiter Ordnung auch durch den sechsten geht.*

VII′. *Zwei Tripel konjugierter Diametralebenen des Ellipsoids oder Hyperboloides stehen in der Beziehung, daß der durch fünf von ihnen umhüllte Kegel zweiter Klasse auch die sechste berührt.*

VIII. *Ist einem Kegel ein Tripel konjugierter Durchmesser einbeschrieben, so sind ihm ∞^1 solche Tripel einbeschrieben.*

VIII′. *Ist einem Kegel ein Tripel konjugierter Diametralebenen umbeschrieben, so sind ihm ∞^1 solche Tripel umbeschrieben.*

7. Rechtwinklige Systeme. Drei rechtwinklige Achsen oder Ebenen bilden ein Tripel konjugierter Durchmesser oder Diametralebenen einer Kugel (§ 72, **1**, I)

IX. *Zwei konzentrische Tripel rechtwinkliger Achsen liegen stets auf einem Kegel zweiter Ordnung.*

X. *Enthält ein Kegel ein Tripel rechtwinkliger Achsen, so enthält er ∞^1 solche.*

Der Kegel ist ein *gleichseitiger.*

IX′. *Zwei konzentrische Tripel rechtwinkliger Ebenen umhüllen stets einen Kegel zweiter Klasse.*

X′. *Wird ein Kegel von einem Tripel rechtwinkliger Ebenen berührt, wird er von ∞^1 solchen berührt.*

Der Kegel ist ein *dual gleichseitiger* (§ 71, **10**).

8. Polarreziproke Tetraeder. Die Pole P_k der Koordinatenebenen E_k und die Polarebenen Π_k der Koordinatenecken E_k in bezug auf die Fläche (1) haben nach § 149, (11) die Koordinaten ($k = 1, 2, 3, 4$):

(11) $$x_1^{(k)} : x_2^{(k)} : x_3^{(k)} : x_4^{(k)} = A_{1k} : A_{2k} : A_{3k} : A_{4k};$$

(12) $$u_1^{(k)} : u_2^{(k)} : u_3^{(k)} : u_4^{(k)} = a_{1k} : a_{2k} : a_{3k} : a_{4k}.$$

Sie bilden das dem Koordinatentetraeder E_k, E_k *polarreziproke Tetraeder* P_k, Π_k.[78])

Nun lauten (I § 59, (20′); (20)) die Gleichungen der vier Geraden $E_k P_k$ und der vier Geraden $\mathsf{E}_k \times \Pi_k$:

(3) $$\begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = A_{21} : A_{31} : A_{41}, \\ x_3 : x_1 : x_4 = A_{32} : A_{12} : A_{42}, \\ x_1 : x_2 : x_4 = A_{13} : A_{23} : A_{43}, \\ x_1 : x_2 : x_3 = A_{14} : A_{24} : A_{34}; \end{cases}$$

(3′) $$\begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = a_{21} : a_{31} : a_{41}, \\ u_3 : u_1 : u_4 = a_{32} : a_{12} : a_{42}, \\ u_1 : u_2 : u_4 = a_{13} : a_{23} : a_{43} \\ u_1 : u_2 : u_3 = a_{14} : a_{24} : a_{34}. \end{cases}$$

Nach der Form dieser Gleichungen, in denen $A_{kl} = A_{lk}$, $a_{kl} = a_{lk}$ ist, liegen (I § 62, (1); (7)) die vier Geraden (3), ebenso wie (3'), hyperboloidisch. Also (§ 48, 5)[125]):

I. *Sind zwei Tetraeder in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung polarreziprok, so liegen die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken so wie die vier Schnittlinien entsprechender Seitenebenen jedesmal hyperboloidisch;* und insbesondere (§ 68, 9, III):

II. *Die Verbindungslinien der Ecken eines der Fläche zweiter Ordnung umbeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seitenebenen, sowie die Schnittlinien der Seitenebenen eines der Fläche einbeschriebenen Tetraeders mit den Tangentialebenen in den gegenüberliegenden Eckpunkten liegen hyperboloidisch* (§ 37, **10**).

§ 152. Die Spezies der Flächen zweiter Ordnung und Klasse.

1. Die adjungierten Formen bei der Quadratdarstellung. Da in bezug auf ein Polartetraeder der Fläche zweiter Ordnung § 149, **10** die neuen Koeffizienten der Gleichung $f = 0$ den Bedingungen entsprechen:

(1) $$b_{23} = b_{31} = b_{12} = b_{14} = b_{24} = b_{34} = 0,$$

so wird gleichzeitig für ihre Determinante und Unterdeterminanten:

(2) $$B = b_{11} b_{22} b_{33} b_{44};$$

(3) $$\begin{cases} B_{11} = b_{22} b_{33} b_{44}, \quad B_{22} = b_{11} b_{33} b_{44}, \quad B_{33} = b_{11} b_{22} b_{44}, \quad B_{44} = b_{11} b_{22} b_{33}, \\ B_{23} = B_{31} = B_{12} = B_{14} = B_{24} = B_{34} = 0; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \beta_{11} = b_{22} b_{33}, \ \beta_{22} = b_{33} b_{11}, \ \beta_{33} = b_{11} b_{22}, \ \beta_{44} = b_{11} b_{44}, \ \beta_{55} = b_{22} b_{44}, \ \beta_{66} = b_{33} b_{44}, \\ \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{16} = \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_{25} = \beta_{26} = \beta_{34} = \beta_{35} = \beta_{36} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0. \end{cases}$$

Bei Einführung eines Polartetraeders $J_1 J_2 J_3 J_4$ werden daher die zusammengehörigen Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\Phi = 0$, $F = 0$ (§ 138, (30)) *gleichzeitig in folgender Weise transformiert:*

(5) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = \sum_1^4{}^k b_{kk} y_k^2 = 0,$$

(6) $$\varphi = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l = \sum_1^6{}^k \beta_{kk} r_k^2 = 0,$$

(7) $$S^4 \Phi = S^4 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k q_l = \sum_1^6{}^k \mathsf{B}_{kk} s_k^2 = 0,$$

(8) $$S^2 F = S^2 \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l = \sum_1^4{}^k B_{kk} v_k^2 = 0.$$

2. Beziehung zwischen alten und neuen Koeffizienten. Nach § 138, (23) ist dabei:

(9) $$b_{mm} = f_{mm} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(m)}, \quad B_{mm} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(m)},$$

$$\beta_{mm} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(m)},$$

und nach § 138, (32):

(10) $$S^2 a_{kk} = \sum_1^4{}^m b_{mm} u_k^{(m)2}, \quad S^4 \alpha_{kk} = \sum_1^6{}^m \beta_{mm} q_k^{(m)2},$$

$$S^2 A_{kk} = \sum_1^4{}^m B_{mm} x_k^{(m)2};$$

(11) $$S^2 A = B,$$

wo $u_k^{(m)2}$ das Quadrat von $u_k^{(m)}$ usw. bedeutet.

3. Unterscheidung der eigentlichen Flächen nach dem Vorzeichen von A. Wir setzen die Koeffizienten a_{kl} der Gleichung $f=0$ und die Koeffizienten $x_k^{(m)}$ der Substitution § 138, (10) reell voraus. Dann sind auch die Koeffizienten (9) reell.

Wie nun auch das Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ gewählt werden mag, muß bei einer eigentlichen Fläche f nach (2) und (11) stets sein:

(12) $$b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} = S^2 A.$$

I. *Bei positivem A muß daher die Anzahl der negativen unter den Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}$ gerade, bei negativem A ungerade sein.*

Die Vorzeichen von $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}$ sind also abgesehen von der Reihenfolge für:

(13) $A > 0$: I. $\pm\pm\pm\pm$ oder II. $++--$; $A < 0$: III. $\pm\pm\pm\mp$.

Zwei übereinanderstehende Vorzeichensysteme rechnen wir nur für eines, da die Gleichung $f = 0$ mit -1 multipliziert werden kann.

4. Die drei Spezies der eigentlichen Flächen. Eine gegebene Fläche $f = 0$ muß nach (13), auf welches ihrer ∞^6 Polartetraeder sie auch bezogen wird, immer entweder die Vorzeichen I., II. oder die Vorzeichen III. liefern. Aber auch für $A > 0$ kann sie immer nur entweder auf I. oder II. führen.

Nehmen wir nämlich an, daß schon das alte Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ ein Polartetraeder war, so daß die Fläche von einem bestimmten Polartetraeder auf ein beliebiges anderes $J_1 J_2 J_3 J_4$ transformiert wird, so

gelten die Formeln (9) mit $a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ und geben:

$$b_{mm} = \sum_1^4{}_k a_{kk} x_k^{(m)2}.$$

Waren also alle vier a_{kk} von einerlei Vorzeichen, so sind es auch alle vier b_{mm}, und nach (10) auch umgekehrt. Hat also eine Fläche auch nur für ein Polartetraeder die Vorzeichen I., so muß sie diese für alle Polartetraeder haben. Dieselbe Fläche kann also nicht von I. zu II. oder umgekehrt übergehen.

II. *Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung gehört stets zu einer und nur zu einer der drei „Spezies", die durch die Vorzeichenverbindungen* I., II. *und* III. *in* (13) *gekennzeichnet sind.*[115])

III. *Auch als Fläche zweiter Klasse gehört sie nach* (8) *jedesmal der gleichen Spezies an.*

5. Die definiten Formen. Im Falle I. heißt die Form eine *definite* Form von vier Variabeln, da sie wie ihre Darstellung durch die Koordinaten y_k in (5) zeigt, für alle reellen Werte derselben entweder immer positiv oder immer negativ bleibt. *Die entsprechende Fläche $f = 0$ hat keinen reellen Punkt,* da für einen solchen y_1, y_2, y_3, y_4 niemals alle verschwinden (I § 57, 1) und daher f nicht Null werden kann. Sie hat nach (7) und (8) auch *keine reellen Tangenten oder Tangentialebenen* (§ 49, 3).

6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der definiten Form. Wenn alle vier b_{kk} von einerlei Vorzeichen sind (f definit ist), so sind nach (3) auch alle B_{kk} von einerlei Vorzeichen (F definit) und nach (4) alle β_{kk} positiv (φ positiv definit). Da nun die sechs $q_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) als Elemente einer Reihe der Determinante $S^3 = |q_k^{(m)}|$ und ebenso die vier $u_k^{(m)}$ oder $x_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) als Elemente einer Reihe der Determinante $S^3 = |u_k^{(m)}|$ oder $S = |x_k^{(m)}|$ nicht gleichzeitig verschwinden können (§ 138, (16) und I. Anm. 1, III. (7); (13)), so folgt aus (10):

Ist $f = 0$ eine imaginäre eigentliche Fläche, so sind notwendig alle sechs α_{kk} positiv und alle acht a_{kk} und A_{kk} von einerlei Vorzeichen, und kann keiner dieser vierzehn Hauptkoeffizienten verschwinden, in Formeln:

$$(14)\qquad A > 0; \quad \alpha_{kk} > 0; \quad a_{mm} A_{nn} > 0,$$

$k = 1, \ldots, 6$; $m, n = 1, 2, 3, 4$.

Die Bedingungen (14) sind aber auch hinreichend, da schon drei

von ihnen, wie:

$$(15) \qquad A > 0, \quad \alpha_{33} > 0, \quad a_{11} A_{44} > 0,$$

nach § 150, (19) zur Folge haben, daß die Form f definit ist.

7. Bedingungen der drei Spezies. Aus der Verbindung von (13) und (14) ergibt sich schließlich (§ 49, 4):

Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse gehört zur I. *Spezies:* $\pm\pm\pm\pm$, *wenn:*

$$(14') \qquad A > 0; \quad \alpha_{kk} \text{ alle } > 0; \quad a_{mm} A_{nn} \text{ alle } > 0;$$

zur II. Spezies: $++--$, *wenn:*

$$(16) \qquad A > 0; \quad \alpha_{kk}, \quad a_{mm} A_{nn} \text{ nicht alle } > 0;$$

zur III. Spezies: $\pm\pm\pm\mp$, *wenn:*

$$(17) \qquad A < 0.$$

8. Verhalten gegen ein Polartetraeder. Bezeichnen wir die positiven b_{kk} mit β_k^2, die negativen mit $-\beta_k^2$, so werden die Gleichungen der drei Spezies in bezug auf ein Polartetraeder:

$$(18) \qquad \text{I. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 + \beta_3^2 y_3^2 + \beta_4^2 y_4^2 = 0,$$

$$(19) \qquad \text{II. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 - \beta_3^2 y_3^2 - \beta_4^2 y_4^2 = 0,$$

$$(20) \qquad \text{III. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 + \beta_3^2 y_3^2 - \beta_4^2 y_4^2 = 0.$$

Indem man hier eine oder zwei der Koordinaten y_k Null setzt und die übrig bleibenden Vorzeichen betrachtet, ergibt sich (§ 49, 5)[128]):

I. *Die Flächen der* II. *Spezies schneiden stets alle vier Ebenen eines Polartetraeders in reellen Kegelschnitten, die der* III. *Spezies jedesmal nur drei Ebenen.*

II. *Die Flächen der* II. *Spezies schneiden stets vier, die der* III. *Spezies stets drei Kanten eines Polartetraeders in reellen Punktepaaren.*

Ebenso folgt aus den entsprechenden Gleichungen in Ebenenkoordinaten v_k in (8):

I'. *An die Flächen der* II. *Spezies gehen von allen vier Ecken eines Polartetraeders reelle Berührungskegel, an die Flächen der* III. *Spezies nur von drei Ecken.*

II'. *An die Flächen der* II. *Spezies gehen stets durch vier, an die der* III. *Spezies durch drei Kanten eines Polartetraeders reelle Tangentialebenenpaare.*

Beispiele für diese Sätze bieten die Beziehungen der Hauptachsen und konjugierten Durchmesser, sowie der betreffenden Haupt- und Diametralebenen § 72, **11**. Das *Ellipsoid* und das *zweischalige Hyperboloid* gehören (§ 150, 1) zur III., das *einschalige Hyperboloid* zur II. Spezies.

9. Flächen mit oder ohne reelle Gerade. Auf den Flächen der III. Spezies können keine reellen Geraden liegen, da sie in der Ebene $y_4 = 0$ nach (20) überhaupt keine reellen Punkte haben, während doch jede reelle Gerade diese Ebene auch in einem reellen Punkte schneiden müßte (§ 63, **1**).

Dagegen genügen alle Punkte der durch die beiden Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{cases}(\beta_2 y_2 + \beta_3 y_3) + \lambda(\beta_4 y_4 + \varepsilon\beta_1 y_1) = 0,\\ (\beta_4 y_4 - \varepsilon\beta_1 y_1) + \lambda(\beta_2 y_2 - \beta_3 y_3) = 0,\end{cases}$$

bei beliebigem Parameter λ und mit $\varepsilon = +1$ oder -1, dargestellten geraden Linie der Gleichung (19) (§ 63, (22)).

III. *Der Unterschied der beiden reellen Spezies besteht also darin, daß die Flächen der Spezies* II. *zwei Scharen reeller gerader Linien, die der Spezies* III. *aber keine reellen geraden Linien enthalten.*

Das *elliptische Paraboloid* gehört daher (§ 65, **1**) zur III., das *hyperbolische Paraboloid* zur II. Spezies.

10. Die Arten der Kegelflächen. Die Gleichung des *Kegels* nimmt in bezug auf ein Polartetraeder, dessen Ecke $x_k^{(4)}$ die Spitze des Kegels ist, nach § 149, (29), die Form an:

$$(22)\qquad f = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_i a_{ki} x_k x_i = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 = 0.$$

Die Gleichungen in Ebenen- und Linienkoordinaten § 143, (8); § 144, (13) werden, da $b_{44} = 0$ ist, nach (3); (8) und (4); (6):

$$(23)\qquad B_{44} v_4^2 = 0,$$

$$(24)\qquad \beta_{11} r_1^2 + \beta_{22} r_2^2 + \beta_{33} r_3^2 = 0.$$

Je nachdem in (22) die Vorzeichen der Koeffizienten von der Beschaffenheit:

$$(25)\qquad \text{I. } \pm\pm\pm \quad\text{oder}\quad \text{II. } \pm\pm\mp$$

sind, ist der Kegel ein *imaginärer* oder *reeller*.

Der imaginäre Kegel hat nach (22) außer der Spitze $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ keinen reellen Punkt und nach (24) und (4) außer den Spitzenstrahlen $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ (I § 59, (10)) keine reellen Tangenten. Dagegen hat er, ebenso wie der reelle Kegel, nach (23) alle Spitzenebenen $v_4 = 0$ als Tangentialebenen.

11. Die Diagonalkoeffizienten beim imaginären Kegel. Die Gleichungen (10) lauten mit $b_{44} = 0$:

$$(26)\qquad S^2 a_{kk} = b_{11} u_k^{(1)2} + b_{22} u_k^{(2)2} + b_{33} u_k^{(3)2},$$

$$(27)\qquad S^4 \alpha_{kk} = \beta_{11} q_k^{(1)2} + \beta_{22} q_k^{(2)2} + \beta_{33} q_k^{(3)2},$$

$$(28)\qquad S^2 A_{kk} = B_{44} x_k^{(4)2}.$$

Nimmt man also b_{11}, b_{22}, b_{33} von einerlei Vorzeichen an, so folgt mit Rücksicht auf (3) und (4):

I. *Ist die Fläche f ein imaginärer Kegel, so sind die sechs Koeffizienten* α_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, positiv und die acht Koeffizienten* a_{kk}, A_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, von einerlei Vorzeichen.*

Aus (28) folgt, daß beim Kegel (22) nicht alle vier A_{kk} verschwinden können. In der Tat würden mit $A_{kk} = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, alle $A_{kl} = 0$, $k, l = 1, 2, 3, 4$ (§ 139, (29)) sein ($A_{kl}^2 = A_{kk}A_{ll}$, I Anm. 1, III, (21)). Ist etwa $A_{44} \neq 0$, so ist die Ebene E_4 des ursprünglichen Koordinatentetraeders nach (8) keine Spitzenebene (Tangentialebene). Dann geht auch keine der in ihr liegenden Kanten e_1, e_2, e_3 durch die Spitze und fällt keine der in ihr liegenden Ecken E_1, E_2, E_3 in die Spitze. Daher sind beim *imaginären* Kegel e_1, e_2, e_3 keine Tangenten, so daß nach (6) $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{33} \neq 0$; und E_1, E_2, E_3 keine Punkte des Kegels, so daß nach (5) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. Es sind aber α_{11}, α_{22}, α_{33} die Unterdeterminanten der Diagonalglieder a_{11}, a_{22}, a_{33} in der Determinante A_{44}. So folgt allgemein (I § 63, Fig. 319):

II. *Beim Kegel überhaupt ist wenigstens eine der vier Hauptunterdeterminanten* A_{kk} *von* 0 *verschieden. Beim imaginären Kegel sind notwendig in jeder nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante dritten Grades* A_{kk} *ihre drei Hauptunterdeterminanten zweiten Grades* α_{kk} *und ihre drei Hauptelemente* a_{kk} *von* 0 *verschieden.*

Es handelt sich hier bei A_{11} um α_{11}, α_{55}, α_{66}, a_{22}, a_{33}, a_{44}; bei A_{22} um α_{22}, α_{66}, α_{44}, a_{33}, a_{11}, a_{44}; bei A_{33} um α_{33}, α_{44}, α_{55}, a_{11}, a_{22}, a_{44}; bei A_{44} um α_{11}, α_{22}, α_{33}, a_{11}, a_{22}, a_{33}.

12. Die Kriterien des imaginären und reellen Kegels. Ist nun etwa die Unterdeterminante $A_{44} \neq 0$ und sind ihre Unterdeterminanten α_{11}, α_{22}, α_{33} positiv und ihre Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} von gleichem Vorzeichen wie A_{44}, also unter anderen:

(29) $$\alpha_{33} > 0, \quad a_{11}A_{44} > 0,$$

so kann die Gleichung:

(30) $$f = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, a_{kl}x_k x_l = 0$$

des Kegels nach § 150, (19) auf die Form gebracht werden:

(31) $$f = a_{11}y_1^2 + a_{11}\alpha_{33}y_2^2 + \alpha_{33}A_{44}y_3^2 = 0,$$

wo nach (29) alle Koeffizienten einerlei Vorzeichen haben. Die Bedingungen (29) sind also neben $A = 0$ für den imaginären Kegel

hinreichend. Sie haben aber wegen der Gleichungen:

$$a_{22}a_{33} = a_{23}^2 + \alpha_{11},\ a_{33}a_{11} = a_{31}^2 + \alpha_{22},\ a_{11}a_{22} = a_{12}^2 + \alpha_{33},$$
$$\alpha_{22}\alpha_{33} = \alpha_{23}^2 + a_{11}A_{44},\ \alpha_{33}\alpha_{11} = \alpha_{31}^2 + a_{22}A_{44},\ \alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}^2 + a_{33}A_{44}$$

(§ 19, (21); (5)) immer zur Folge:

$$\alpha_{22} > 0,\ a_{22}A_{44} > 0,\ a_{33}A_{44} > 0,\ \alpha_{11} > 0.$$

Wir sagen daher allgemein:

III. *Die Fläche* (30) *ist ein Kegel, wenn* $A = 0$, *aber nicht alle Hauptunterdeterminanten dritten Grades* A_{kk} *verschwinden.*

IV. *Sind dann alle Unterdeterminanten* α_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, positiv und haben alle Unterdeterminanten* A_{kk} *und alle Elemente* a_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, einerlei Vorzeichen, sind ferner innerhalb jeder nicht verschwindenden Unterdeterminante* A_{kk} *die drei Unterdeterminanten* α_{kk} *und die drei Elemente* a_{kk} *von* 0 *verschieden, so ist der Kegel imaginär.*

V. *Sind diese Bedingungen nicht alle erfüllt, so ist der Kegel reell.*

13. Die Ebenenpaare. Die Gleichung des Ebenenpaares lautet nach § 149, (31) in bezug auf ein Polartetraeder:

(32) $$f = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2.$$

Mit $b_{33} = 0$, $b_{44} = 0$ verschwinden nach (3) alle B_{kl} und nach (4) alle β_{kl} bis auf:

(33) $$\beta_{33} = b_{11}b_{22}.$$

Die Gleichung in Linienkoordinaten § 144, (18) wird daher:

(34) $$S = b_{11}b_{22}r_3^2 = 0.$$

Je nachdem b_{11} und b_{22} gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist das *Ebenenpaar* (32) *imaginär oder reell.*

Das Ebenenpaar überhaupt hat nach (34) keine andern Tangenten als die Transversalen $r_3 = 0$ der Achse $i_6 = J_3J_4$ (I § 60, (11)); das imaginäre nach (32) keine andern reellen Punkte als die Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ der Achse.

Die Formeln (10) werden:

(35) $$S^2a_{kk} = b_{11}u_k^{(1)2} + b_{22}u_k^{(2)2},\quad S^4\alpha_{kk} = \beta_{33}q_k^{(3)2}.$$

Für das imaginäre Ebenenpaar sind daher notwendig alle a_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, von einerlei Vorzeichen und alle α_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, positiv. Für das reelle Ebenenpaar sind alle α_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, negativ. Da nicht alle sechs $q_k^{(3)}$ verschwinden, können nach (35) auch nicht alle α_{kk} Null sein oder nicht alle sechs Kanten des Koordinatentetraeders Tangenten sein.

In der Tat würden sonst überhaupt alle α_{kl} (§ 139, (29)) verschwinden ($\alpha_{kl}^2 = \alpha_{kk}\alpha_{ll}$, I Anm. 1, III, (22)).

I. *Das Ebenenpaar* (30), *für das* $A = 0$, *alle* $A_{kk} = 0$, *aber nicht alle* $\alpha_{kk} = 0$, *ist imaginär oder reell, je nachdem die nicht verschwindenden Hauptunterdeterminanten zweiten Grades* α_{kk} *sämtlich positiv oder sämtlich negativ sind.*

Bei der *Doppelebene* dürfen alsdann nach (10) nicht alle a_{kk} verschwinden. In der Tat würden sonst überhaupt alle a_{kl} (§ 139, (29)) verschwinden ($a_{kl}^2 = a_{kk}a_{ll}$, I Anm. 1, III, (23)).

14. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach Rang und Spezies. Unter Benutzung der § 49, (17) eingeführten Bezeichnung erhalten wir schließlich folgende Einteilung der Flächen zweiter Ordnung:

(36)
$$A \neq 0 \begin{cases} A > 0,\ \alpha_{kk} > 0!,\ a_{kk}A_{ll} > 0!: & \text{I. Imag. eigentl. Flächen,} \\ A > 0,\ \alpha_{kk},\ a_{kk}A_{ll} \not> 0!: & \text{II. Geradlinige eigentl. Fl.,} \\ A < 0: & \text{III. Nichtgeradl. eigentl. Fl.;} \end{cases}$$
$$\begin{matrix} A = 0, \\ A_{kk} \neq 0! \end{matrix} \begin{cases} A_{44} \neq 0:\ \alpha_{mm} > 0!,\ a_{mm}A_{44} > 0!: & \text{IV. Imag. eigentl. Kegel,} \\ A_{44} \neq 0:\ \alpha_{mm},\ a_{mm}A_{44} \not> 0!: & \text{V. Reeller eigentl. Kegel;} \end{cases}$$
$$\begin{matrix} A = 0,\ A_{kk} = 0! \\ \alpha_{kk} \neq 0! \end{matrix} \begin{cases} \alpha_{kk}\ (\text{soweit} \neq 0) > 0!: & \text{VI. Imag. Ebenenpaar,} \\ \alpha_{kk}\ (\text{soweit} \neq 0) < 0!: & \text{VII. Reelles Ebenenpaar;} \end{cases}$$
$$A = 0,\ A_{kk} = 0!,\ \alpha_{kk} = 0!,\ a_{kk} \neq 0!: \quad \text{VIII. Doppelebene.}$$

Die Indizes k gehen bei α_{kk} von 1 bis 6, die Indizes k und l bei a_{kk}, A_{ll} von 1 bis 4. Bei IV und V ist beispielsweise A_{44} als das von Null verschiedene A_{kk} genommen (12, IV) und geht m nur von 1 bis 3.

§ 153. Die Spezies der ebenen Schnitte.

1. Die zusammengehörigen Quadratdarstellungen. Bei Einführung eines *Polardreieckes* $J_1J_2J_3$ in der schneidenden Ebene wird für § 141, (7) infolge der Bedingungen (§ 149, 7):

(1) $$b_{23} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{12} = 0$$

zunächst:

(2) $$\beta_{11} = b_{22}b_{33},\ \beta_{22} = b_{33}b_{11},\ \beta_{33} = b_{11}b_{22};\ \beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{12} = 0;$$

(3) $$B_{44} = b_{11}b_{22}b_{33},$$

und ferner nach § 141, (17); (19):

(4) $$-A^u = B_{44} = b_{11}b_{22}b_{33},$$

(5) $$-A_{kk}^u = \beta_{11}x_k^{(1)2} + \beta_{22}x_k^{(2)2} + \beta_{33}x_k^{(3)2},$$

(6) $$-S^2\alpha_{kk}^u = b_{11}q_k^{(4)2} + b_{22}q_k^{(5)2} + b_{33}q_k^{(6)2}.$$

Danach wird *die Gleichung der Schnittkurve* § 141, (1); (2) *in Punktkoordinaten:*

(7) $$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0, \quad y_4 = 0$$

und werden *die Gleichungen in Ebenen- und Strahlenkoordinaten* nach § 148, (3); (11); § 140, (23); (38) und § 141, (15); (16):

(8) $$-\sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l A^u_{kl} u_k' u_l' = \beta_{11} v_1'^2 + \beta_{22} v_2'^2 + \beta_{33} v_3'^2 = 0,$$

(9) $$-\sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \alpha^u_{kl} p_k' p_l' = S^2(b_{11} r_4'^2 + b_{22} r_5'^2 + b_{33} r_6'^2) = 0.$$

Die Gleichung (8) stellt in ihrer zweiten Form (nach I § 57, **16**, rechts) die Schnittkurve sowohl in laufenden Tetraederkoordinaten v_1', v_2', v_3', v_4' der Ebene im Raume, als auch in laufenden Dreieckskoordinaten v_1', v_2', v_3' des Strahles in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ dar; ebenso stellt die Gleichung (9) (I § 59, **9**; **10**, rechts) die Schnittkurve sowohl in laufenden Tetraederkoordinaten r_1', r_2', r_3', r_4', r_5', r_6' des Strahles im Raume, als auch in laufenden Dreieckskoordinaten r_4', r_5', r_6' des Punktes in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ übereinstimmend mit (7), zugleich aber den aus J_4 über der Schnittkurve errichteten Kegel in laufenden Dreiflachskoordinaten r_4', r_5', r_6' (= s_1', s_2', s_3') des Strahles im Bündel dar (Fig. 222).

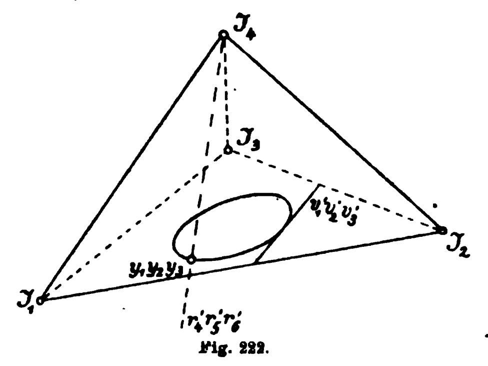


Fig. 222.

2. Die Spezies der eigentlichen Schnittkurven. Ist nun zuerst $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{33} \neq 0$, also nach (4):

(10) $$-A^u \neq 0,$$

so ist die Kurve (7) ein *eigentlicher* Kegelschnitt (§ 141, (20)). Dieser aber ist *imaginär* oder *reell*, je nachdem die Vorzeichen der Koeffizienten b_{11}, b_{22}, b_{33} sind:[115])

(11) I. $\pm\pm\pm$ oder II. $\pm\pm\mp$.

3. Notwendige Bedingungen der imaginären eigentlichen Schnittkurve. Bei gleichen Vorzeichen von b_{11}, b_{22}, b_{33} sind nach (2) β_{11}, β_{22}, β_{33} alle drei positiv, so daß aus (4), (5), (6) folgt:

I. *Ist die Schnittkurve ein imaginärer eigentlicher Kegelschnitt, so*

sind die Unterdeterminanten A^u_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, negativ und haben die Unterdeterminanten α^u_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen wie die Determinante A^u.

Die Kurve hat nach (8) außer ihrer eigenen Ebene $E_0(v_1', v_2', v_3', v_4' = 0, 0, 0, 1)$ keine reellen Tangentialebenen und nach (9) außer den in E_0 liegenden Geraden $e_0 (r_4', r_5', r_6' = 0, 0, 0)$ keine reellen Treffgeraden.

4. Das Verschwinden der Hauptunterdeterminanten bei imaginärer Schnittkurve. Wenn A^u_{kk} verschwindet, ist nach (8) die Ebene $E_k(E_1 : u_1', u_2', u_3', u_4' = 1, 0, 0, 0; \ldots)$ Tangentialebene der Schnittkurve; wenn α^u_{kk} verschwindet, ist nach (9) die Kante $e_k (e_1 : p_1', p_2', p_3', p_4', p_5', p_6' = 1, 0, 0, 0, 0, 0; \ldots)$ Treffgerade der Schnittkurve.

Da nun die imaginäre Schnittkurve nur eine reelle Tangentialebene E_0 und außer den in ihr liegenden Strahlen e_0 keine reellen Treffgeraden hat, so können für sie höchstens ein A^u_{kk} und höchstens drei α^u_{kk} verschwinden. Dies folgt auch aus (5) und (6). Denn bei positiven $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ kann A^u_{kk} nur dadurch 0 werden, daß $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ alle drei 0 sind. Dies ist aber für zwei von den Werten $k = 1, 2, 3, 4$ nicht möglich, ohne daß $S = | x_k^{(i)} |$ in § 138, (16) verschwindet. Aus demselben Grunde können von den α^u_{kk} in (6) nicht vier verschwinden, ohne daß $S^3 = | q_k^{(i)} |$ (§ 152, 6) verschwindet.

Eine reelle Ebene, die nicht die Tangentialebene E_0 ist, enthält nur eine reelle Treffgerade, ihre Schnittlinie mit der Ebene E_0. Verschwindet daher etwa A^u_{44} nicht, so daß die Koordinatenebene E_4 keine Tangentialebene ist, so kann von den in ihr liegenden Kanten e_1, e_2, e_3 höchstens eine in E_0 liegen, also Treffgerade sein. Daher kann auch höchstens eine von den drei Unterdeterminanten $\alpha^u_{11}, \alpha^u_{22}, \alpha^u_{33}$ verschwinden.

II. *Ist die Schnittkurve ein imaginärer eigentlicher Kegelschnitt, so verschwindet von den vier Hauptunterdeterminanten A^u_{kk} höchstens eine und in jeder nicht verschwindenden Unterdeterminante A^u_{kk} von ihren Hauptunterdeterminanten α^u_{kk} höchstens eine.*

5. Die Unterscheidung der Spezies. Ist nun A^u_{44} eine nicht verschwindende unter den A^u_{kk} und α^u_{33} eine darin enthaltene nicht verschwindende Unterdeterminante und ist:

(12) $$A^u_{44} < 0, \quad A^u \alpha^u_{33} > 0,$$

so kann die Schnittkurve nach § 150, (46) in der Form:

(13) $$-\alpha^u_{33} y_1^2 + \alpha^u_{33} A^u_{44} y_2^2 + A^u_{44} A^u y_3^2 = 0$$

dargestellt werden und ist somit imaginär. Die Bedingungen (12)

sind also für diese *hinreichend.* Die notwendigen Bedingungen 3, I und 4, II sind also auf jeden Fall hinreichend.

III. *Sind neben* (10) *die Unterdeterminanten* A^u_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, negativ und haben die Unterdeterminanten* α^u_{kk}, *soweit sie nicht verschwinden, das Vorzeichen von* A^u; *sind ferner wenigstens drei Unterdeterminanten* A^u_{kk} *von* 0 *verschieden und innerhalb jeder solchen wenigstens zwei Unterdeterminanten* α^u_{kk} *von* 0 *verschieden, so ist die Schnittkurve ein imaginärer eigentlicher Kegelschnitt.*

IV. *Sind neben* (10) *diese Bedingungen nicht alle erfüllt, ist die Schnittkurve ein reeller eigentlicher Kegelschnitt.*

6. Spezies der Linienpaare. Ist nunmehr in der Gleichung (7) $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{33} = 0$, so daß sie auf:

(14) $$b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0$$

zurückkommt, so wird zugleich nach (2); (4)—(6):

(15) $$\beta_{33} = b_{11} b_{22} \neq 0;$$

(16) $$A^u = 0, \quad -A^u_{kk} = \beta_{33} x_k^{(3)2}, \quad -S^2 \alpha^u_{kk} = b_{11} q_k^{(4)2} + b_{22} q_k^{(5)2}.$$

Die Gleichungen der Schnittkurve in Ebenen- und Strahlenkoordinaten werden dabei:

(17) $$-\sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A^u_{kl} u_k' u_l' = \beta_{33} v_3'^2 = 0;$$

(18) $$-\sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha^u_{kl} p_k' p_l' = S^2 (b_{11} r_4'^2 + b_{22} r_5'^2) = 0.$$

Das Linienpaar (14) ist imaginär oder reell, je nachdem $\beta_{33} > 0$ oder < 0. Nach (16) ist aber, da $x_k^{(3)}$ nicht für jedes $k = 1, 2, 3, 4$ verschwinden kann, wenigstens ein A^u_{kk} nicht 0 (§ 141, (21)) und sind alle nicht verschwindenden A^u_{kk} von entgegengesetztem Vorzeichen wie β_{33}. Daher folgt:

V. *Die Schnittkurve ist ein Linienpaar, wenn* $A^u = 0$, *aber nicht alle* A^u_{kk} *verschwinden. Das Linienpaar ist imaginär oder reell, je nachdem die nicht verschwindenden Unterdeterminanten* A^u_{kk} *negativ oder positiv sind.*

Ist auch noch $b_{22} = 0$, also die Schnittkurve (14) eine *Doppellinie*, so verschwinden nach (16) *alle* A^u_{kk}, aber *nicht alle* α^u_{kk}.

7. Ausschluß reeller Schnittkurven bei imaginären Flächen. Nach § 141, 7—11 ist der *Rang der Schnittkurve* in gewissem Umfange von dem der *Fläche* abhängig. Gleiches gilt auch in bezug auf die *Spezies.*

Ist eine eigentliche Fläche, ein Kegel oder ein Ebenenpaar imaginär, so können als Schnittkurven keine reellen eigentlichen Kegelschnitte und keine reellen Linienpaare vorkommen (α).

In der Tat sind für die genannten Flächen nach § 152, (10) in jedem Koordinatentetraeder alle α_{kk}, soweit sie nicht verschwinden, positiv. Es müssen also auch in dem für die Schnittkurve eingeführten Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ die alsdann mit β_{mm} bezeichneten Größen (§ 141, (9)) positiv sein, was bei reellen Kurven (7) und (14) nach (2) und (15) nicht der Fall ist.

8. Ausschluß imaginärer Kegelschnitte und Linienpaare. Da die eigentlichen Linienflächen und reellen Kegel unendlich viele reelle gerade Linien haben, die nicht in einer Ebene liegen, so muß jede Ebene des Raumes reelle Punkte der Fläche enthalten.

II. *Daher können bei den eigentlichen Linienflächen und den reellen*

(21)

		$A \neq 0$ Eigentliche Flächen 2. O.		
		$A > 0,\ A_{kk} a_{ll} > 0!$ $\alpha_{kk} > 0!$ I. Imag. Flächen	$A > 0,\ A_{kk} a_{ll},$ $\alpha_{kk} \not> 0!$ II. Geradlinige Fl.	$A < 0$ III. Nichtgeradl. Fl.
$A^u \neq 0$ Eigentl. Kurven 2. O.	$-A^u_{kk},\ A^u \alpha^u_{kk},$ falls $\neq 0,\ \not> 0!$ 1. Imag. eigentl. Kurven	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$	(β)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$
	$-A^u_{kk},\ A^u \alpha^u_{kk},$ falls $\neq 0,\ \not> 0!$ 2. Reelle eigentl. Kurven	(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_3 = 0$
$A^u = 0,$ $A^u_{kk} \neq 0!$ Getrennte Linienpaare	$-A^u_{kk},$ falls $\neq 0,\ > 0!$ 3. Imag. Linienpaare	(γ)	(γ)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_2 - y_4 = 0$
	$-A^u_{kk},$ falls $\neq 0,\ < 0!$ 4. Reelle Linienpaare	(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_2 - y_4 = 0$	(γ)
$A^u = 0,\ A^u_{kk} = 0!\ \alpha^u_{kk} \neq 0!$ 5. Doppellinien		0	0	0
$A^u = 0,\ A^u_{kk} = 0!\ \alpha^u_{kk} = 0!$ 6. Unbestimmt		0	0	0

Kegeln keine eigentlichen imaginären Kegelschnitte als Schnittkurven vorkommen (β).

Das reelle Ebenenpaar wird von jeder Ebene entweder in einem reellen Linienpaar oder einer Doppellinie oder unbestimmt geschnitten.

III. *Daher können bei dem reellen Ebenenpaar keine imaginären Linienpaare als Schnittkurven vorkommen* (β).

In der Tat ist bei dem Ebenenpaar nach § 139, (21):

(19) $$S^4 \alpha_{kl} = \beta_{33} q_k^0 q_l^0$$

und daher, wie § 143, (14):

(20) $$-S^4 A_{11}^u = \beta_{33}(q_6^0 u_2 - q_5^0 u_3 + q_1^0 u_4)^2, \ldots,$$

also A_{kk}^u von entgegengesetztem Vorzeichen wie β_{33} und β_{33} von gleichem wie α_{kk}. Je nachdem daher die α_{kk} positiv oder negativ sind (§ 152, **13**, I), sind in **6**, V die A_{kk}^u negativ oder positiv.

$A = 0$, $A_{kk} \neq 0$! Kegel		$A = 0$, $A_{kk} = 0$!, $\alpha_{kk} \neq 0$! Ebenenpaare		$A = 0$, $A_{kk} = 0$! $\alpha_{kk} = 0$! $a_{kk} \neq 0$!
$A_{kk} a_{ll}$, α_{kk}, falls $\neq 0$, > 0! IV. Imag. Kegel	$A_{kk} a_{ll}$, α_{kk}, falls $\neq 0$, $\not> 0$! V. Reelle Kegel	α_{kk}, falls $\neq 0$, > 0! VI Imag. Eb.-P.	α_{kk}, falls $\neq 0$, < 0! VII. Reelle Eb.-P.	VIII. Doppl.-Eb.
$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	(β)	0	0	0
(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	0	0	0
$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	(β)	0
(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_2 = 0$	(α)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	0
(δ)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_2 - y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_2 = 0$
0	0	(δ)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_1 - y_2 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_1 = 0$

9. Ausschluß imaginärer oder reeller Linienpaare bei eigentlichen Flächen. Da für $A^u = 0$ die fünf Unterdeterminanten A^u_{11}, A^u_{22}, A^u_{33}, A^u_{44}, A nach § 141 (38) dasselbe Vorzeichen haben, so *können bei den beiden Spezies $A > 0$ der eigentlichen Flächen keine imaginären Linienpaare* ($A^u_{kk} < 0$) *und bei der Spezies $A < 0$ keine rellen Linienpaare* ($A^u_{kk} > 0$) *vorkommen* (γ).

10. Ausschluß von Doppellinien. Da der *imaginäre Kegel* nur einen reellen Punkt und das *imaginäre Ebenenpaar* nur eine reelle Gerade hat, können *dort keine reellen Doppellinien* und *hier keine unbestimmten Kurven* (ganze Ebene) als Schnittkurven vorkommen (δ).

11. Übersicht der möglichen Schnittkurven. Danach bleiben für die Spezies der Schnittkurve bei gegebener Spezies der Fläche von vornherein diejenigen Kombinationen ausgeschlossen, die in der vorstehenden Tabelle[182]) entsprechend § 141, **7—11** mit 0 oder den vorstehenden Sätzen **7—10** entsprechend mit (α), (β), (γ), (δ) bezeichnet sind.

Daß die alsdann noch *möglichen* Kombinationen der Tabelle auch *wirklich* vorkommen, zeigen die eingetragenen Beispiele, die in der ersten Zeile die Gleichung einer Fläche von der Spezies der betreffenden Kolonne angeben, und in der zweiten Zeile die Gleichung einer Ebene, welche mit der Fläche eine Schnittkurve von der Spezies der betreffenden Zeile liefert. Die Gleichungen: $(y_1 - y_3)(y_1 + y_3) = 0$, $y_2 - y_4 = 0$ stellen dabei ersichtlich stets ein reelles, die Gleichungen $(y_1 - iy_3)(y_1 + iy_3) = 0$, $y_2 - y_4 = 0$ ein imaginäres Linienpaar, die Gleichungen $y_1^2 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$ eine Doppellinie dar.

Die Abkürzungen:

$$(22) \qquad \alpha_{kk} > 0! \quad \alpha_{kk} \not> 0! \ldots$$

bedeuten: „*alle* $\alpha_{kk} > 0$“, „*nicht alle* $\alpha_{kk} > 0$“, ...; „falls $\neq 0$“ steht der Kürze wegen für „soweit sie nicht 0 sind“. Die Bedingungen der Kolonnen IV und V und der Zeilen 1 und 2 sind abgekürzt angegeben und im Sinne von § 152, **12**, IV, V und § 153, **5**, III, IV zu ergänzen.

Die Tabelle (21) gibt die Bedingungen der Spezies der Fläche und ihrer ebenen Schnitte in aufgelöster Form an, während sie in § 155, (41) und § 156, (38) noch einmal in geschlossener Form erscheinen werden.

§ 154. Die Spezies der Schnittpunktpaare.

1. Die Quadratdarstellung. Bei Einführung eines Polzweiecks $J_1 J_2$ auf der schneidenden Geraden wird infolge der Bedingung:

(1) $$b_{12} = f_{12} = 0$$

die Gleichung § 142, (7) des *Schnittpunktpaares* der Fläche f mit der Geraden $u_k \times u_k'$ in Punktkoordinaten:

(2) $$b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0 .$$

Zugleich wird nach § 142, (8):

(3) $$\beta_{33} = b_{11} b_{22}$$

und nach § 142, (14); (16):

(4) $$A^{uu'} = S^2 b_{11} b_{22} ,$$

(5) $$A_{kk}^{uu'} = S^2 (b_{22} x_k^{(1)2} + b_{11} x_k^{(2)2}), \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

endlich nach § 148, (13), § 140, (43) und § 142, (13) die Gleichung des Schnittpunktpaares in laufenden Ebenenkoordinaten:

(6) $$\sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l A_{kl}^{uu'} u_k'' u_l'' = S^2 (b_{22} v_1''^2 + b_{11} v_2''^2),$$

übereinstimmend mit (2) (I § 58, (5')).

2. Unterscheidung der Spezies. Aus (4) ergibt sich sofort: *Das Schnittpunktpaar der Fläche zweiter Ordnung:*

(7) $$f = \sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

mit der Schnittlinie der beiden Ebenen u_k und u_k' ist ein imaginäres oder reelles eigentliches Punktepaar, je nachdem[115]*):*

(8) $$A^{uu'} > 0 \quad \textit{oder} \quad A^{uu'} < 0 .$$

Bei dem *imaginären* eigentlichen Punktepaar sind nach (5) *die Unterdeterminanten $A_{kk}^{uu'}$,* soweit sie nicht verschwinden, *von einerlei Vorzeichen;* verschwinden können dann nach (5) höchstens zwei von ihnen. Denn beständen die Gleichungen $x_k^{(1)} = 0$, $x_k^{(2)} = 0$ für drei Werte von k, so würde die Substitutionsdeterminante $S = x_k^{(i)}$ verschwinden. Ist etwa $A_{44}^{uu'} \neq 0$, so kann die Gleichung § 150, (62) hergestellt werden.

Das Schnittpunktpaar (2) ist ein *Doppelpunkt,* wenn $b_{11} \neq 0$, $b_{22} = 0$, also nach (4) und (5):

(9) $$A^{uu'} = 0, \quad A_{kk}^{uu'} \text{ nicht alle } 0,$$

und ist *unbestimmt*, wenn mit $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$:

(10) $$A^{uu'} = 0, \quad A_{kk}^{uu'} \text{ alle } 0.$$

Im letzteren Falle gehört die Schnittlinie $u_k \times u_k'$ der Fläche ganz an, ist eine Erzeugende.

3. Ausschluß bestimmter Spezies des Schnittpunktepaares bei gegebener Spezies der Fläche. Da die imaginäre eigentliche Fläche keinen, der imaginäre Kegel nur einen reellen Punkt besitzt (§ 152, **5**; **10**), sind bei diesem getrennte reelle Punktepaare und reelle Erzeugende, bei jener außerdem Doppelpunkte ausgeschlossen.

Da das imaginäre Ebenenpaar nur eine reelle Gerade enthält, sind getrennte reelle Punktepaare unmöglich.

Da das reelle Ebenenpaar von jeder Geraden reell geschnitten wird, sind imaginäre Punktepaare ausgeschlossen.

Endlich haben die Flächen der III. Spezies nach § 152, **9** keine reellen Erzeugenden.

Man könnte danach eine entsprechende Tabelle wie § 153, (21) aufstellen.

4. Duale Sätze. Entsprechend dem Satze **2** gilt auch der duale Satz:

Das Tangentialebenenpaar der Fläche zweiter Klasse:

(7') $$F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l \alpha_{kl}' u_k u_l = 0$$

durch die Verbindungslinie der beiden Punkte x_k und x_k' ist ein imaginäres oder reelles eigentliches Ebenenpaar, je nachdem:

(8') $$A'^{xx'} > 0 \quad \textit{oder} \quad A'^{xx'} < 0.$$

Dabei ist $A'^{xx'}$ die mit den Koordinaten der Punkte x_k, x_k' geränderte Determinante der a_{kl}' (§ 140, (12)).

5. Andere Formen der Bedingung. Sind p_k und $q_k = \sigma p_{\bar{k}}$ die Strahlen- und Achsenkoordinaten der Schnittlinie $u_k \times u_k'$ und $p_k' = \tau q_{\bar{k}}'$ und q_k' diejenigen der Verbindungslinie $x_k x_k'$, so ist nach § 140, (20) und (17), und dual:

(11) $$A^{uu'} = \sigma^2 \varphi = \sigma^2 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l,$$

(11') $$A'^{xx'} = \tau^2 \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl}' q_k' q_l',$$

(12) $$A A^{uu'} = \Phi = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k q_l,$$

(12') $$A' A'^{xx'} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}'_{kl} p'_k p'_l.$$

Damit treten in die Bedingungen (8) und (8') die Strahlen- und Achsenkoordinaten der Geraden $u_k \times u_k'$ und $x_k x_k'$ ein.

6. Die eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Indem wir die Flächen (7) und (7') als eigentliche voraussetzen, betrachten wir gleichzeitig beide als identisch, so daß (I Anm. 1, III, (4); (12); (8); (7)).

(13) $a'_{kl} = A_{kl}$; $\alpha'_{kl} = \mathsf{A}_{kl}$, $A'_{kl} = A^2 a_{kl}$, $\mathsf{A}'_{kl} = A^4 \alpha_{kl}$, $A' = A^3$.

Wir nehmen ferner auch die Geraden $u_k \times u_k'$ und $x_k x_k'$ als identisch an, so daß:

(14) $$p_k' = p_k, \quad q_k' = q_k, \quad \tau = \frac{1}{\sigma}.$$

Dann wird aus (11') und (12'):

$$A'^{xx'} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \mathsf{A}_{kl} q_k q_l = \frac{\Phi}{\sigma^2}, \quad A'^{xx'} = A \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k p_l = A\varphi$$

(§ 138, (27)) und daher nach (11) oder (12):

(15) $$\sigma^2 A'^{xx'} = A A^{uu'}$$

oder ausführlicher geschrieben [119]):

(16) $$\sigma^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 & x_1' \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 & x_2' \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 & x_3' \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 & x_4' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & 0 & 0 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sind (7) *und* (7') *die Gleichungen einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung in Punkt- und Ebenenkoordinaten* ($a'_{kl} = A_{kl}$) *und sind* x_k, x_k' *zwei Punkte und* u_k, u_k' *zwei Ebenen derselben geraden Linie* p_k, $q_k = \sigma p_{\bar{k}}$, *so bestehen die Gleichungen* (15); (16).

7. Folgerung über reelle Tangentialebenen. Nach (15) haben $A^{uu'}$ und $A'^{xx'}$ bei positivem A gleiches, bei negativem A verschiedenes Vorzeichen. Sehen wir daher von den imaginären Flächen, für die $A > 0$ und $\varphi > 0$ (§ 152, 6), also auch $\Phi > 0$ ist, ab, so folgt aus (8), (8') (§ 152, 9):

Bei den eigentlichen Linienflächen gehen durch jede Gerade, die in zwei reellen Punkten schneidet, stets auch zwei reelle Tangentialebenen und umgekehrt.

Bei den eigentlichen Flächen ohne gerade Linien gehen durch eine Gerade, die in zwei reellen Punkten schneidet, keine reellen Tangentialebenen, und schneidet eine Gerade, durch die zwei reelle Tangentialebenen gehen, nicht in reellen Punkten.

Eine Tangente ($\varphi = 0$) trägt in beiden Fällen zwei zusammenfallende reelle Schnittpunkte und zwei zusammenfallende reelle Tangentialebenen.

§ 155. Orthogonale Transformation der Fläche zweiter Ordnung.

1. Orthogonale lineare Substitutionen. Die lineare Substitution:

$$(1) \qquad x_k = \sum_1^4{}^m c_{km} z_m, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

heißt eine *orthogonale*, wenn durch sie identisch die Gleichung besteht:

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Um eine solche Substitution zu erhalten, wählt man *irgendein (reelles) Polartetraeder* $J_m = x_k^{(m)}$, $k, m = 1, 2, 3, 4$, der imaginären eigentlichen Fläche zweiter Ordnung:

$$(3) \qquad g = \sum_1^4{}^k x_k^2 = 0.$$

Durch Transformation auf dieses mittels der Substitution:

$$(4) \qquad x_k = \sum_1^4{}^m x_k^{(m)} y_m$$

erhält man nach § 149, (21):

$$(5) \qquad g = \sum_1^4{}^m g_{mm} y_m^2.$$

Hier sind die Koeffizienten:

$$(6) \qquad g_{mm} = \sum_1^4{}^k x_k^{(m)2}$$

positiv und von 0 verschieden. Setzt man daher:

$$(7) \qquad \sqrt{g_{mm}}\, y_m = z_m,$$

so wird nach (5):

$$(8) \qquad g = \sum_1^4{}^m z_m^2.$$

Somit ist:

$$x_k = \sum_1^4 {}^m \frac{x_k^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} z_m \tag{9}$$

eine (reelle) orthogonale Substitution.

Entsprechend den ∞^6 *(reellen) Polartetraedern der Fläche* (3) (§ 149, **11**, V) *gibt es* ∞^6 *orthogonale lineare Substitutionen* (§ 50, **1**).

2. Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution. Die Frage, ob eine beliebige Fläche zweiter Ordnung:

$$f = \sum_1^4 {}^k \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_k x_l = 0 \tag{10}$$

durch *orthogonale* Substitution auf die *Quadratdarstellung* § 149, (21) gebracht werden kann, kommt auf die Frage nach einem *gemeinsamen (reellen) Polartetraeder* der beiden Flächen (10) und (3) zurück.[116])

Ist nämlich $J_m = x_k^{(m)}$ ein solches, so werden durch die Substitution (4) gleichzeitig die Darstellungen (5) und:

$$f = \sum_1^4 {}^m f_{mm} y_m^2 \tag{11}$$

herbeigeführt und dann mit (7) die Darstellungen (8) und:

$$f = \sum_1^4 {}^m \frac{f_{mm}}{g_{mm}} z_m^2 . \tag{12}$$

Hat also die Fläche (10) *mit der Fläche* (3) *ein (reelles) Polartetraeder* $J_m = x_k^{(m)}$ *gemein, so kann sie durch die orthogonale lineare Substitution* (9) *auf die Quadratdarstellung* (12) *gebracht werden.*

Es soll untersucht werden, ob ein gemeinsames (reelles) Polartetraeder der Flächen (10) und (3) vorhanden ist.

3. Punkte gleicher Polarebene. Jede Ecke eines Polartetraeders einer einzelnen Fläche zweiter Ordnung hat (§ 149, **8**, II) die gegenüberliegende Seitenfläche als Polarebene. Jede Ecke eines *gemeinsamen* Polartetraeders muß also in bezug auf beide Flächen dieselbe Polarebene haben oder *ein Punkt gleicher Polarebene* in bezug auf beide sein. Wir fragen daher zuerst nach solchen Punkten.

Die Polarebenen eines Punktes x_k^0 in bezug auf die beiden Flächen (10) und (3) sind nach § 149, (6):

$$\sum_1^4 {}^k f_k^0 x_k = 0 , \quad \sum_1^4 {}^k x_k^0 x_k = 0 . \tag{13}$$

Sie fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn mit einem Faktor λ:

(14) $$f_k^0 = \lambda x_k^0, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Jeder Punkt gleicher Polarebene x_k^0 genügt also den Gleichungen:

(15) $$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 + a_{34} x_4 = 0, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \lambda) x_4 = 0, \end{cases}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt isi ein Punkt gleicher Polarebene (§ 50, **3**).

4. Die biquadratische Gleichung des Problems. Diese Gleichungen können nur bestehen, wenn der Faktor λ eine Wurzel der *biquadratischen Gleichung* ist [89]):

(16) $$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

5. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleicher Polarebene. Ist λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine Wurzel der Gleichung (16), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit $\lambda = \lambda_i$ gebildeten Gleichungen (15) entsprechen. In der Tat stellen diese Gleichungen vier Ebenen dar, die infolge der Voraussetzung $\Delta(\lambda_i) = 0$ jedenfalls einen Punkt gemein haben, möglicherweise auch mehr. Wenn nämlich für die Wurzel $\lambda = \lambda_i$ alle Unterdeterminanten dritten Grades $\Delta_{kl}(\lambda)$ von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, gehen die drei Ebenen durch eine Gerade; wenn alle Unterdeterminanten zweiten Grades $\delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, fallen sie alle in eine Ebene zusammen; wenn alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, werden sie völlig unbestimmt (I § 61, **3**—**5**).

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ der Gleichung (16) *gehören ein Punkt, oder ∞^1 oder ∞^2 oder ∞^3 Punkte gleicher Polarebene.*

6. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei *verschiedene* Wurzeln der Gleichung (16), so genügen die entsprechenden Punkte gleicher Polarebene $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (14) den Gleichungen:

(17) $$f_k^{(1)} = \lambda_1 x_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} = \lambda_2 x_k^{(2)}, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

gleic ɑ ob zu jeder der beiden Wurzeln ein oder mehr solche Punkte gehören.

Wenn $x_k^{(2)} = x_k^{(1)}$ sein sollte, würde aus den beiden alsdann in $f_k^{(1)}$ und $-x_k^{(1)}$ linearen und homogenen Gleichungen (17) mit der Determinante $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ folgen, daß $f_k^{(1)} = 0$ und $x_k^{(1)} = 0$. Die letztere Gleichung kann aber nicht für alle Werte von k bestehen. Also:

I. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleicher Polarebene können niemals zusammenfallen.*

Multipliziert man die Gleichungen (17) bezüglich mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k, so erhält man:

$$\sum^k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \lambda_1 \sum^k x_k^{(1)} x_k^{(2)}, \qquad \sum^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = \lambda_2 \sum^k x_k^{(2)} x_k^{(1)}$$

oder (§ 138, (6)):

$$f_{12} = \lambda_1 g_{12}, \quad f_{12} = \lambda_2 g_{12}.$$

Daraus aber schließt man, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

(18) $$f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. *Zwei Punkte gleicher Polarebene, $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, die zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen* (10) *und* (3) (§ 149, (2)).

7. Die Realität der Wurzeln. Sind λ_1 und λ_2 zwei (einfache oder zweifache) *konjugiert komplexe,* also *verschiedene* Wurzeln, so ist nach **6**, I auch jeder der einen entsprechende Punkt $x_k^{(1)}$ gleicher Polarebene von jedem der andern entsprechenden Punkte $x_k^{(2)}$ *verschieden.* Entspricht aber vermöge (15) der komplexen Wurzel λ_1 ein Punkt $x_k^{(1)} = y_k' + i y_k''$, so entspricht der konjugierten Wurzel λ_2 jedenfalls der Punkt $x_k^{(2)} = y_k' - i y_k''$, wo y_k'' nicht für jedes k verschwinden kann, da sonst $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ wäre.

Damit ist nach (18):

$$g_{12} = \sum_1^4{}^k x_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4{}^k (y_k'^2 + y_k''^2) = 0,$$

und damit für jedes $k: y_k' = 0$, $y_k'' = 0$, was für y_k'' nicht möglich. Daher sind konjugiert komplexe Wurzeln nicht möglich oder:

Die biquadratische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ hat nur reelle Wurzeln (§ 50, 7).

8. Entwicklung der Determinante $\Delta(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Determinante (16) nach λ sind:

(19) $$\begin{cases} -\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda) + \Delta_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = \delta_{11}(\lambda) + \delta_{22}(\lambda) + \delta_{33}(\lambda) + \delta_{44}(\lambda) + \delta_{55}(\lambda) + \delta_{66}(\lambda), \\ -\frac{1}{6}\Delta'''(\lambda) = (a_{11} - \lambda) + (a_{22} - \lambda) + (a_{33} - \lambda) + (a_{44} - \lambda). \end{cases}$$

Daher ist mit den § 79, (5)—(7) eingeführten Abkürzungen:

(20) $$\Delta(\lambda) = \lambda^4 - A'''\lambda^3 + A''\lambda^2 - A'\lambda + A,$$

und für die vier Wurzeln:

(21) $$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = A''', \quad \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4 = A'',$$
$$\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A', \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = A.$$

9. Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinante. Enthält die ganze Funktion $G(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_0$ gerade l mal, so enthält der Differentialquotient $G'(\lambda)$ nach § 50, (22) denselben Faktor gerade:

(22) $$l' = l - 1$$

mal.

Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\Delta(\lambda)$ vorkommt; ferner $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste, die gleichzeitig in *allen* Unterdeterminanten dritten Grades $\Delta_{kl}(\lambda)$; $(\lambda - \lambda_i)^{l_i''}$ die höchste, die in *allen* Unterdeterminanten zweiten Grades $\delta_{kl}(\lambda)$; $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'''}$ die höchste, die in *allen* Elementen der Determinante $\Delta(\lambda)$ vorkommt. Es sind dann nach dem Grade der einzelnen Determinanten nur zulässig die Werte:

(23) $$l_i = 1, 2, 3, 4; \quad l_i' = 0, 1, 2, 3; \quad l_i'' = 0, 1, 2; \quad l_i''' = 0, 1.$$

Infolge von (19) enthält nun $\Delta'(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in allen $\Delta_{kl}(\lambda)$ wenigstens l_i' mal vorkommt, auch wenigstens l_i' mal. Daher ist nach (22):

$$l_i - 1 \geqq l_i' \quad \text{oder:} \quad l_i' < l_i$$

mit Ausschluß der Gleichheit.

Der Differentialquotient irgendeiner Unterdeterminante dritten Grades:

$$\Delta_{44}'(\lambda) = -\delta_{11}(\lambda) - \delta_{22}(\lambda) - \delta_{33}(\lambda), \quad \Delta_{12}'(\lambda) = \delta_{45}(\lambda) - \delta_{12}(\lambda), \ldots$$

enthält den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in jedem $\delta_{kl}(\lambda)$ wenigstens l_i''mal vorkommt, auch wenigstens l_i''mal. Da aber unter den Determinanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ wenigstens eine ihn nicht mehr als l_i'mal und daher der entsprechende Differentialquotient $\Delta_{kl}'(\lambda)$ ihn nach (22) nicht mehr als $l_i' - 1$ mal enthält, so kann l_i'' nicht größer sein als $l_i' - 1$:

$$l_i'' \leqq l_i' - 1 \quad \text{oder:} \quad l_i'' < l_i'.$$

Der Differentialquotient irgend einer Unterdeterminante zweiten Grades:

$$\delta_{11}'(\lambda) = -(a_{22} - \lambda) - (a_{33} - \lambda), \quad \delta_{12}'(\lambda) = a_{12}, \ldots$$

enthält den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in jedem Elemente wenigstens l_i''' mal vorkommt, auch wenigstens l_i'''mal. Da aber unter den Determi-

nanten $\delta_{kl}(\lambda)$ wenigstens eine ihn nicht mehr als l_i''mal und daher der entsprechende Differentialquotient $\delta'_{kl}(\lambda)$ ihn nach (22) nicht mehr als $l_i''-1$ mal enthält, so kann l_i''' nicht größer sein als $l_i''-1$:

$$l_i''' \leqq l_i''-1 \quad \text{oder:} \quad l_i''' < l_i''.$$

Zwischen den Multiplizitäten besteht daher mit Ausschluß der Gleichheit die Ungleichung:

$$(24) \qquad l_i > l_i' > l_i'' > l_i'''.$$

10. Die Elementarteilerexponenten. Die für die Determinante $\varDelta$ in § 79, (10); § 81, (17); (24) abgeleiteten Identitäten geben mit $a_{kk}-\lambda$ für a_{kk} und mit $-\varDelta'(\lambda)$, $\frac{1}{2}\varDelta''(\lambda)$, $-\frac{1}{6}\varDelta'''(\lambda)$ für A', A'', A''' (§ 79, (5)—(7)) die *in λ identischen Gleichungen*[80]):

$$(25) \quad \begin{cases} \varDelta'^2(\lambda)-\varDelta(\lambda)\varDelta''(\lambda)=\varDelta_{11}^2(\lambda)+\varDelta_{22}^2(\lambda)+\cdots+ \\ \qquad\qquad +2\varDelta_{23}^2(\lambda)+2\varDelta_{31}^2(\lambda)+\cdots, \\ \frac{1}{4}\varDelta''^2(\lambda)+2\varDelta(\lambda)-\frac{1}{3}\varDelta'(\lambda)\varDelta'''(\lambda)=\delta_{11}^2(\lambda)+\delta_{22}^2(\lambda)+\cdots \\ \qquad\qquad +2\delta_{23}^2(\lambda)+2\delta_{31}^2(\lambda)+\cdots, \\ \frac{1}{36}\varDelta'''^2(\lambda)-\varDelta''(\lambda)=(a_{11}-\lambda)^2+(a_{22}-\lambda)^2+\cdots \\ \qquad\qquad +2a_{23}^2+2a_{31}^2+\cdots. \end{cases}$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda=\lambda_i$ $(l_i=1)$ von $\varDelta(\lambda)=0$ nach (23) und (24) stets $l_i'=0$ ist, folgt aus (25), da alle Wurzeln *reell* sind: Für eine Doppelwurzel $\lambda=\lambda_i$ $(l_i=2)$ verschwinden mit $\varDelta(\lambda_i)$ und $\varDelta'(\lambda_i)$ auch alle $\varDelta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i' \neq 0$, also nach (23) und (24) $l_i'=1$ ist. Für eine dreifache Wurzel $\lambda=\lambda_i(l_i=3)$ verschwinden mit $\varDelta(\lambda_i)$, $\varDelta'(\lambda_i)$ und $\varDelta''(\lambda_i)$ auch alle $\delta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i''\neq 0$, also nach (23) und (24) $l_i''=1$, $l_i'=2$ ist. Für eine vierfache Wurzel $\lambda=\lambda_i(l_i=4)$ verschwinden mit $\varDelta(\lambda_i)$, $\varDelta'(\lambda_i)$, $\varDelta''(\lambda_i)$ und $\varDelta'''(\lambda_i)$ auch alle Elemente von $\varDelta(\lambda)$, so daß $l_i'''\neq 0$, also nach (23) und (24) $l_i'''=1$, $l_i''=2$, $l_i'=3$ ist.

Danach bestimmt der Wert von l_i stets die Werte von l_i', l_i'', l_i''' in folgender Weise:

$$(26) \qquad l_i,\ l_i',\ l_i'',\ l_i'''=1,0,0,0;\ 2,1,0,0;\ 3,2,1,0;\ 4,3,2,1.$$

Innerhalb des einer l_i-fachen Wurzel λ_i entsprechenden Teilers von $\varDelta(\lambda)$:

$$(27) \qquad (\lambda-\lambda_i)^{l_i}=(\lambda-\lambda_i)^{l_i-l_i'}(\lambda-\lambda_i)^{l_i'-l_i''}(\lambda-\lambda_i)^{l_i''-l_i'''}(\lambda-\lambda_i)^{l_i'''-0}$$

heißen die Faktoren rechts, soweit ihre Exponenten von 0 verschieden sind, *die der Wurzel λ_i entsprechenden Elementarteiler* der Determinante $\varDelta(\lambda)$.[130]) Alsdann besagt der Satz (26):

Alle Elementarteilerexponenten einer jeden Wurzel haben je den Wert 1.

11. Die zu einer Wurzel gehörigen Punkte gleicher Polarebene. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, so liefern für $\lambda = \lambda_i$ die Gleichungen (15) mit $k = 1, 2, 3$ oder 4 (§ 139, (8)):

$$(28) \qquad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i) : \Delta_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört stets ein einziger bestimmter Punkt gleicher Polarebene.

Man kann statt (28) mit einem Faktor ϱ auch schreiben[121]):

$$(29) \qquad \varrho x_k^{(i)} x_l^{(i)} = \Delta_{kl}(\lambda_i),$$

und hiernach wird mit Rücksicht auf (19) und (6):

$$(30) \qquad \varrho g_{ii} = -\Delta'(\lambda_i).$$

Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, so genügen für $\lambda = \lambda_i$ den Gleichungen (15) die Punkte der Geraden (§ 139, (16)):

$$(31) \quad q_1^{(i)} : q_2^{(i)} : q_3^{(i)} : q_4^{(i)} : q_5^{(i)} : q_6^{(i)} = \delta_{k1}(\lambda_i) : \delta_{k2}(\lambda_i) : \delta_{k3}(\lambda_i) : \delta_{k4}(\lambda_i) : \delta_{k5}(\lambda_i) : \delta_{k6}(\lambda_i),$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^1 Punkte gleicher Polarebene, die eine Gerade erfüllen.

Da für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle $\delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, so genügen für $\lambda = \lambda_i$ den Gleichungen (15) die Punkte der Ebene (§ 139, (24)):

$$(32) \quad u_1^{(i)} : u_2^{(i)} : u_3^{(i)} : u_4^{(i)} = a_{11} - \lambda_i : a_{12} : a_{13} : a_{14} = a_{21} : a_{22} - \lambda_i : a_{23} : a_{24} = \cdots = \cdots.$$

Zu einer dreifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^2 Punkte gleicher Polarebene, die eine Ebene erfüllen.

Da für eine vierfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, so sind für eine solche die Gleichungen (15) identisch erfüllt. Alle Punkte des Raumes sind Punkte gleicher Polarebene.

12. Verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (16) findet sich nach (20) die Wurzel $\lambda = 0$ nicht, wenn $A \neq 0$; die Wurzel $\lambda = 0$ einfach, wenn $A = 0$, $A' \neq 0$; zweifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; dreifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$; vierfach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' = 0$.

Die Gleichungen (15), die mit $\lambda = 0$ die zur Wurzel $\lambda = 0$ gehörigen Punkte gleicher Polarebene bestimmen, decken sich aber in diesem Falle mit denjenigen (§ 139, (6)), die die Doppelpunkte der Fläche (10) liefern.

Die der Wurzel $\lambda = 0$ entsprechenden Punkte gleicher Polarebene

in bezug auf die Flächen f und g decken sich mit den Doppelpunkten der Fläche f.

Dies erklärt sich daraus, daß ein Doppelpunkt der Fläche f als Polarebene in bezug auf f jede Ebene des Raumes hat (§ 149, **5**), also auch diejenige Ebene, die seine Polarebene in bezug auf g ist.

Da nun nach **11** aus der Multiplizität einer Wurzel die Anzahl der entsprechenden Punkte gleicher Polarebene folgt, so ergibt sich:

Die Fläche f hat keinen Doppelpunkt für $A \neq 0$, einen Doppelpunkt für $A = 0$, $A' \neq 0$, eine Doppelgerade für $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$, eine Doppelebene für $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$.

Wir erhalten damit aufs Neue die bereits § 139, (30) abgeleiteten Bedingungen für den Rang der Fläche f.

13. Nichtverschwindende Wurzeln. Da nach (17) für jede einfache oder mehrfache, verschwindende oder nicht verschwindende Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$:

$$\sum^k f_k^{(i)} x_k^{(i)} = \lambda_i \sum^k x_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

oder:

(33) $$f_{ii} = \lambda_i g_{ii},$$

so folgt:

Ein einer nichtverschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$ liegt entweder auf keiner oder auf jeder der beiden Flächen f und g.

Da im *letzteren* Falle die gemeinsame Polarebene gemeinsame *Tangentialebene* wird, so *berühren sich die beiden Flächen* im Punkte $x_k^{(i)}$.

14. Der einer einfachen Wurzel entsprechende Punkt. Der einer *einfachen* Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleicher Polarebene (28) kann als *reeller* Punkt nicht auf der Fläche g, also auch nicht mit seiner gemeinsamen Polarebene in bezug auf f und g vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$, liegt er nach **13** auch nicht auf f; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach **12** die Spitze des Kegels f.

15. Fall von vier einfachen Wurzeln. Hat die Gleichung (16) vier einfache Wurzeln λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), so gehört nach **11** zu jeder ein einziger Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$, der nach **14** nicht mit dieser vereinigt liegt. Zugleich ist nach **6**, II jeder der vier Punkte $x_k^{(i)}$ harmonischer Pol jedes der drei andern in bezug auf beide Flächen f und g.

I. *Wenn die biquadratische Gleichung vier verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Flächen f und g stets ein einziges gemeinsames Polartetraeder.*

Seine reellen Ecken $x_k^{(i)}$ sind die den Werten $i = 1, 2, 3, 4$ entsprechenden Punkte (28). Für die orthogonale Substitution (9), welche die Form (12) von f herbeiführt, ist nach (29), (30)[121]):

$$(34) \qquad \frac{x_k^{(i)} x_l^{(i)}}{g_{ii}} = -\frac{\Delta_{kl}(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

16. Die einer Doppelwurzel entsprechenden Punkte. Einer *Doppelwurzel* λ_i entspricht eine reelle *Gerade* (31), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polarebene ist. Ist $\lambda_i \neq 0$, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2, in denen die Gerade die eine Fläche schneidet, nach **13** *Berührungspunkte* beider Flächen. Sie sind als Schnittpunkte einer reellen Geraden (31) mit der imaginären eigentlichen Fläche g konjugiert komplex und daher zwei *getrennte* Punkte (§ 154, **3**). Ist $\lambda_i = 0$, so ist die Gerade (31) die Achse des Ebenenpaares f und schneidet wie vorhin die Fläche g in zwei *getrennten* Punkten S_1 und S_2.

17. Fall von ein oder zwei Doppelwurzeln. Wählt man auf der Geraden (31), die der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspricht, irgend ein Paar harmonischer Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu den beiden getrennten Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Fläche g, so sind diese harmonische Pole in bezug auf beide Flächen f und g.

Sind nun die beiden andern Wurzeln λ_3 und λ_4 einfache, so sind die ihnen nach **14** entsprechenden Punkte gleicher Polarebene $x_k^{(3)}$ und $x_k^{(4)}$ nach **6** sowohl unter sich als auch je zu jedem Punkte der Geraden (31) harmonische Pole in bezug auf beide Flächen f und g. Die vier Punkte $x_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ bilden also ein gemeinsames Polartetraeder. Für $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ stehen dabei die ∞^1 zu S_1, S_2 harmonischen Punktepaare zur Verfügung (§ 149, **6**).

Ist aber auch $\lambda_3 = \lambda_4$ eine Doppelwurzel, so wählt man auch auf der ihr entsprechenden Geraden zwei harmonische Punkte $x_k^{(3)}$, $x_k^{(4)}$ zu den getrennten Schnittpunkten S_3, S_4 der Geraden mit der Fläche g. Jeder Punkt der zu $\lambda_1 = \lambda_2$ gehörigen Geraden ist aber nach **6, II** zu jedem Punkte der zu $\lambda_3 = \lambda_4$ gehörigen Geraden harmonischer Pol in bezug auf beide Flächen. Die vier Punkte $x_k^{(i)}$ bilden also wieder ein Polartetraeder.

II. *Wenn die biquadratische Gleichung eine zweifache und zwei einfache oder zwei zweifache Wurzeln hat, haben die beiden Flächen f und g ∞^1, bezüglich ∞^2 gemeinsame Polartetraeder.*

18. Fall einer dreifachen Wurzel. Einer dreifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ entspricht eine reelle Ebene (32), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polarebene ist. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so ist der Kegelschnitt,

in dem die Ebene die eine Fläche schneidet, nach **13** *Berührungskurve* beider Flächen.

Er ist nach § 153, (21) als Schnittkurve einer reellen Ebene mit der imaginären eigentlichen Fläche g notwendig ein *eigentlicher* imaginärer Kegelschnitt. Ist $\lambda_1 = 0$, so fällt f selbst als Doppelebene in die Ebene (32) hinein und schneidet g wie vorhin in einem eigentlichen imaginären Kegelschnitt.

Ein eigentlicher Kegelschnitt hat ∞^3 reelle Polardreiecke (§ 46, **10**). Ist nun $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ ein solches Polardreieck und $x_k^{(4)}$ der der einfachen Wurzel λ_4 entsprechende Punkt gleicher Polarebene, so ist dieser nach **6**, II zu jedem Punkte der Ebene (32) harmonischer Pol. Die vier Punkte $x_k^{(i)}$ bilden also ein Polartetraeder.

III. *Wenn die biquadratische Gleichung eine dreifache und eine einfache Wurzel hat, haben die beiden Flächen f und g ∞^3 gemeinsame Polartetraeder.*

IV. Bei einer vierfachen Wurzel fallen f und g überhaupt zusammen.

19. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder mehr gemeinsame Polartetraeder der beiden Flächen f und g vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Formen (8) und (12) stets möglich. Zugleich erhält die Darstellung (12) nach (33) die Form:

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + \lambda_4 z_4^2 = 0. \tag{35}$$

Die Gleichung (10) *kann also stets durch orthogonale Substitution auf die Form* (35) *gebracht werden, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung* (16) *sind.*

Das neue Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten z_i beziehen, ist das Polartetraeder, das die Fläche (10) mit der Fläche (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt, wenn die Gleichung (16) vier einfache Wurzeln hat, ist dagegen einfach oder zweifach oder dreifach unbestimmt, wenn sie zwei einfache und eine zweifache oder zwei zweifache oder eine einfache und eine dreifache Wurzel hat.

20. Unterscheidung der Vorzeichen. Aus der Gleichung (35) kann nun sowohl der Rang (§ 149, **15**) als die Spezies (§ 152, **4**) sofort entnommen werden. Sind nämlich mit $A \neq 0$ die vier Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ nach (21) alle von 0 verschieden, so sind ihre Vorzeichen nach (21), abgesehen von der Reihenfolge, für:

$$A > 0: \pm\pm\pm\pm \text{ oder } ++--; \quad A < 0: \pm\pm\pm\mp. \tag{36}$$

Nach der Regel von Descartes[131]) hat aber die Gleichung (20) soviel positive Wurzeln als Zeichenwechsel in $\Delta(\lambda)$, und soviel negative,

als Zeichenwechsel in $\Delta(-\lambda)$ vorkommen. Daher sind die Vorzeichen der Wurzeln für:

$$A > 0,\ A' > 0,\ A'' > 0,\ A''' > 0 : + + + +,$$
$$A > 0,\ A' < 0,\ A'' > 0,\ A''' < 0 : - - - -,$$

oder zusammengefaßt, für:

(37) $$A > 0,\ A'' > 0,\ A'A''' > 0 : \pm\pm\pm\pm.$$

Nach (36) und (37) sind sie dann für:

(38) $$A > 0,\ A'',\ A'A''' \text{ nicht beide } > 0 : + + - -.$$

Ist ferner mit $A = 0$, $A' \neq 0$ etwa $\lambda_4 = 0$, so sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\lambda^3 - A'''\lambda^2 + A''\lambda - A' = 0.$$

Die Vorzeichen sind dann nach § 50, **19** für:

(39) $$A'' > 0,\ A'A''' > 0 : \pm\pm\pm;$$
$$A'',\ A'A''' \text{ nicht beide } > 0 : \pm\pm\mp.$$

Ist weiter mit $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$ etwa $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, so sind λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - A'''\lambda + A'' = 0.$$

Ihre Vorzeichen sind gleich oder verschieden, je nachdem:

(40) $$A'' > 0 \text{ oder } A'' < 0.$$

Schließlich ist mit $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$ nur noch eine Wurzel λ_1 von 0 verschieden.

21. Merkmale der Spezies der Fläche zweiter Ordnung. Bezeichnet man daher allgemein die Wurzel λ_i mit α_i^2 oder $-\alpha_i^2$, je nachdem sie positiv oder negativ ist, so erhält man an Stelle von § 152, (36) folgende *Merkmale für die Spezies der Fläche* (10):

(41) $$A \neq 0 \begin{cases} A > 0,\ A'' > 0,\ A'A''' > 0: \\ \qquad \text{I. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 + \alpha_4^2 z_4^2 = 0; \\ A > 0,\ A'',\ A'A''' \text{ nicht beide } > 0: \\ \qquad \text{II. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 - \alpha_4^2 z_4^2 = 0; \\ A < 0:\ \text{III. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 - \alpha_4^2 z_4^2 = 0. \end{cases}$$

$$A = 0,\ A' \neq 0 \begin{cases} A'' > 0,\ A'A''' > 0: \\ \qquad \text{IV. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 = 0; \\ A'',\ A'A''' \text{ nicht beide } > 0: \\ \qquad \text{V. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 = 0. \end{cases}$$

$$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0 \begin{cases} A'' > 0: \quad \text{VI. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 = 0; \\ A'' < 0: \quad \text{VII. } f = \alpha_1^2 z_1^2 - \alpha_2^2 z_2^2 = 0. \end{cases}$$

$$A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0: \quad \text{VIII. } f = \alpha_1^2 z_1^2 = 0.$$

Dabei ist (§ 138, (8); (9)):

$$(42)\quad \begin{cases} A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}, \quad A''' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}, \\ A'' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66}. \end{cases}$$

Diese Merkmale gelten *für jedes Koordinatentetraeder*, auf das sich die gegebene Gleichung (10) gerade bezieht. Sie können unmittelbar als *Kolonnenüberschriften in die Tabelle* § 153, (21) eingetragen werden.[95]

22. Übergang auf gemeine Koordinaten. Sie gelten insbesondere für *schief- und rechtwinklige gemeine Koordinaten* (I § 57, (1)) und können in diesem Sinne als Kolonnenüberschriften in der Tabelle § 99, (31) benutzt werden.

Die dort für rechtwinklige Koordinaten abgeleiteten Merkmale der Spezies weichen von denen in (41) für die vier ersten Spezies insofern ab, als dort an Stelle von A'' und A''' die verkürzten Summen:

$$A_{44}' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad A_{44}'' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

stehen.

Diese Abweichung ist darin begründet, daß überhaupt, bei *gleich bleibenden notwendigen* Bedingungen, die *hinreichenden* Bedingungen entsprechend der verschiedenen Wahl des Polartetraeders für die Quadratdarstellung verschieden ausfallen. In der Tat ist für die Spezies I nach § 152, (14) notwendig, daß neben $A > 0$ alle α_{kk} und alle $a_{kk}A_{ll}$ positiv seien, hinreichend aber schon, daß $A > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $a_{11}A_{44} > 0$.

23. Invarianten der Fläche bei orthogonaler Transformation. Wird durch irgend eine orthogonale Substitution (9), die also (3) in (8) verwandelt, aber f nicht gerade in die Quadratdarstellung (12) überführt, sondern etwa in:

$$(43)\qquad f = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n b_{mn} z_m z_n,$$

so wird durch sie nach (8) und (43) identisch in λ (§ 50, 20):

$$(44)\qquad f - \lambda g = (b_{11} - \lambda) z_1^2 + \cdots + 2 b_{23} z_2 z_3 + \cdots$$

und daher nach § 138, (17):

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = S^2 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Da aber diese Gleichung identisch in λ gilt, so folgt nach (20) durch Gleichsetzen der Koeffizienten:

$$B = S^2 A,\quad B' = S^2 A',\quad B'' = S^2 A'',\quad B''' = S^2 A''' \tag{46}$$

oder:

Die Koeffizienten der Potenzen von λ in der Determinante (16), *also: A, A', A'', A''', sind gegen jede orthogonale Transformation invariant.*[132])

Da nach § 140, (9) und (14) die Gleichung (45) auch für die einfach oder zweifach geränderten Determinanten der Fläche (44) besteht, so sind *auch die Koeffizienten der Potenzen von λ in den geränderten Determinanten* § 156, (18) und § 157, (5), *also die Ausdrücke A^u, A'^u, A''^u, Q^2* in § 156, (26) *und $A^{uu'}$, $A'^{uu'}$, Q^2* in § 157, (12), *gegen jede orthogonale Transformation invariant* (§ 149, (38)).

§ 156. Orthogonale Transformation der Schnittkurve.

1. Gleichzeitige Quadratdarstellung zweier Schnittkurven. Bezogen auf ein Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ seien zwei Flächen:

$$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \tag{1}$$

$$g = \sum_1^4{}^k x_k^2 = 0 \tag{2}$$

und eine reelle Ebene:

$$u = \sum_1^4{}^k u_k x_k = 0 \tag{3}$$

gegeben. Durch Transformation auf ein neues Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, dessen Ebene $J_1 J_2 J_3$ mit der Ebene (3) zusammenfällt, nehmen f, g und u im allgemeinen die Form an (§ 141, 1):

$$f = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n f_{mn} y_m y_n = 0, \tag{4}$$

$$g = \sum_1^4{}^m \sum_1^4{}^n g_{mn} y_m y_n = 0, \tag{5}$$

$$u = S y_4 = 0, \tag{6}$$

und erhalten *die Schnittkurven der beiden Flächen mit der Ebene* in laufenden, auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$ bezogenen Koordinaten die Form (§ 141, (7)):

$$\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n f_{mn} y_m y_n = 0, \tag{7}$$

$$\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n g_{mn} y_m y_n = 0. \tag{8}$$

Ist im Besonderen $J_1 J_2 J_3$ ein *gemeinsames Poldreieck* der beiden Kegelschnitte (7) und (8), so werden diese Gleichungen (§ 149, (19)):

(9) $$\sum_1^3{}^m f_{mm} y_m^2 = 0,$$ (10) $$\sum_1^3{}^m g_{mm} y_m^2 = 0,$$

oder mit:

(11) $$\sqrt{g_{mm}}\, y_m = z_m:$$

(12) $$\sum_1^3{}^m \frac{f_{mm}}{g_{mm}} z_m^2 = 0,$$ (13) $$\sum_1^3{}^m z_m^2 = 0.$$

Die Schnittkurve $g \times u$ ist nach § 153, (21) stets ein *imaginärer eigentlicher* Kegelschnitt, während zugleich die Wurzel in (11) bei reellen Punkten J_m reell ist (§ 155, (6)).

Die Schnittkurven einer beliebigen Fläche (1) *und der imaginären eigentlichen Fläche* (2) *mit einer reellen Ebene* (3) *können also bei Einführung eines gemeinsamen Poldreiecks auf die Form* (12) *und* (13) *gebracht werden.*

Es handelt sich noch um die Ermittlung eines gemeinsamen Poldreiecks.

2. Punkte gleicher Polare. Die *Polarebenen* eines Punktes x_k^0 im *Raume* in bezug auf die *Flächen* (1) und (2) sind:

(14) $$\sum_1^4{}^k f_k^0 x_k = 0,$$ (15) $$\sum_1^4{}^k x_k^0 x_k = 0.$$

Liegt der Punkt x_k^0 in der *Ebene* (3), so wird diese von den Ebenen (14) und (15) in den *Polaren* des Punktes in bezug auf die *Kegelschnitte* $f \times u$ und $g \times u$ geschnitten (§ 68, 8; § 11, 7).

Diese Polaren fallen zusammen, wenn die drei Ebenen (3), (14), (15) eine Achse gemein haben, also (I § 51, (7)):

(16) $$f_k^0 - \lambda x_k^0 + \varrho u_k = 0.$$

Jeder Punkt x_k^0 *gleicher Polare in bezug auf die beiden Kegelschnitte genügt daher den fünf Gleichungen:*

(17) $$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \lambda)x_4 + \varrho u_4 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleicher Polare.

3. Die kubische Gleichung des Problems. Die Gleichungen (17) können nur bestehen, wenn λ eine Wurzel der *kubischen Gleichung* ist[188]):

$$(18)\qquad \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleicher Polare. Ist $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, 3)$ eine Wurzel der Gleichung (18), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit $\lambda = \lambda_i$ gebildeten Gleichungen (17) unter Elimination von ϱ genügen. Nach solcher Elimination stellen die Gleichungen (§ 107, 1) vier Ebenen dar, die wegen $\varDelta(\lambda_i) = 0$ durch einen Punkt gehen. Wenn jedoch neben $\varDelta(\lambda)$ auch noch die sechzehn Unterdeterminanten $\varDelta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3, 4$ für $\lambda = \lambda_i$ verschwinden, gehen die vier Ebenen durch eine Achse, und wenn auch die 36 Unterdeterminanten $\delta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ verschwinden, fallen sie zusammen (§ 107, 7; 9).

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ der Gleichung (18) *gehören ein Punkt oder ∞^1 oder ∞^2 Punkte gleicher Polare* (§ 50, 5).

5. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei *verschiedene* Wurzeln der Gleichung (18), so genügen die entsprechenden Punkte gleicher Polare $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (16) den Gleichungen:

$$(19)\qquad f_k^{(1)} - \lambda_1 x_k^{(1)} + \varrho_1 u_k = 0, \quad f_k^{(2)} - \lambda_2 x_k^{(2)} + \varrho_2 u_k = 0,$$

$$(20)\qquad \sum_1^4 {}_k\, u_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 {}_k\, u_k x_k^{(2)} = 0,$$

gleichviel ob zu jeder der beiden Wurzeln ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$ gehören.

Wäre nun $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, so würde aus (19) folgen:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2) x_k^{(1)} + (\varrho_1 - \varrho_2) u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und hieraus, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \quad \text{oder} \quad x_k^{(1)} = \sigma u_k,$$

und damit aus (20):

$$\sigma \sum_1^4 {}_k\, u_k^2 = 0,$$

was für die reelle Ebene (3) nicht möglich ist.

I. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleicher Polare können niemals zusammenfallen.*

Multipliziert man die Gleichungen (19) mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k, so folgt mit Rücksicht auf (20):

(21) $$f_{12} - \lambda_1 g_{12} = 0, \quad f_{21} - \lambda_2 g_{21} = 0,$$

und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

(22) $$f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. *Zwei Punkte gleicher Polare, $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, die zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen f und g, sowie jeden der beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$.*

6. Die Realität der Wurzeln. Mit Rücksicht auf **5**, I und auf (22) überträgt sich der in § 155, **7** gegebene Beweis auch auf den vorliegenden Fall, also:

Die kubische Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ in (18) hat nur reelle Wurzeln.

7. Entwicklung der Determinante $\varDelta(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Determinanten $\varDelta(\lambda)$ sind:

(23) $$\begin{cases} -\varDelta'(\lambda) = \varDelta_{11}(\lambda) + \varDelta_{22}(\lambda) + \varDelta_{33}(\lambda) + \varDelta_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2}\varDelta''(\lambda) = \delta_{11}(\lambda) + \delta_{22}(\lambda) + \delta_{33}(\lambda) + \delta_{44}(\lambda) + \delta_{55}(\lambda) + \delta_{66}(\lambda), \\ \frac{1}{6}\varDelta'''(\lambda) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2, \end{cases}$$

wo:

(24) $$\varDelta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & u_3 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}, \ldots; \quad \delta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & u_2 \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & u_3 \\ u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Daher ist mit den Abkürzungen (§ 107, (22); (23)):

(25) $$\begin{cases} A'^u = A_{11}^u + A_{22}^u + A_{33}^u + A_{44}^u, \\ A''^u = \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u + \alpha_{44}^u + \alpha_{55}^u + \alpha_{66}^u, \end{cases}$$
$$Q^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

für die Entwicklung von $\varDelta(\lambda)$:

(26) $$\varDelta(\lambda) = Q^2\lambda^3 + A''^u\lambda^2 - A'^u\lambda + A^u,$$

und für die drei Wurzeln:

(27) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{A''^u}{Q^2}, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = -\frac{A'^u}{Q^2},$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{A^u}{Q^2}.$$

8. Die Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinanten. Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\varDelta(\lambda)$ vorkommt; ferner $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten $\varDelta_{kl}(\lambda)(k, l = 1, 2, 3, 4)$ und $(\lambda - \lambda_i)^{l_i''}$ die höchste, die in

allen Unterdeterminanten $\delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($k, l = 1, 2, \ldots 6$). Es sind dann nach dem Grade der einzelnen Determinanten nur zulässig die Werte:

$$(28) \qquad l_i = 1, 2, 3; \quad l_i' = 0, 1, 2; \quad l_i'' = 0, 1.$$

Nach der ersten Gleichung (23) folgt dann ebenso, wie in § 155, 9, daß:

$$l_i' < l_i,$$

und da:

$$\Delta_{11}'(\lambda) = -\delta_{66}(\lambda) - \delta_{55}(\lambda) - \delta_{11}(\lambda), \quad \Delta_{12}'(\lambda) = \delta_{45}(\lambda) - \delta_{12}(\lambda), \ldots,$$

so folgt ebenfalls, wie dort:

$$l_i'' < l_i'.$$

Zwischen den Multiplizitäten besteht daher mit Ausschluß der Gleichheit die Ungleichung:

$$(29) \qquad l_i > l_i' > l_i''.$$

9. Die Elementarteilerexponenten. Die für die Determinante A^u in § 107, (25); (43) abgeleiteten Identitäten geben mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\Delta'(\lambda)$, $\frac{1}{2}\Delta''(\lambda)$ für A'^u, A''^u die in λ identischen Gleichungen[80]):

$$(30) \quad \Delta'^2(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + \Delta_{44}^2(\lambda) + 2\Delta_{23}^2(\lambda) + 2\Delta_{31}^2(\lambda)$$
$$+ 2\Delta_{12}^2(\lambda) + 2\Delta_{14}^2(\lambda) + 2\Delta_{24}^2(\lambda) + 2\Delta_{34}^2(\lambda) + \tfrac{1}{2}\Delta(\lambda)\Delta''(\lambda),$$
$$\tfrac{1}{4}\Delta''^2(\lambda) = \delta_{11}^2(\lambda) + \delta_{22}^2(\lambda) + \cdots + \delta_{66}^2(\lambda) + 2\delta_{12}^2(\lambda) + \cdots$$
$$+ 2\delta_{56}^2(\lambda) + 2\Delta'(\lambda)\, Q^2.$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 1)$ von $\Delta(\lambda)$ nach (28) und (29) stets $l_i' = 0$ ist, folgt aus (30), da alle Wurzeln reell sind: Für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 2)$ verschwinden mit $\Delta(\lambda_i)$ und $\Delta'(\lambda_i)$ auch alle $\Delta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i' \neq 0$, also nach (28); (29) $l_i' = 1$ ist. Für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 3)$ verschwinden mit $\Delta(\lambda_i)$, $\Delta'(\lambda_i)$ und $\Delta''(\lambda_i)$ auch alle $\delta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i'' \neq 0$, also nach (28), (29) $l_i'' = 1$, $l_i' = 2$ ist.

Danach bestimmt der Wert von l_i stets die Werte von l_i', l_i'' in folgender Weise:

$$(31) \qquad l_i, l_i', l_i'' = 1, 0, 0; \; 2, 1, 0; \; 3, 2, 1.$$

Alle Elementarteilerexponenten einer jeden Wurzel haben je den Wert 1.

10. Die zu einer Wurzel gehörigen Punkte gleicher Polare. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, so liefern für diese die Gleichungen (17) mit $k = 1, 2$ oder 3 (§ 107, (17)):

$$(32) \qquad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i) : \Delta_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört stets ein einziger bestimmter Punkt gleicher Polare.

Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) auch alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, so genügen für diese den Gleichungen (17) die Punkte der Geraden (§ 107, (31)):

(33)
$$q_1^{(i)} : q_2^{(i)} : q_3^{(i)} : q_4^{(i)} : q_5^{(i)} : q_6^{(i)} = \delta_{k1}(\lambda_i) : \delta_{k2}(\lambda_i) : \delta_{k3}(\lambda_i) : \delta_{k4}(\lambda_i) : \delta_{k5}(\lambda_i) : \delta_{k6}(\lambda_i),$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^1 Punkte gleicher Polare, die eine Gerade erfüllen.

Da für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) auch alle $\delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, so sind für eine solche die Gleichungen (17) durch alle Punkte der Ebene (3) erfüllt (§ 107, **9**).

11. Verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (18) findet sich nach (26) die Wurzel $\lambda = 0$ *nicht*, wenn $A^u \neq 0$, die Wurzel $\lambda = 0$ *einfach*, wenn $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$, *zweifach*, wenn $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u \neq 0$, und *dreifach*, wenn $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u = 0$.

Die Gleichungen (17), die mit $\lambda = 0$ die zur Wurzel $\lambda = 0$ gehörigen Punkte gleicher Polarebene bestimmen, decken sich aber in diesem Falle mit denjenigen (§ 141, (31)), welche die Doppelpunkte der Schnittkurve $f \times u$ liefern.

Die der Wurzel $\lambda = 0$ entsprechenden Punkte gleicher Polare in bezug auf die Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$ decken sich mit den Doppelpunkten des Kegelschnittes $f \times u$.

Da nun nach **10** aus der Multiplizität einer Wurzel die Anzahl der entsprechenden Punkte gleicher Polare folgt, so ergibt sich:

Die Kurve $f \times u$ hat keinen Doppelpunkt für $A^u \neq 0$, einen für $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$, eine Doppelgerade für $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u \neq 0$ und wird unbestimmt für $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u = 0$.

Wir erhalten damit aufs Neue die bereits in § 141, (24) abgeleiteten Bedingungen für den Rang der Schnittkurve $f \times u$.

12. Nicht verschwindende Wurzeln. Da nach (19) und (20) für jede einfache oder mehrfache, verschwindende oder nicht verschwindende Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt $x_k^{(i)}$ gleicher Polare:

$$\sum_1^4 {}^k f_k^{(i)} x_k^{(i)} - \lambda_i \sum_1^4 {}^k x_k^{(i)} x_k^{(i)} = 0$$

oder:

(34)
$$f_{ii} = \lambda_i g_{ii},$$

so folgt:

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$ liegt entweder auf keinem oder auf jedem der beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$.

Da im letzteren Fall die gemeinsame Polare gemeinsame *Tangente* wird, so *berühren sich die beiden Kurven* im Punkte $x_k^{(i)}$.

13. Fall von drei verschiedenen Wurzeln. Der einer *einfachen* Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleicher Polare (32) kann als *reeller* Punkt nicht auf der Kurve $g \times u$, also auch nicht mit seiner gemeinsamen Polare in bezug auf $f \times u$ und $g \times u$ vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$, liegt er nach **12** auch nicht auf $f \times u$; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach **11** der Doppelpunkt des Linienpaares $f \times u$.

Hat nun die Gleichung (18) drei einfache Wurzeln λ_i $(i = 1, 2, 3)$, so gehört nach **10** zu jeder ein einziger Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$, der nicht mit dieser vereinigt liegt. Zugleich ist nach **5**, II jeder der drei Punkte $x_k^{(i)}$ harmonischer Pol jedes anderen.

I. *Wenn die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ drei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Kegelschnitte $f \times g$ stets ein einziges gemeinsames Polardreieck.*

14. Fall einer Doppelwurzel. Einer *Doppelwurzel* λ_i entspricht eine reelle *Gerade* (33), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polare ist. Ist $\lambda_i \neq 0$, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2, in denen die Gerade den einen Kegelschnitt trifft, *Berührungspunkte* beider Kegelschnitte. Sie sind als Schnittpunkte einer reellen Geraden mit dem imaginären eigentlichen Kegelschnitt $g \times u$ zwei *getrennte* imaginäre Punkte. Ist $\lambda_i = 0$, so fällt die Gerade (33) mit der Doppellinie $f \times u$ zusammen und schneidet wie vorhin die Kurve $g \times u$ in zwei getrennten Punkten S_1 und S_2.

Wählt man auf der Geraden (33), die der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspricht, irgendein Paar harmonischer Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu den getrennten Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Kurve $g \times u$, so sind diese harmonische Pole in bezug auf beide Kegelschnitte. Sie sind aber nach **5**, II auch harmonische Pole zu dem Punkte gleicher Polare $x_k^{(3)}$, der der einfachen Wurzel λ_3 entspricht.

II. *Wenn die kubische Gleichung eine zweifache und eine einfache Wurzel hat, so haben die beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$ ∞^1 gemeinsame Polardreiecke.*

15. Fall einer dreifachen Wurzel. Bei einer dreifachen Wurzel sind alle Punkte der Ebene (3) Punkte gleicher Polare; die beiden Kegelschnitte fallen zusammen und haben daher alle ihre Polardreiecke gemein.

16. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder mehr gemeinsame Polardreiecke der beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$ vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Darstellungen (12) und (13) stets möglich. Zugleich erhält die Darstellung (12) nach (34) die Form:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0. \tag{35}$$

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche (1) *mit der Ebene* (3) *kann also stets durch orthogonale Transformation auf die Form* (35) *gebracht werden, wo* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *die Wurzeln der kubischen Gleichung* (18) *sind.*

Das Dreieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2, z_3 beziehen, ist das Polardreieck, das die Kurve (1), (3) mit der Kurve (2), (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt, wenn die Gleichung (18) drei einfache Wurzeln hat, ist dagegen einfach oder dreifach unbestimmt, wenn eine doppelte oder eine dreifache Wurzel vorhanden ist.

17. Unterscheidung der Vorzeichen. Aus der Gleichung (35) kann nun sowohl der Rang (§ 46, **13**) als die Spezies (§ 51, (35)) der Schnittkurve sofort entnommen werden. Sind nämlich mit $A^u \neq 0$ die drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nach (27) alle von 0 verschieden, so sind ihre Vorzeichen nach der Regel des Descartes[131]), wie in § 89, (40) für:

$$A''^u < 0, \quad A'^u < 0, \quad A^u < 0: \quad +++,$$
$$A''^u > 0, \quad A'^u < 0, \quad A^u > 0: \quad ---,$$

also für:

$$\begin{cases} -A'^u > 0, & A^u A''^u > 0: \ \pm\pm\pm, \\ -A'^u, & A^u A''^u \text{ nicht beide } > 0: \ \pm\pm\mp. \end{cases} \tag{36}$$

Ist ferner mit $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$ etwa $\lambda_3 = 0$, so sind die Vorzeichen von λ_1, λ_2 nach (27) für:

$$\begin{cases} -A'^u > 0: \ \pm\pm, \\ -A'^u < 0: \ \pm\mp. \end{cases} \tag{37}$$

Endlich ist mit $A^u = 0$, $A'^u = 0$, $A''^u \neq 0$ nur noch eine Wurzel von 0 verschieden.

18. Merkmale der Spezies der Schnittkurve mit einer beliebigen Ebene. Mit der zu § 155, (41) eingeführten Bezeichnung der Wurzeln erhält man daher an Stelle von § 153, (21) folgende Tabelle für die Merkmale der Spezies der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (3):

$$(38)\quad A^u \neq 0 \begin{cases} -A'^u > 0, \quad A^u A''^u > 0: & 1.\ \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 = 0, \\ -A'^u,\ A^u A''^u \text{ nicht beide} > 0: & 2.\ \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 = 0: \end{cases}$$

$$A^u = 0, \quad A'^u \neq 0 \begin{cases} -A'^u > 0: & 3.\ \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 = 0, \\ -A'^u < 0: & 4.\ \alpha_1^2 z_1^2 - \alpha_2^2 z_2^2 = 0; \end{cases}$$

$$A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u \neq 0: \quad 5.\ \alpha_1^2 z_1^2 = 0;$$

$$A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u = 0: \quad 6.\ \text{Unbestimmt.}$$

Dabei ist neben § 140, (5) zur Abkürzung gesetzt:

$$(39)\qquad \begin{aligned} A'^u &= A_{11}^u + A_{22}^u + A_{33}^u + A_{44}^u, \\ A''^u &= \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u + \alpha_{44}^u + \alpha_{55}^u + \alpha_{66}^u. \end{aligned}$$

Die Merkmale (38) gelten für *jedes System von Tetraederkoordinaten,* auf das sich die Gleichungen (1) und (3) gerade beziehen, und können unmittelbar als *Zeilenvorschriften in die Tabelle* § 153, (21) eingetragen werden.

Sie gelten insbesondere für schief- und rechtwinklige gemeine Koordinaten. Für letztere sind sie schon *in der Tabelle* § 114, (20) *als Kolonnenüberschriften* enthalten bis auf Abweichungen in den beiden ersten Kolonnen, die sich wie § 155, 22 erklären.

19. Schnittkurve mit einer Koordinatenebene. Nehmen wir für die bisher beliebige Ebene u_k die Ebene $x_4 = 0$ des Koordinatentetraeders, so wird $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$. Infolgedessen gehen die mit u_k geränderte Determinante § 140, (5) und die Unterdeterminanten § 140, (21); (35) auf Unterdeterminanten von A selbst (§ 138, (9)) zurück, und zwar wird:

$$(40)\qquad \begin{gathered} A^u = -A_{44}; \\ A_{11}^u = -\alpha_{11}, \quad A_{22}^u = -\alpha_{22}, \quad A_{33}^u = -\alpha_{33}, \\ A_{23}^u = -\alpha_{23}, \quad A_{31}^u = -\alpha_{31}, \quad A_{12}^u = -\alpha_{12}, \\ A_{14}^u = A_{24}^u = A_{34}^u = A_{44}^u = 0; \\ \alpha_{44}^u = -a_{11}, \quad \alpha_{55}^u = -a_{22}, \quad \alpha_{66}^u = -a_{33}, \\ \alpha_{56}^u = -a_{23}, \quad \alpha_{64}^u = -a_{31}, \quad \alpha_{45}^u = -a_{12}, \\ \text{alle übrigen } \alpha_{kl}^u = 0; \end{gathered}$$

und damit im Sinne von § 89, (5):

$$(41)\qquad -A^u = A_{44}, \quad -A'^u = A_{44}', \quad -A''^u = A_{44}''.$$

Für die Spezies der Schnittkurve der Fläche (1) *mit der Koordinatenebene* $x_4 = 0$ *gelten die folgenden Merkmale:*

(42) $A_{44} \neq 0 \begin{cases} A'_{44} > 0, \quad A_{44}A''_{44} > 0: & \text{1. Imag. eig. Kegelschn.,} \\ A'_{44},\ A_{44}A''_{44} \text{ nicht beide} > 0: & \text{2. Reell. eig. Kegelschn.;} \end{cases}$

$A_{44} = 0, \quad A'_{44} \neq 0 \begin{cases} A'_{44} > 0: & \text{3. Imag. getr. Linienp.,} \\ A'_{44} < 0: & \text{4. Reell. getr. Linienp.;} \end{cases}$

$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0:$ 5. Doppellinie;

$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0:$ 6. Unbestimmt.

Dies gilt für *jedes beliebige System von Tetraederkoordinaten*, auf das sich die Gleichung (1) bezieht.

20. Spezies der unendlich fernen Kurve der Fläche. In bezug auf jedes System, für das $x_4 = 0$ die unendlich ferne Ebene ist, also insbesondere *für das schief- oder rechtwinklige gemeine Koordinatensystem gibt die Tabelle* (42) *die Merkmale für die Spezies der unendlich fernen Kurve der Fläche* (1), wie sie bereits in der Tabelle § 99, (31) als Zeilenvorschriften auftreten.

21. Die Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung. Die Tabelle § 99, (31) für die *Klassifikation* beruht hiernach und nach § 155, **22** lediglich auf der *Verbindung der Spezies der Fläche selbst und der ihrer unendlich fernen Kurve.* So ist beispielsweise das hyperbolische Paraboloid diejenige Linienfläche (Spezies II), welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Linienpaar (Spezies 4) schneidet; der reelle elliptische Zylinder diejenige reelle Kegelfläche (Spezies V), welche die unendlich ferne Ebene in einem imaginären Linienpaar (Spezies 3) schneidet.

§ 157. Orthogonale Transformation des Schnittpunktpaares.

1. Gleichzeitige Quadratdarstellung zweier Schnittpunktpaare. Wir gehen wieder von den beiden Flächen f und g in § 156, (1); (2) aus. Durch Transformation auf ein neues Tetraeder $J_1J_2J_3J_4$, dessen Kante J_1J_2 in die Schnittlinie q_k der beiden Ebenen:

(1) $$u = \sum_1^4 {}_k u_k x_k = 0, \quad u' = \sum_1^4 {}_k u_k' x_k = 0$$

fällt und dessen Ecken J_1J_2 ein *gemeinsames Polzweieck der Schnittpunktpaare* $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ sind, erhalten diese den Entwicklungen von § 156, **1** entsprechend die Gleichungen:

(2) $$\frac{f_{11}}{g_{11}} z_1^2 + \frac{f_{22}}{g_{22}} z_2^2 = 0, \quad z_1^2 + z_2^2 = 0.$$

Es bleibt nur die *Bestimmung* des gemeinsamen Polzweiecks übrig.

2. Punkte gleichen Poles. Die Polarebenen des Punktes x_k^0 im Raume in bezug auf die Flächen f und g haben die Gleichungen § 156, (14); (15). Liegt der Punkt x_k^0 auf der Geraden $q = u \times u'$, so wird diese von jenen Ebenen in den Polen des Punktes x_k^0 in bezug auf die Punktepaare $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ geschnitten. Diese Pole fallen zusammen, wenn die vier Ebenen (1) und § 156, (14); (15) alle durch einen Punkt gehen, also (I § 51, (16)):

$$(3) \qquad f_k^0 - \lambda x_k^0 + \varrho u_k + \varrho' u_k' = 0.$$

Jeder Punkt x_k^0 gleichen Poles in bezug auf die beiden Punktepaare genügt daher den sechs Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u_1' &= 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u_2' &= 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 + a_{34} x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u_3' &= 0, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \lambda) x_4 + \varrho u_4 + \varrho' u_4' &= 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 &= 0, \\ u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4 &= 0, \end{aligned}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleichen Poles.

3. Die quadratische Gleichung des Problems. Die Gleichungen (4) können nur bestehen, wenn λ eine Wurzel der *quadratischen Gleichung* ist[183]):

$$(5) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zu jeder Wurzel $\lambda = \lambda_i$ dieser Gleichung gehört vermöge (4) ein Punkt gleichen Poles, eventuell auch ∞^1 Punkte.

4. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung (5) verschieden, so genügen die entsprechenden Punkte gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ den Gleichungen:

$$(6) \qquad f_k^{(1)} - \lambda_1 x_k^{(1)} + \varrho_1 u_k + \varrho_1' u_k' = 0, \qquad f_k^{(2)} - \lambda_2 x_k^{(2)} + \varrho_2 u_k + \varrho_2' u_k' = 0;$$

$$(7) \qquad \sum_1^4 {}^k u_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 {}^k u_k' x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 {}^k u_k x_k^{(2)} = 0, \quad \sum_1^4 {}^k u_k' x_k^{(2)} = 0.$$

Wäre nun $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, so würde aus (6) folgen:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)x_k^{(1)} + (\varrho_1 - \varrho_2)u_k + (\varrho_1' - \varrho_2')u_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

oder, da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist:

$$x_k^{(1)} = \sigma u_k + \sigma' u_k',$$

wo σ und σ' nicht beide 0 sein können. Damit wird aber aus (7):

$$\sigma \sum_1^4{}^k u_k^2 + \sigma' \sum_1^4{}^k u_k u_k' = 0, \quad \sigma \sum_1^4{}^k u_k u_k' + \sigma' \sum_1^4{}^k u_k'^2 = 0,$$

was nur möglich, wenn die Determinante (§ 140, (15)):

$$\sum_1^4{}^k u_k^2 \cdot \sum_1^4{}^k u_k'^2 - \left(\sum_1^4{}^k u_k u_k'\right)^2 = \sum_1^6{}^k q_k^2 = 0;$$

dies ist aber für die reelle Gerade q_k ausgeschlossen.

I. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleichen Poles können niemals zusammenfallen.*

Durch Multiplikation mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ folgt dann aus (6) mit Rücksicht auf (7), ebenso wie § 156, 5:

$$(8) \qquad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0:$$

II. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehörende Punkte gleichen Poles sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen f und g, sowie jedes der beiden Punktepaare $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$.*

5. Die Realität der Wurzeln. Wie in § 155, 7 folgt auch hier: *Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung* (5) *sind stets reell.*

6. Entwicklung der Determinante. Die Differentialquotienten der Determinante $\Delta(\lambda)$ sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} -\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda) + \Delta_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 = Q^2, \end{cases}$$

wo:

$$(10) \qquad \Delta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 & u_4' \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Daher ist mit der Abkürzung (§ 142, (22)):

$$(11) \qquad A'^{uu'} = A_{11}^{uu'} + A_{22}^{uu'} + A_{33}^{uu'} + A_{44}^{uu'}$$

die Entwicklung von $\Delta(\lambda)$:

(12) $$\Delta(\lambda) = Q^2\lambda^2 - A'^{uu'}\lambda + A^{uu'},$$

und für die Wurzeln:

(13) $$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A'^{uu'}}{Q^2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{A^{uu'}}{Q^2}.$$

7. Die Multiplizitäten der Liniearfaktoren der Determinante. Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\Delta(\lambda)$ vorkommt und $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($k, l = 1, 2, 3, 4$). Dann ist nach dem Grade der Determinanten zulässig:

(14) $$l_i = 1, 2; \quad l_i' = 0, 1.$$

und ist nach (9), wie in § 156, 8:

(15) $$l_i' < l_i.$$

8. Die Elementarteilerexponenten. Die für die zweifach geränderte Determinante § 140, (12) abgeleitete Gleichung § 142, (23) gibt mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\Delta'(\lambda)$ für $A'^{uu'}$ *die in λ identische Gleichung*[80]):

(16) $$\Delta'^2(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + \Delta_{44}^2(\lambda) + 2\Delta_{23}^2(\lambda) + \cdots$$
$$+ 2\Delta_{34}^2(\lambda) + 2\Delta(\lambda)Q^2.$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ ($l_i = 1$) von $\Delta(\lambda)$ nach (14) und (15) stets $l_i' = 0$ sein muß, verschwinden für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i$ ($l_i = 2$) mit $\Delta(\lambda_i)$ und $\Delta'(\lambda_i)$ nach (16) auch alle $\Delta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i' \neq 0$, also nach (14) $l_i' = 1$ ist.

Danach ist stets:

(17) $$l_i = 1, \quad l_i' = 0 \quad \text{oder} \quad l_i = 2, \quad l_i' = 1.$$

9. Der zu einer Wurzel gehörige Punkt gleichen Poles. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nicht sämtliche Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, liefern die Gleichungen (4) (§ 142, (29)):

(18) $$x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i) : \Delta_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört daher stets ein einziger bestimmter Punkt gleichen Poles. Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, wird der zugehörige Punkt gleichen Poles ganz unbestimmt (§ 142, 9).

10. Verschwindende und nicht verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (5) findet sich nach (12) die Wurzel $\lambda = 0$ *nicht*, wenn $A^{uu'} \neq 0$, die Wurzel $\lambda = 0$ *einfach*, wenn $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} \neq 0$, und *zweifach*, wenn $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} = 0$.

Entsprechend § 156, 11 ergibt sich daher, wie in § 142, (24):

Das Schnittpunktpaar $f \times u \times u'$ *ist getrennt für* $A^{uu'} \neq 0$, *zusammenfallend für* $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} \neq 0$, *unbestimmt für* $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} = 0$.

Für jede Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleichen Poles $x_k^{(i)}$ ist nach (6) und (7):

$$\sum_1^4{}^k f_k^{(i)} x_k^{(i)} - \lambda_i \sum_1^4{}^k x_k^{(i)} x_k^{(i)} = 0$$

oder:

(19) $$f_{ii} = \lambda_i g_{ii}.$$

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i *entsprechender Punkt gleichen Poles* $x_k^{(i)}$ *gehört entweder keinem oder jedem der beiden Punktepaare* $f \times u \times u'$ *und* $g \times u \times u'$ *an.*

11. Fall von zwei verschiedenen Wurzeln. Der einer *einfachen* Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleichen Poles (18) kann als *reeller* Punkt nicht dem Punktepaar $g \times u \times u'$ angehören, also auch *nicht* mit seinem gemeinsamen Pol in bezug auf $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ *vereinigt liegen.* Falls $\lambda_i \neq 0$ ist, gehört er nach **10** auch nicht dem Punktpaar $f \times u \times u'$ an; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach **10** der Doppelpunkt $f \times u \times u'$.

Hat nun die Gleichung (5) zwei einfache Wurzeln λ_1 und λ_2, so gehört zu jeder ein einziger Punkt gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, der nicht mit diesem Pol zusammenfällt. Zugleich ist nach **4**, II jeder der beiden Punkte harmonischer Pol des andern.

Wenn die quadratische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ *zwei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Punktepaare* $f \times u \times u'$ *und* $g \times u \times u'$ *stets ein einziges gemeinsames reelles Polzweieck.*

12. Fall einer Doppelwurzel. Für eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ sind alle Punkte der Geraden $u \times u'$ Punkte gleichen Poles; die beiden Schnittpunktpaare haben *alle* ihre Polzweiecke gemein und fallen zusammen.

13. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder ∞^1 gemeinsame Polzweiecke der beiden Punktepaare vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Darstellung (2) stets möglich. Zugleich erhält die erste Darstellung (2) nach (19) die Form:

(20) $$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0.$$

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Fläche $f = 0$ *in* § 156, (1) *mit der Schnittlinie der beiden Ebenen* (1) *kann also stets durch ortho-*

gonale Transformation auf die Form (20) *gebracht werden, wo* λ_1 *und* λ_2 *die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (5) *sind.*

Das Zweieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2 beziehen, ist das Polzweieck, welches das Punktepaar $f \times u \times u'$ mit dem imaginären eigentlichen Punktepaar $g \times u \times u'$ gemein hat. Es ist eindeutig für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, einfach unbestimmt für $\lambda_1 = \lambda_2$.

14. Merkmale der Spezies des Schnittpunktpaares der Fläche mit einer beliebigen Geraden. *Für die Spezies des Schnittpunktpaares der Fläche* § 156, (1) *mit der Schnittlinie der beiden Ebenen u und u' in* (1) *gelten* nach (20) und (13) *folgende Merkmale* (§ 51, (35)):

$$(21)\qquad A^{uu'} \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A^{uu'} > 0: \text{ 1. Imag. eigentl. Punktepaar,} \\ A^{uu'} < 0: \text{ 2. Reell. eigentl. Punktepaar;} \end{array} \right.$$
$$A^{uu'} = 0,\; A'^{uu'} \neq 0: \text{ 3. Zusammenfall. Punktepaar;}$$
$$A^{uu'} = 0,\; A'^{uu'} = 0: \text{ 4. Unbest. Punktepaar.}$$

15. Schnittpunktepaar eines ebenen Schnittes der Fläche mit einer Koordinatenebene. Die Gerade $u \times u'$ fällt in eine Seitenebene $x_4 = 0$ des Koordinatentetraeders, wenn $u_1' = 0$, $u_2' = 0$, $u_3' = 0$, $u_4' = 1$. In diesem Falle wird aber nach § 140, (12) im Sinne von § 140, (21); (35):

$$(22)\qquad A^{uu'} = -A^u_{44};$$

$$(23)\qquad A^{uu'}_{11} = -\alpha^u_{11},\; A^{uu'}_{22} = -\alpha^u_{22},\; A^{uu'}_{33} = -\alpha^u_{33},\; A^{uu'}_{44} = 0;$$

und im Sinne von § 109, (10):

$$(24)\qquad A'^{uu'} = -A'^u_{44}.$$

Für die Spezies des Schnittpunktpaares, in dem die Schnittkurve der Fläche § 156, (1) *mit der Ebene u in* § 156, (3) *die Koordinatenebene* $x_4 = 0$ *schneidet, gelten die Merkmale:*

$$(25)\qquad A^u_{44} \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} -A^u_{44} > 0: \text{ 1. Imag. eig. Punktepaar,} \\ -A^u_{44} < 0: \text{ 2. Reell. eig. Punktepaar;} \end{array} \right.$$
$$A^u_{44} = 0,\; A'^u_{44} \neq 0: \text{ 3. Zusammenfall. Punktepaar;}$$
$$A^u_{44} = 0,\; A'^u_{44} = 0: \text{ 4. Unbest. Punktepaar.}$$

Dies gilt für *jedes beliebige System von Tetraederkoordinaten*, auf das sich die Gleichung § 156, (1) gerade bezieht.

16. Unendlich fernes Punktepaar eines ebenen Schnittes. In bezug auf jedes System, für das $x_4 = 0$ die unendlich ferne Ebene ist, also insbesondere *für das schief- oder rechtwinklige gemeine Koordinatensystem gibt die Tabelle* (25) *die Merkmale für die Spezies des unendlich fernen Punktepaares eines ebenen Schnittes,* wie sie bereits in der Tabelle § 114, (20) als Zeilenmerkmale auftreten.

§ 158. Polarberührungstetraeder und Erzeugung durch reziproke Bündel.

1. Begriff des Polarberührungstetraeders. Während bei einem *Polartetraeder* $J_1 J_2 J_3 J_4$ einer Fläche zweiter Ordnung und Klasse je zwei verschiedene Ecken, also J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_1, J_4; J_2, J_4; J_3, J_4 harmonische Pole sind, soll als *Polarberührungstetraeder* ein solches bezeichnet werden, bei dem (§ 68, **9**, II):

(1) J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_2, J_4; J_3, J_4; J_1, J_1; J_4, J_4,

je zwei harmonische Pole sind, während es J_1, J_4 nicht sind.[134])

Man wählt, um ein solches Tetraeder zu erhalten, als Ecken J_1 und J_4 irgend zwei getrennte Punkte der Fläche selbst (∞^2, ∞^2), deren Verbindungslinie nicht gerade Erzeugende der Fläche ist, und nimmt alsdann auf der reziproken Polare dieser Verbindungslinie (§ 68, **15**, III) irgend zwei harmonische Pole (∞^1) der Fläche als Ecken J_2 und J_3, worauf die Bedingungen (1) erfüllt sind.

Es gibt hiernach ∞^5 (reelle) Polarberührungstetraeder einer (reellen) Fläche zweiter Ordnung und Klasse.

2. Gleichungsform der Fläche. Den analytischen Ausdruck der Definition (1) eines Polarberührungstetraeders der Fläche (§ 143, (1), (2)):

$$(2)\quad f=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^i a_{ki}x_k x_i=0, \qquad (3)\quad F=\sum_1^4{}^k\sum_1^4{}^i A_{ki}u_k u_i=0$$

bilden die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} f_{11}=0,\ f_{44}=0\ (\S\ 138,\ (13));\ f_{14}\neq 0\ (\S\ 146,\ (7)); \\ f_{23}=0,\ f_{31}=0,\ f_{12}=0,\ f_{24}=0,\ f_{34}=0\ (\S\ 149,\ (6)). \end{cases}$$

Die Gleichung (2) *erhält also immer und nur in bezug auf ein Polarberührungstetraeder die Form* (§ 138, (12)):

$$(5)\quad b_{22}y_2^2+b_{33}y_3^2+2b_{14}y_1y_4=0.$$

Die Determinante der Gleichung (5) ist:

$$(6)\quad B=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-b_{22}b_{33}b_{14}^2.$$

Die Gleichung der Fläche in Ebenen- und Strahlenkoordinaten (§ 143, (2); § 144, (2)) werden daher nach § 138, (30):

$$(7)\quad S^2F=B\left\{\frac{v_2^2}{b_{22}}+\frac{v_3^2}{b_{33}}+\frac{2v_1v_4}{b_{14}}\right\}=0,$$

$$(8)\quad \varphi=-B\left\{\frac{r_1^2}{b_{14}^2}-\frac{r_4^2}{b_{22}b_{33}}+\frac{2r_2r_6}{b_{22}b_{14}}-\frac{2r_3r_5}{b_{33}b_{14}}\right\}=0.$$

3. Dualität des Berührungstetraeders. Nach der Form der Gleichungen (5) und (7) ist ein Polarberührungstetraeder *sich selbst dual.*

Die beiden Ecken J_1 und J_4 sind Punkte *(Berührungspunkte)* der Fläche, die Seitenebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_4$ sind *Berührungsebenen.* Die Eckenpaare J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_2, J_4; J_3, J_4 sind *harmonische Pole* und die Seitenebenenpaare $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$; $\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_1$; $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$; $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_4$; $\mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4$ *harmonische Polarebenen.* J_1 und $\mathfrak{l}_4$, J_4 und $\mathfrak{l}_1$, J_2 und $\mathfrak{l}_2$, J_3 und $\mathfrak{l}_3$ sind je *Pol* und *Polarebene.* Die Kanten $J_1 J_4 = \mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_3$ und $J_2 J_3 = \mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{l}_4$ sind *reziproke Polaren,* die Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_3$, sowie $J_4 J_2$ und $J_4 J_3$ (I § 63, Fig. 319) konjugierte Tangenten (§ 68, **16**).

4. Spezies der Fläche. Eine imaginäre Fläche kann die Gleichung (5) nicht darstellen, da die ihr genügenden Ecken J_1 und J_4 reell angenommen sind. Dagegen folgt aus (6) mit Rücksicht auf § 152, **7**; **9**:

Die auf ein Polarberührungstetraeder bezogene Gleichung (5) *stellt stets eine reelle geradlinige oder nicht geradlinige Fläche dar, je nachdem die Koeffizienten b_{22} und b_{33} verschiedenes oder gleiches Vorzeichen haben.*

5. Beispiel. Unter die Form (5) fällt die in § 73, (8) angegebene Gleichung des Paraboloides. Dort sind der Anfangspunkt Ω als J_4 und der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse als J_1 Punkte der Fläche. Ihre Tangentialebenen, die $\eta\zeta$-Ebene und die unendlich ferne Ebene, schneiden sich in der unendlich fernen Geraden der $\eta\zeta$-Ebene, die somit reziproke Polare der ξ-Achse ist. Die η- und ζ-Achse sind konjugierte Tangenten, also ihre unendlich fernen Punkte als J_2 und J_3 harmonische Pole (§ 68, **16**; **15**, III).

Setzt man insbesondere:

$$b_{22}, b_{33}, b_{14} = \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, 1;\; y_1, y_2, y_3, y_4 = x, y, z, t;\; v_1, v_2, v_3, v_4 = u, v, w, s;$$
$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 = p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34},$$

so erhält man aus (5), (7), (8) wieder die Gleichungen § 70, (24), (32), (41) mit $a = 0$.

6. Darstellung reziproker Bündel in Dreikantskoordinaten. In einem Bündel mit dem Mittelpunkte E seien, in bezug auf ein beliebiges Koordinatendreikant, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des laufenden Strahles und u_1, u_2, u_3 die Koordinaten der laufenden Ebene. In einem zweiten Bündel mit dem Mittelpunkt E' mögen x_1', x_2', x_3' und u_1', u_2', u_3' die entsprechende Bedeutung haben (Fig. 223).

Dann werden die beiden Bündel reziprok aufeinander bezogen durch die vier Systeme von Gleichungen (I § 67, 7):

(9) $$u_k' = \sum_1^3{}^l c_{kl} x_l,$$ (10) $$C x_l = \sum_1^3{}^k C_{kl} u_k';$$

(11) $$C x_k' = \sum_1^3{}^l C_{kl} u_l,$$ (12) $$u_l = \sum_1^3{}^k c_{kl} x_k'.$$

Die Gleichungen (9) enthalten, da es überall nur auf die Verhältnisse der Koordinaten ankommt, die acht unabhängigen Verhältnisse der neun Konstanten c_{kl}, deren Determinante:

(13) $$C = |c_{kl}|$$

nicht 0 sei. Mit C_{kl} sind deren Unterdeterminanten bezeichnet.

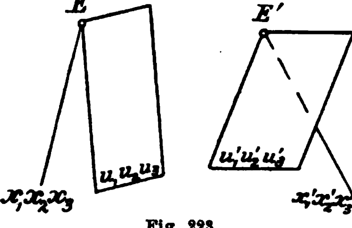


Fig. 223.

Die Gleichungen (9) und (10), die Auflösungen voneinander sind, bestimmen zu einem Strahl x_l des ersten Bündels die entsprechende Ebene u_k' des zweiten und umgekehrt; die Gleichungen (11) und (12) zu einer Ebene u_l des ersten Bündels den entsprechenden Strahl x_k' des zweiten und umgekehrt (§ 18, (16)—(19)).

7. Darstellung reziproker Bündel in Raumkoordinaten. Um die beiden Bündel im Raume darzustellen, wo sie eine beliebige Lage gegeneinander haben, nehmen wir die Mittelpunkte E und E' als Ecken J_4 und J_1 eines Koordinatentetraeders und lassen die Kanten der beiderseitigen Koordinatendreikante der Bündel in die von J_4, bezüglich J_1 ausgehenden Kanten des Tetraeders fallen.

Sind dann in laufenden Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 des Raumes:

(14) $$y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu,$$ (15) $$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

die Gleichungen eines Strahles (I § 59, (20')) und einer Ebene (I § 58, (4)) des Bündels J_4 und:

(16) $$y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu',$$ (17) $$v_2' y_2 + v_3' y_3 + v_4' y_4 = 0$$

die Gleichungen eines Strahles und einer Ebene des Bündels J_1, so sind λ, μ, ν; λ', μ', ν'; v_1, v_2, v_3 und v_2', v_3', v_4' bezüglich zugleich die in 6 mit x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3'; u_1, u_2, u_3 und u_1', u_2', u_3' bezeichneten Koordinaten (I § 57, 15, vorletzter Absatz links; I § 57, 16, Satz rechts). Daher entspricht (Fig. 224):

dem Strahl s:

(18) $y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$

des Bündels J_4 nach (9) *die Ebene Σ':*

(20) $$(c_{11}\lambda + c_{12}\mu + c_{13}\nu)y_2 + (c_{21}\lambda + c_{22}\mu + c_{23}\nu)y_3 + (c_{31}\lambda + c_{32}\mu + c_{33}\nu)y_4 = 0$$

des Bündels J_1.

dem Strahl s':

(19) $y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$

des Bündels J_1 nach (12) *die Ebene Σ:*

(21) $$(c_{11}\lambda' + c_{21}\mu' + c_{31}\nu')y_1 + (c_{12}\lambda' + c_{22}\mu' + c_{32}\nu')y_2 + (c_{13}\lambda' + c_{23}\mu' + c_{33}\nu')y_3 = 0$$

des Bündels J_4.

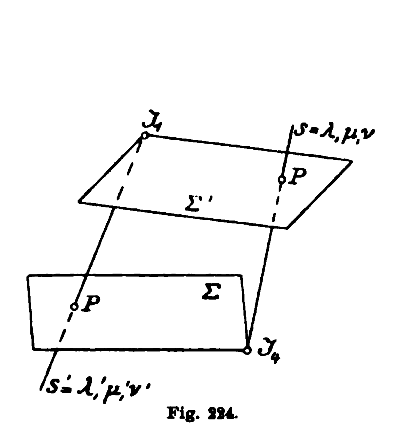


Fig. 224.

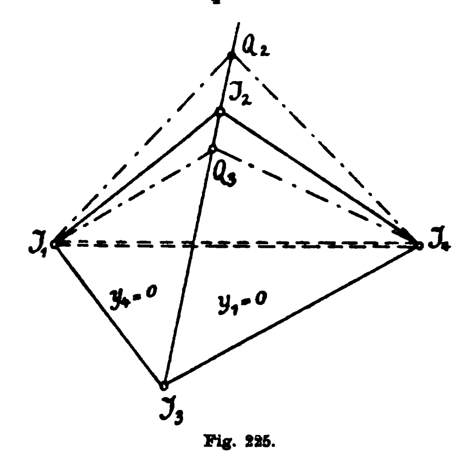


Fig. 225.

8. Die dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte entsprechenden Ebenen. Der Verbindungsstrahl der beiden Mittelpunkte J_1 und J_4 (Fig. 225) hat als Strahl (18) und (19) bezüglich die Parameter:

$$\lambda = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 0; \qquad \lambda' = 0,\ \mu' = 0,\ \nu' = 1,$$

und daher nach (20) und (21) als entsprechende Ebenen:

(22) $c_{11}y_2 + c_{21}y_3 + c_{31}y_4 = 0;$ (23) $c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 = 0.$

Nehmen wir diese beiden Ebenen als Koordinatenebenen $J_1J_2J_3$ ($y_4 = 0$) und $J_2J_3J_4 (y_1 = 0)$, so sind:

$$c_{11} = 0,\ c_{21} = 0; \qquad c_{32} = 0,\ c_{33} = 0.$$

Ändern wir dann die Bezeichnung der andern Konstanten, indem wir setzen:

$$c_{12} = b_{22},\ c_{13} = \sigma,\ c_{22} = \tau,\ c_{23} = b_{33},\ c_{31} = 2b_{14},$$

so findet die reziproke Beziehung der beiden Bündel nunmehr den Ausdruck:

Dem Strahl s:

(24) $y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$

des Bündels J_4 entspricht die Ebene Σ':

(26) $(b_{22}\mu + \sigma\nu)y_2 + (\tau\mu + b_{33}\nu)y_3 + 2b_{14}\lambda y_4 = 0$

des Bündels J_1.

Dem Strahl s':

(25) $y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$

des Bündels J_1 entspricht die Ebene Σ:

(27) $2b_{14}\nu' y_1 + (b_{22}\lambda' + \tau\mu')y_2 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu')y_3 = 0$

des Bündels J_4.

9. Strahlen, die mit ihrer Ebene vereinigt liegen. Der Strahl s liegt nach (24); (26) in der Ebene Σ', bezüglich s' nach (25); (27) in Σ, wenn identisch in y_1 und y_4:

$$(b_{22}\mu + \sigma\nu)\mu y_1 + (\tau\mu + b_{33}\nu)\nu y_1 + 2b_{14}\lambda^2 y_4 = 0,$$

also:

(28) $\lambda = 0,\ b_{22}\mu^2 + (\sigma + \tau)\mu\nu + b_{33}\nu^2 = 0.$

$$2b_{14}\nu'^2 y_1 + (b_{22}\lambda' + \tau\mu')\lambda' y_4 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu')\mu' y_4 = 0,$$

(29) $b_{22}\lambda'^2 + (\sigma + \tau)\lambda'\mu' + b_{33}\mu'^2 = 0,\ \nu' = 0.$

In jedem der beiden Bündel gibt es also ein Paar von Strahlen, die je mit ihrer entsprechenden Ebene vereinigt liegen.

Die Gleichungen dieser Strahlenpaare lauten nach (28) und (24), bezüglich (29) und (25):

$$y_1 = 0,\ b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0.$$

$$b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0,\ y_4 = 0.$$

Sie sind also die Verbindungslinien der Mittelpunkte J_4 und J_1 der beiden Bündel mit dem auf der Kante J_2J_3 gelegenen Punktepaar:

(30) $$b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_4 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt zugleich die beiden Ebenen dar, die mit ihren entsprechenden Strahlen vereinigt liegen.

10. Definitive Wahl des Koordinatentetraeders. Nach der unter 8 getroffenen Verfügung sind die Ecken J_1 und J_4 und die Ebenen $J_1J_2J_3$ und $J_2J_3J_4$ des Koordinatentetraeders und damit auch die Kante J_2J_3 bestimmt, die Ecken J_2 und J_3 aber auf dieser noch beliebig. Wir verfügen nunmehr über sie, indem wir sie als zwei zu dem Punktepaar Q_2Q_3 in (30) harmonische Punkte annehmen (Fig. 225). Dazu muß:

(31) $$\sigma + \tau = 0$$

genommen werden, so daß die Gleichungen (30) werden:

(32) $$b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_4 = 0.$$

Damit folgt dann:

Für zwei beliebige reziproke Bündel sei ein Koordinatentetraeder eingeführt, dessen Ecken J_4 und J_1 die Mittelpunkte der beiden Bündel sind und dessen Ecken J_2 und J_3 auf der Schnittlinie der dem Verbindungsstrahl $J_1 J_4$ entsprechenden Ebenen liegen und harmonisch sind zu den beiden Punkten Q_2, Q_3, in denen diese Schnittlinie von den mit ihren entsprechenden Ebenen vereinigt liegenden Strahlen beider Bündel getroffen wird. In bezug auf ein solches Tetraeder stellt sich die reziproke Beziehung derart dar, daß:

dem Strahle s:

(33) $$y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$$

des Bündels J_4 die Ebene Σ':

(35) $$(b_{22}\mu + \sigma\nu) y_2 + (-\sigma\mu + b_{33}\nu) y_3 + 2 b_{14} \lambda y_4 = 0$$

des Bündels J_1 entspricht.

dem Strahle s':

(34) $$y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$$

des Bündels J_1 die Ebene Σ:

(36) $$2 b_{14} \nu' y_1 + (b_{22}\lambda' - \sigma\mu') y_2 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu') y_3 = 0$$

des Bündels J_4 entspricht.

Hier sind b_{22}, b_{33}, b_{14} und σ beliebige Konstanten und muß nur die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{22} & \sigma \\ 0 & -\sigma & b_{33} \\ 2b_{14} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2b_{14}(b_{22}b_{33} + \sigma^2)$$

von Null verschieden sein.

Den in der Ebene $y_1 = 0$ liegenden Strahlen (33) und den in der Ebene $y_4 = 0$ liegenden Strahlen (34) entsprechen nach (35) mit $\lambda = 0$ und (36) mit $\nu' = 0$ die Ebenen durch die Kante $J_1 J_4$, die beiden Bündeln angehören.

11. Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente. Jeder Strahl des einen Bündels schneidet die ihm entsprechende Ebene des andern, falls er nicht ganz in ihr liegt, in einem Punkte P (Fig. 224). Den Ort solcher Schnittpunkte erhält man durch Elimination der Parameter $\lambda : \mu : \nu$ aus (33) und (35) *oder* der Parameter λ', μ', ν' aus (34) und (36). *Beides* führt zu *derselben* Gleichung:

(37) $$b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 + 2 b_{14} y_1 y_4 = 0.$$

Daraus aber folgt mit Rücksicht auf (5):

I. *Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Ebenen zweier reziproker Bündel ist eine Fläche zweiter Ordnung.*[194])

Das für die beiden Bündel unter **10** eingeführte Tetraeder ist ein Polarberührungstetraeder der Fläche. Im besonderen liegen die Mittelpunkte der Bündel auf der Fläche und die ihrem Verbindungs-

strahl entsprechenden Ebenen sind Tangentialebenen der Fläche in jenen Punkten. Mit Rücksicht auf (32) und 4 folgt zugleich:

II. *Je nachdem die mit ihren entsprechenden Ebenen vereinigt liegenden Strahlen der beiden Bündel reell oder nicht reell sind, ist die Fläche eine geradlinige oder nicht geradlinige.*

Dual gilt in gleicher Weise der Satz:

I'. *Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen und Punkte zweier reziproker Ebenen im Raume umhüllen eine Fläche zweiter Klasse.*

12. Erzeugung einer gegebenen Fläche durch reziproke Bündel. Ist umgekehrt die auf eines ihrer ∞^5 Polarberührungstetraeder bezogene Fläche (37) gegeben, so sind damit auch die reziproken Bündel (33)—(36) bis auf die willkürlich bleibende Konstante σ bestimmt.

III. *Jede gegebene reelle Fläche zweiter Ordnung kann durch reziproke Bündel erzeugt werden. Zu jedem der ∞^5 Polarberührungstetraeder der Fläche gehören ∞^1 solche Erzeugungen.*

13. Parameterdarstellung der Fläche. Bezeichnet man in (33) und (35) die Verhältnisse $\mu : \lambda$, $\nu : \lambda$ kurz mit μ, ν, setzt also $\lambda = 1$, und nimmt die Konstanten in die Koordinaten auf (I § 57, 6), setzt also $b_{22} = 1$, $b_{33} = \varepsilon = \pm 1$, $2b_{14} = -1$, wählt endlich $\sigma = 0$, so ergibt sich aus (33) sofort (§ 52, (9); (9')):

Die Koordinaten des laufenden Punktes der Fläche:

$$y_2^2 + \varepsilon y_3^2 - y_1 y_4 = 0 \tag{38}$$

stellen sich durch die Parameter μ, ν des Strahles s in folgender Weise dar:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 1 : \mu : \nu : \mu^2 + \varepsilon\nu^2. \tag{39}$$

Da ferner die Tangentialebene der Fläche im Punkte y_k die Koordinaten hat (§ 143, (5)):

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = y_4 : -2y_2 : -2\varepsilon y_3 : y_1,$$

so lautet *die zugehörige Parameterdarstellung der laufenden Tangentialebene:*

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \mu^2 + \varepsilon\nu^2 : -2\mu : -2\varepsilon\nu : 1. \tag{40}$$

§ 159. Schmiegungstetraeder und Erzeugung durch projektive Büschel.

1. Begriff des Schmiegungstetraeders. Bei einer Linienfläche zweiter Ordnung bestimmen irgend zwei Erzeugende der einen Schar mit irgend zwei Erzeugenden der andern Schar ein *Schmiegungstetraeder.* Die vier Ecken J_1, J_2, J_3, J_4 (Fig. 226) eines solchen gehören, als Schnittpunkte der vier Erzeugenden, der Fläche selbst an.

Die in die vier Erzeugenden fallenden Kanten J_3J_1, J_1J_2, J_2J_4, J_4J_3 bilden ein auf der Fläche liegendes windschiefes Vierseit. Die vier Seitenebenen $J_1J_2J_3$, $J_2J_1J_4$, $J_3J_1J_4$, $J_4J_2J_3$ sind die Tangentialebenen der Fläche bezüglich in den Ecken J_1, J_2, J_3, J_4, da sie zwei durch die Ecke gehende Erzeugende verbinden. Die beiden Kanten J_2J_3 und J_1J_4 liegen nicht auf der Fläche und sind reziproke Polaren, da jede von beiden die Schnittlinie der Tangentialebenen in den Schnittpunkten der Fläche mit der andern ist (§ 68, **15**, V).

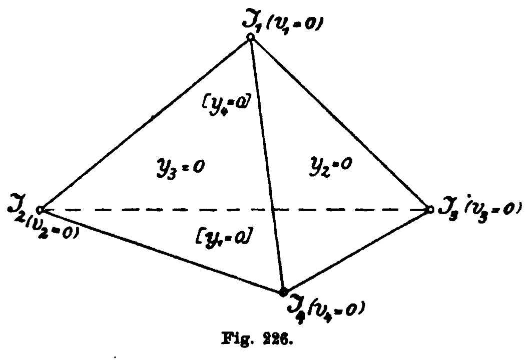


Fig. 226.

Das Schmiegungstetraeder ist *sich selbst dual*[134]).

2. Form der Gleichung in bezug auf ein Schmiegungstetraeder. Die Bedingungen für ein Schmiegungstetraeder der Fläche:

$$(1)\qquad f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (2)\qquad \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l = 0$$

lauten nach seiner Definition (§ 146, (7)):

$$(3)\qquad f_{11} = 0,\ f_{22} = 0,\ f_{33} = 0,\ f_{44} = 0;\quad f_{31} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{24} = 0,\ f_{43} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche erhält daher immer und nur in bezug auf ein Schmiegungstetraeder die Form (§ 62, (7)):

$$(4)\qquad f = 2b_{23} y_2 y_3 + 2b_{14} y_1 y_4 = 0.$$

Die Determinante dieser Gleichung ist:

$$(5)\qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_{23}^2 b_{14}^2.$$

Daher wird:

$$B_{23} = B_{32} = b_{23} b_{14}^2,\quad B_{14} = B_{41} = b_{23}^2 b_{14};$$

$$\beta_{11} = -b_{23}^2,\ \beta_{44} = -b_{14}^2,\ \beta_{25} = \beta_{52} = b_{23} b_{14},\ \beta_{36} = \beta_{63} = -b_{23} b_{14},$$

während die übrigen B_{kl} und β_{kl} alle verschwinden.

Die Gleichung der Fläche in Ebenen- und Strahlenkoordinaten (§ 143, (2); § 144, (2)) wird dann nach § 138, (30):

$$(6)\qquad S^2 F = B\left(2\frac{v_2 v_3}{b_{23}} + 2\frac{v_1 v_4}{b_{14}}\right) = 0;$$

$$(7)\qquad -\varphi = b_{23}^2 r_1^2 + b_{14}^2 r_4^2 - 2b_{23} b_{14}(r_2 r_5 - r_3 r_6) = 0.$$

3. Die linearen Komplexe der Erzeugenden. Die sechs linearen Komplexe einer Regelschar der Fläche (4) sind nach § 147, (17); (18):

$$\varrho r_4 = -b_{23}^2 r_1,\quad \varrho r_5 = b_{23} b_{14} r_5,\quad \varrho r_6 = -b_{23} b_{14} r_6,\quad \varrho r_1 = -b_{14}^2 r_4,$$
$$\varrho r_2 = b_{23} b_{14} r_2,\quad \varrho r_3 = -b_{23} b_{14} r_3,$$

wo $\varrho = \sqrt{B} = b_{23} b_{14}$ oder $\varrho = -\sqrt{B} = -b_{23} b_{14}$. Setzt man diese Werte ein, so ergeben sich als Gleichungen *der drei Komplexe, durch welche die beiden Scharen der Erzeugenden bestimmt werden:*

(8) $$b_{23} r_1 + b_{14} r_4 = 0,\quad r_3 = 0,\quad r_6 = 0$$

und bezüglich:

(8′) $$b_{23} r_1 - b_{14} r_4 = 0,\quad r_2 = 0,\quad r_5 = 0.$$

4. Beseitigung der Konstanten. Da die Tetraederkoordinaten y_k bei festbleibendem Koordinatentetraeder um beliebige Faktoren geändert werden können (I § 57, 6), darf in (4)—(7) ohne Beschränkung $b_{23} = 1$, $b_{14} = -1$ gesetzt werden.

Jede Linienfläche kann daher in bezug auf ein Schmiegungstetraeder in Punkt-, Ebenen- und Linienkoordinaten durch die zusammengehörigen Gleichungen:

(9) $$y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0,$$ (10) $$v_2 v_3 - v_1 v_4 = 0,$$

(11) $$r_1^2 + r_4^2 + 2(r_2 r_5 - r_3 r_6) = 0$$

dargestellt werden.

Die beiden Regelscharen der Fläche sind dann die gemeinsamen Strahlen je dreier Komplexe:

(12) $$r_1 - r_4 = 0,\ r_3 = 0,\ r_6 = 0;$$ (12′) $$r_1 + r_4 = 0,\ r_2 = 0,\ r_5 = 0.$$

Diese Strahlen genügen als Tangenten auch der Gleichung (11), die man mit Rücksicht auf die Identität:

(13) $$r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0$$

in den beiden Formen schreiben kann:

(14) $$(r_1 - r_4)^2 - 4 r_3 r_6 = 0$$ (14′) $$(r_1 + r_4)^2 + 4 r_2 r_5 = 0.$$

5. Erzeugung der Fläche durch projektive Ebenenbüschel oder Punktreihen. Die Gleichung (9) ist das Resultat der Elimination von λ, bezüglich λ' aus dem einen oder andern der beiden Gleichungenpaare (§ 63, (22); § 82, (30); (30′)):

(15) $$\begin{cases} y_1 - \lambda y_2 = 0, \\ y_3 - \lambda y_4 = 0; \end{cases}$$ (15′) $$\begin{cases} y_1 - \lambda' y_3 = 0, \\ y_2 - \lambda' y_4 = 0; \end{cases}$$

die Gleichung (10) ebenso aus:

(16) $$\begin{cases} \lambda v_1 + v_2 = 0, \\ \lambda v_3 + v_4 = 0; \end{cases}$$ (16′) $$\begin{cases} \lambda' v_1 + v_3 = 0, \\ \lambda' v_2 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (15) stellen aber zwei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen J_3J_4 und J_1J_2, die Gleichungen (15′) zwei andere mit den Achsen J_2J_4 und J_3J_1 dar. Ebenso hat man in (16) und (16′) je zwei projektive Punktreihen mit den Achsen J_1J_2 und J_3J_4, bezüglich J_3J_1 und J_2J_4.[157])

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projektiven Ebenenbüschel (15) *oder* (15′), *sowie die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Punktreihen* (16) *oder* (16′) *liegen demnach auf der Fläche* (9); (10).[109])

6. Erzeugung der einzelnen Scharen. Die Linien (15) und (16) haben beide dieselben Strahlenkoordinaten (I § 59, **1**):

(17) $$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = \lambda : -\lambda^2 : 0 : \lambda : 1 : 0,$$

sind also für jedes λ identisch. Ebenso die Linien (15′) und (16′), deren Strahlenkoordinaten sind[161]):

(17′) $$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = -\lambda' : 0 : \lambda'^2 : \lambda' : 0 : 1.$$

Durch Elimination von λ aus der mit Rücksicht auf (13) für vier unabhängige Gleichungen zählenden Proportion (17) erhält man die Gleichungen (12), aus (17′) entsprechend die Gleichungen (12′).

Daher erzeugen die beiden Ebenenbüschel (15) *und die beiden Punktreihen* (16) *die eine Regelschar* (12), *dagegen die Ebenenbüschel* (15′) *und die Punktreihen* (16′) *die andere Regelschar* (12′) *der Fläche* (9), (10).

7. Lineare Komplexe der beiden Scharen. Sollen die beiden Scharen (17) und (17′) beide zugleich einem und demselben linearen Komplex (I § 60, (12)):

(18) $$c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + c_4r_4 + c_5r_5 + c_6r_6 = 0$$

angehören, so muß identisch in λ und λ' sein:

(19) $$-c_2\lambda^2 + (c_1 + c_4)\lambda + c_5 = 0,$$

(19′) $$c_3\lambda'^2 - (c_1 - c_4)\lambda' + c_6 = 0,$$

was nur möglich ist, wenn $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_1 + c_4 = 0$, $c_1 - c_4 = 0$, also alle sechs Koeffizienten c_k von (18) verschwinden.

I. *Es gibt daher keinen linearen Komplex, dem gleichzeitig beide Regelscharen einer Fläche zweiter Ordnung angehören.*

Soll dagegen nur die Schar (17) dem Komplex (18) und die Schar (17′) dem Komplex:

(18′) $$c_1'r_1 + c_2'r_2 + c_3'r_3 + c_4'r_4 + c_5'r_5 + c_6'r_6 = 0$$

angehören, muß nach (19) und, mit c_k' für c_k, nach (19′) sein:

(20) $c_2 = 0,\ c_1 + c_4 = 0,\ c_5 = 0;$ (20′) $c_3' = 0,\ c_1' - c_4' = 0,\ c_6' = 0.$

II. *Jede der beiden Regelscharen* (17) *und* (17') *gehört somit* ∞^3 *linearen Komplexen, einem „dreigliedrigen linearen System" an, welches bezüglich durch die Gleichung:*

(21) $c_1(r_1 - r_4) + c_3 r_3 + c_6 r_6 = 0$; (21') $c_1'(r_1 + r_4) + c_2' r_2 + c_5' r_5 = 0$

mit beliebigen Verhältnissen $c_1 : c_3 : c_6$ *und* $c_1' : c_2' : c_5'$ *dargestellt ist* (vgl. (12); (12')).[178])

8. Involutorische Lage der beiden linearen Systeme. Man nennt *die beiden linearen Komplexe* (18) und (18') *in Involution liegend,* wenn zwischen ihren Koeffizienten die Bedingung besteht:

(22) $$c_1 c_4' + c_2 c_5' + c_3 c_6' + c_4 c_1' + c_5 c_2' + c_6 c_3' = 0.$$

Zu dem Komplexe (21) oder (21') liegen daher alle Komplexe (18') oder (18) in Involution, für die bezüglich:

(23) $-c_1(c_1' - c_4') + c_6 c_3' + c_3 c_6' = 0$; (23') $c_1'(c_1 + c_4) + c_2' c_5 + c_5' c_2 = 0.$

Die erste Bedingung ist unabhängig von $c_1 : c_3 : c_6$ erfüllt für (20'), die zweite unabhängig von $c_1' : c_2' : c_3'$ für (20), oder:

III. *Das lineare System* (21') *umfaßt gerade alle linearen Komplexe, die zu jedem Komplex des Systems* (21) *in Involution liegen, das System* (21) *umfaßt alle linearen Komplexe, die zu jedem Komplex des Systems* (21') *in Involution liegen.*

9. Spezielle Komplexe der beiden linearen Systeme. Unter den ∞^2 linearen Komplexen (21) oder (21') sind nach § 86, 4 (I § 60, (13)) diejenigen ∞^1 Komplexe speziell, für die:

(24) $-c_1^2 + c_3 c_6 = 0$, (24') $c_1'^2 + c_2' c_5' = 0$,

die also durch die Gleichungen dargestellt sind:

$$(r_1 - r_4) + \frac{c_1}{c_6} r_3 + \frac{c_6}{c_1} r_6 = 0; \qquad (r_1 + r_4) - \frac{c_1'}{c_5'} r_2 + \frac{c_5'}{c_1'} r_5 = 0$$

oder mit den Abkürzungen $\lambda' = c_6 : c_1 = c_1 : c_3$ und $\lambda = - c_5' : c_1' = c_1' : c_2'$ durch:

(25) $\lambda'(r_1 - r_4) + r_3 + \lambda'^2 r_6 = 0$; (25') $\lambda(r_1 + r_4) + r_2 - \lambda^2 r_5 = 0.$

Die Achse des speziellen linearen Komplexes (25) hat aber nach § 86, (16) (I § 60, 5) die Strahlenkoordinaten (17') und die Achse von (25') ebenso die Strahlenkoordinaten (17). Damit ergibt sich:

IV. *Die Achsen der speziellen Komplexe der dreigliedrigen Systeme* (21) *und* (21') *sind bezüglich die beiden Regelscharen* (17') *und* (17).

10. Parameterdarstellung der Fläche. Die Koordinaten y_k des Schnittpunktes der beiden ungleichnamigen Erzeugenden λ und λ' sind nach (15) und (15') (§ 63, (26)):

(26) $$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \lambda\lambda' : \lambda' : \lambda : 1$$

und die Koordinaten v_k der Verbindungsebene nach (16) und (16') (§ 82, (33)):

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 1 : -\lambda : -\lambda' : \lambda\lambda'. \tag{27}$$

Die Gleichungen (26) *und* (27) *enthalten die Darstellung der Punkte und Tangentialebenen der Fläche* (9), (10) *durch die Parameter der beiden Erzeugenden, die durch den Punkt gehen, bezüglich in der zugehörigen Tangentialebene liegen.*[161])

11. Verbindungsebenen zweier festen Erzeugenden mit einer laufenden. Die Verbindungsebenen zweier festen Erzeugenden λ_1 und λ_2 der einen Schar mit einer laufenden λ' der andern haben (I § 58, (3)) nach (27) die Gleichungen (§ 82, (35)):

$$\begin{cases} (y_1 - \lambda_1 y_2) - \lambda'(y_3 - \lambda_1 y_4) = 0, \\ (y_1 - \lambda_2 y_2) - \lambda'(y_3 - \lambda_2 y_4) = 0; \end{cases} \tag{28}$$

die Schnittpunkte derselben festen Erzeugenden λ_1 und λ_2 mit derselben laufenden λ' ebenso nach (26) die Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda'(\lambda_1 v_1 + v_2) + (\lambda_1 v_3 + v_4) = 0, \\ \lambda'(\lambda_2 v_1 + v_2) + (\lambda_2 v_3 + v_4) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt unmittelbar (I § 66, 4):

Die Verbindungsebenen oder Schnittpunkte irgend zweier festen Erzeugenden der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der andern bilden zwei projektive Ebenenbüschel, bezüglich Punktreihen.

12. Doppelverhältnis von vier Erzeugenden. Die Verbindungsebenen oder Schnittpunkte einer laufenden Erzeugenden λ mit vier festen Erzeugenden λ_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ haben nach (28) und (29) die Gleichungen:

$$(y_1 - \lambda y_2) - \lambda_i'(y_3 - \lambda y_4) = 0, \tag{30}$$

$$\lambda_i'(\lambda v_1 + v_2) + (\lambda v_3 + v_4) = 0 \tag{31}$$

und daher (I § 42, (27); I § 46, (13); I § 58, 8) das Doppelverhältnis:

$$\delta = \frac{(\lambda_1' - \lambda_3')(\lambda_2' - \lambda_4')}{(\lambda_2' - \lambda_3')(\lambda_1' - \lambda_4')}. \tag{32}$$

Die vier Verbindungsebenen sowohl wie die vier Schnittpunkte von vier festen Erzeugenden der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der anderen haben ein von λ unabhängiges und zwar dasselbe Doppelverhältnis.[136]) *Es heißt das Doppelverhältnis der vier Erzeugenden* (§ 52, 7).

§ 160. Das Pascalsche und Brianchonsche Sechsseit im Raume.

1. Begriff des Pascalschen und Brianchonschen Sechsseits. Ein unebenes Sechsseit (Fig. 227) mit den Seiten $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ hat *drei Paare von Gegenseiten*, g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6, ferner *drei Paare von Gegenebenen* und *drei Paare von Gegenecken:*

$$(1)\quad \begin{cases} \mathsf{E}_{12} = g_1 g_2, & \mathsf{E}_{45} = g_4 g_5; \\ \mathsf{E}_{34} = g_3 g_4, & \mathsf{E}_{61} = g_6 g_1; \\ \mathsf{E}_{56} = g_5 g_6, & \mathsf{E}_{23} = g_2 g_3; \end{cases}$$

$$(1')\quad \begin{cases} E_{12} = g_1 \times g_2, & E_{45} = g_4 \times g_5; \\ E_{34} = g_3 \times g_4, & E_{61} = g_6 \times g_1; \\ E_{56} = g_5 \times g_6, & E_{23} = g_2 \times g_3; \end{cases}$$

Fig. 227.

indem $g_k g_l$ die Verbindungsebene und $g_k \times g_l$ den Schnittpunkt der Geraden g_k und g_l bezeichnet (§ 37, 1).

Es heißt ein Pascalsches, wenn die drei Schnittlinien je zweier Gegenebenen:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathsf{E}_{12} \times \mathsf{E}_{45} = h_1, \\ \mathsf{E}_{34} \times \mathsf{E}_{61} = h_2, \\ \mathsf{E}_{56} \times \mathsf{E}_{23} = h_3 \end{cases}$$

in einer Ebene, der Pascalebene, liegen.

Es heißt ein Brianchonsches, wenn die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken:

$$(2')\quad \begin{cases} E_{12} E_{45} = k_1, \\ E_{34} E_{61} = k_2, \\ E_{56} E_{23} = k_3 \end{cases}$$

durch einen Punkt, den Brianchonpunkt, gehen.

2. Andere notwendige und hinreichende Eigenschaften. Da bei dem Brianchonschen Sechsseit die Verbindungslinien $E_{34}E_{61}$ und $E_{56}E_{23}$ durch einen Punkt gehen, also in einer Ebene liegen, so befinden sich auch die vier Ecken E_{34}, E_{61}, E_{56}, E_{23} und damit die Gegenseiten $g_3 = E_{23}E_{34}$ und $g_6 = E_{56}E_{61}$ in dieser Ebene. Mit Hinzufügung des dualen Satzes folgt also:

Bei einem Pascalschen Sechsseit gehen je zwei Gegenseiten durch einen Punkt.

Bei einem Brianchonschen Sechsseit liegen je zwei Gegenseiten in einer Ebene.

Liegen umgekehrt bei einem unebenen Sechsseit je zwei Gegenseiten g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6 in einer Ebene E_{14}, E_{25}, E_{36}, so schneiden sich diese drei Ebenen in einem Punkte $P = \mathsf{E}_{14} \times \mathsf{E}_{25} \times \mathsf{E}_{36}$. Da nun die Gerade $k_1 = E_{12}E_{45}$ die Geraden g_1, g_4, sowie g_2, g_5 schneidet, also in den Ebenen E_{14}, sowie E_{25} liegt, geht sie ebenfalls durch P. Dasselbe gilt von $k_2 = E_{34}E_{61}$ und $k_3 = E_{56}E_{23}$.

Gehen je zwei Gegenseiten eines unebenen Sechsseits durch einen Punkt, so ist es ein Pascalsches.	*Liegen je zwei Gegenseiten eines unebenen Sechsseits in einer Ebene, so ist es ein Brianchonsches.*

Jedes unebene Pascalsche Sechsseit ist daher auch ein Brianchonsches und umgekehrt.[163])

3. Sechsseite auf den Linienflächen zweiter Ordnung. Die Seite g_1 eines Brianchonschen Sechsseits schneidet die anschließenden Seiten g_2 und g_6 und nach 2 auch die Gegenseite g_4; ebenso schneiden die Seiten g_3 und g_5 je die Seiten g_2, g_4, g_6. Daher gehören (§ 74, 6) g_1, g_3, g_5 der durch g_2, g_4, g_6 bestimmten Linienfläche zweiter Ordnung an, welche auch g_2, g_4, g_6 enthält. Keine zwei von den drei Seiten g_2, g_4, g_6 können in einer Ebene liegen, ohne daß das ganze Sechsseit eben wird. Entsprechendes gilt mit Vertauschung der ungeraden und geraden Seiten.

Jedes Pascalsche und jedes Brianchonsche unebene Sechsseit liegt auf einer Linienfläche zweiter Ordnung derart, daß seine drei ungeraden Seiten g_1, g_3, g_5 der einen und seine drei geraden Seiten g_2, g_4, g_6 der anderen Schar von Erzeugenden angehören.

Liegt umgekehrt ein Sechsseit auf dem Hyperboloid, so müssen, da je zwei benachbarte Seiten in einer Ecke zusammentreffen, die drei ungeraden Seiten g_1, g_3, g_5 der einen und die drei geraden g_2, g_4, g_6 der andern Schar der Erzeugenden angehören. Dann schneiden sich aber auch die Gegenseiten g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6 (§ 63, 4) und so folgt nach 2:

Jedes auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichnete Sechsseit ist gleichzeitig ein Pascalsches und ein Brianchonsches unebenes Sechsseit.

4. Mannigfaltigkeit der Sechsflache und Sechsecke bei gegebenen Seiten. Wir haben bisher angenommen, daß *die Seiten g_k* des der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsseits *in bestimmter Reihenfolge* gegeben sind, worauf die sechs Seitenebenen und sechs Ecken als Verbindungsebenen und Schnittpunkte je zweier aufeinanderfolgender Seiten, wie in (1); (1') bestimmt sind.

Nun bleibt aber die unter 2 gefundene charakteristische Eigenschaft des durch seine sechs Seiten gegebenen Pascalschen und Brianchonschen Sechsseits vollkommen erhalten, wenn man bei *festgehaltenen ungeraden* Seiten die *geraden* auf alle möglichen Weisen *vertauscht* (oder umgekehrt), also die Anordnungen trifft:

$$(3)\quad \begin{cases} S_1 = g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6, \\ S_2 = g_1 g_4 g_3 g_6 g_5 g_2, \\ S_3 = g_1 g_6 g_3 g_2 g_5 g_4, \end{cases} \qquad (3')\quad \begin{cases} S_1' = g_1 g_4 g_3 g_2 g_5 g_6, \\ S_2' = g_1 g_2 g_3 g_6 g_5 g_4, \\ S_3' = g_1 g_6 g_3 g_4 g_5 g_2. \end{cases}$$

Denn in jeder dieser Anordnungen schneiden sich je zwei Gegenseiten, die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste, weil sie ungleichnamige Erzeugende der Linienfläche sind, auf der das Sechsseit liegt. *Alle sechs Sechsseite* (3), (3') *sind also Pascalsche und Brianchonsche, sobald es das erste ist.*

Die Seitenebenen und Ecken der sechs aus denselben sechs Seiten gebildeten Sechsseite sind aber nicht dieselben, sondern bezüglich die folgenden:

$$(4)\quad \begin{cases} S_1 = \mathsf{E}_{12}\mathsf{E}_{23}\mathsf{E}_{34}\mathsf{E}_{45}\mathsf{E}_{56}\mathsf{E}_{61}, & S_1' = \mathsf{E}_{14}\mathsf{E}_{43}\mathsf{E}_{32}\mathsf{E}_{25}\mathsf{E}_{56}\mathsf{E}_{61}, \\ S_2 = \mathsf{E}_{14}\mathsf{E}_{43}\mathsf{E}_{36}\mathsf{E}_{65}\mathsf{E}_{52}\mathsf{E}_{21}, & S_2' = \mathsf{E}_{12}\mathsf{E}_{23}\mathsf{E}_{36}\mathsf{E}_{65}\mathsf{E}_{54}\mathsf{E}_{41}, \\ S_3 = \mathsf{E}_{16}\mathsf{E}_{63}\mathsf{E}_{32}\mathsf{E}_{25}\mathsf{E}_{54}\mathsf{E}_{41}, & S_3' = \mathsf{E}_{16}\mathsf{E}_{63}\mathsf{E}_{34}\mathsf{E}_{45}\mathsf{E}_{52}\mathsf{E}_{21}, \end{cases}$$

$$(4')\quad \begin{cases} S_1 = E_{12}E_{23}E_{34}E_{45}E_{56}E_{61}, & S_1' = E_{14}E_{43}E_{32}E_{25}E_{56}E_{61}, \\ S_2 = E_{14}E_{43}E_{36}E_{65}E_{52}E_{21}, & S_2' = E_{12}E_{23}E_{36}E_{65}E_{54}E_{41}, \\ S_3 = E_{16}E_{63}E_{32}E_{25}E_{54}E_{41}, & S_3' = E_{16}E_{63}E_{34}E_{45}E_{52}E_{21}, \end{cases}$$

wo wieder die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Seitenebene und Ecke als Gegenebenen und Gegenecken gelten.

Die beiden Kolonnen (3) und (3') sind so angeordnet, daß S_1, S_2, S_3 einerseits und S_3', S_2', S_1' andrerseits je durch *zyklische Vertauschung von* g_2, g_4, g_6 ineinander übergehen, während die Transposition 24 von (3) zu (3') überführt.

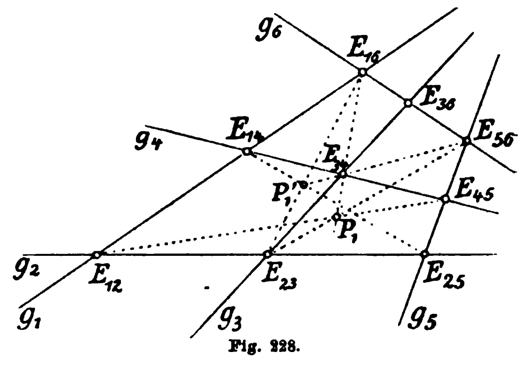


Fig. 228.

Jeder der *neun Schnittpunkte* der drei Erzeugenden g_1, g_3, g_5 (Fig. 228) mit den drei Erzeugenden g_2, g_4, g_6 tritt unter den Ecken (4') viermal auf, ebenso jede der *neun Verbindungsebenen* viermal unter den Seitenebenen (4).

5. Die sechs Pascalebenen und sechs Brianchonpunkte. Zu jedem der sechs Pascalschen und Brianchonschen Sechsseite S_k, S_k' gehört eine Pascalebene Π_k, Π_k' und ein Brianchonpunkt P_k, P_k' ($k = 1, 2, 3$).

Da der Brianchonpunkt P_1 des Sechsseits S_1 auf den Verbindungs-

linien der Gegenecken E_{12} mit E_{45} und E_{34} mit E_{61} liegt, so liegt er auch in der Ebene E_{14}, welche die Seiten $g_1 = E_{61}E_{12}$ und $g_4 = E_{34}E_{45}$ verbindet, ebenso in den Ebenen E_{36} und E_{52}. Er ist also der Schnittpunkt der Verbindungsebenen je zweier Gegenseiten. Ebenso ist Π_1 die Verbindungsebene der Schnittpunkte E_{14}, E_{36}, E_{52} je zweier Gegenseiten. Da entsprechendes auch für die anderen Sechsecke gilt, so erhält man *die sechs Pascalebenen und sechs Brianchonpunkte* in folgender Weise:

$$(5)\quad \begin{cases} P_1 = \mathsf{E}_{14} \times \mathsf{E}_{36} \times \mathsf{E}_{52}, & P_1' = \mathsf{E}_{12} \times \mathsf{E}_{36} \times \mathsf{E}_{54}; \\ P_2 = \mathsf{E}_{16} \times \mathsf{E}_{32} \times \mathsf{E}_{54}, & P_2' = \mathsf{E}_{16} \times \mathsf{E}_{34} \times \mathsf{E}_{52}; \\ P_3 = \mathsf{E}_{12} \times \mathsf{E}_{34} \times \mathsf{E}_{56}, & P_3' = \mathsf{E}_{14} \times \mathsf{E}_{32} \times \mathsf{E}_{56}; \end{cases}$$

$$(5')\quad \begin{cases} \Pi_1 = E_{14}E_{36}E_{52}, & \Pi_1' = E_{12}E_{36}E_{54}; \\ \Pi_2 = E_{16}E_{32}E_{54}, & \Pi_2' = E_{16}E_{34}E_{52}; \\ \Pi_3 = E_{12}E_{34}E_{56}, & \Pi_3' = E_{14}E_{32}E_{56}. \end{cases}$$

6. Die analytischen Bedingungen der auf einer Linienfläche liegenden Sechsseite. Die Seiten $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ seien Erzeugende der Linienfläche § 159, (9); (10); die ungeraden mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$ sollen der Schar § 159, (15); (16), die geraden mit den Parametern $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ der Schar § 159, (15'); (16') angehören. Alsdann sind die Gleichungen der Seitenebenen und Ecken nach § 159, (28); (29):

$$(6)\quad \begin{cases} \mathsf{E}_{12} = y_1 - \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_3 + \lambda_1\lambda_2 y_4 = 0, \\ \mathsf{E}_{54} = y_1 - \lambda_5 y_2 - \lambda_4 y_3 + \lambda_5\lambda_4 y_4 = 0, \ldots, \end{cases}$$

$$(6')\quad \begin{cases} E_{12} = \lambda_1\lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_1 v_3 + v_4 = 0, \\ E_{54} = \lambda_5\lambda_4 v_1 + \lambda_4 v_2 + \lambda_5 v_3 + v_4 = 0, \ldots, \end{cases}$$

wo $\mathsf{E}_{12}, \mathsf{E}_{54}, \ldots$ und $E_{12}, E_{54}, \ldots$ zugleich als Abkürzungen für die linken Seiten der Gleichungen der Ebenen und Punkte dienen.

Um die alsdann bestehenden Beziehungen zwischen den Ebenen und Punkten analytisch darzustellen, benutzen wir wieder die in § 37, (4) und § 52, (24) eingeführten Abkürzungen $\varrho_i, \varrho_i', \varrho_i''$ $(i = 1, 2, 3)$, sowie die in § 52, (19) angegebenen für L_i, M_i, N_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Dann ergibt sich zunächst aus (6):

$$(7)\quad \begin{aligned} \varrho_1'\mathsf{E}_{54} - \varrho_1\mathsf{E}_{12} &= \{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2) - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\}\, y_1 \\ &\quad - \{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2)\lambda_5 - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\lambda_1\}\, y_2 - \cdots + \cdots \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} &\varrho_1'\mathsf{E}_{54} - \varrho_1\mathsf{E}_{12} \\ &= \{\lambda_1\lambda_6 + \lambda_3\lambda_2 + \lambda_5\lambda_4) - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_5\lambda_6)\}\, y_1 \\ &\quad - \{(\lambda_3\lambda_5\lambda_2 + \lambda_5\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6) - (\lambda_3\lambda_5\lambda_6 + \lambda_5\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4)\}\, y_2 - \cdots + \cdots \end{aligned}$$

und mit Benutzung der genannten Abkürzungen:

(9) $\varrho_1' \mathsf{E}_{54} - \varrho_1 \mathsf{E}_{12} = \Pi_1,$

(10) $\Pi_1 = (M_1 - N_1)y_1 + (M_2 - N_2)y_2 + (M_3 - N_3)y_3 + (M_4 - N_4)y_4,$

und ebenso:

(9') $\varrho_1' E_{54} - \varrho_1 E_{12} = P_1,$

(10') $P_1 = (M_4 - N_4)v_1 - (M_3 - N_3)v_2 - (M_2 - N_2)v_3 + (M_1 - N_1)v_4,$

wo Π_1, P_1 ihrerseits als Abkürzungen für die Ausdrücke rechts in (10) und (10') gebraucht sind.

Nun haben die Ausdrücke § 52, (19) sämtlich die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn gleichzeitig die drei ungeraden Parameter λ_1, λ_3, λ_5 und die drei geraden λ_2, λ_4, λ_6 je unter sich zyklisch vertauscht werden, indem sich dabei die drei Glieder jedes Ausdrucks selbst zyklisch vertauschen. Dagegen gehen dabei nach § 37, (4) ϱ_1 in ϱ_2, ϱ_1' in ϱ_2', und E_{54} in E_{16}, E_{12} in E_{34}, E_{54} in E_{16}, E_{12} in E_{34} über. Mit zweimaliger Anwendung dieses Verfahrens ergänzen sich also die identischen Gleichungen (9) und (9') zu folgendem System:

(11) $\begin{cases} \varrho_1 \mathsf{E}_{12} - \varrho_1' \mathsf{E}_{54} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_2 \mathsf{E}_{34} - \varrho_2' \mathsf{E}_{16} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_3 \mathsf{E}_{56} - \varrho_3' \mathsf{E}_{32} + \Pi_1 = 0; \end{cases}$ (11') $\begin{cases} \varrho_1 E_{12} - \varrho_1' E_{54} + P_1 = 0, \\ \varrho_2 E_{34} - \varrho_2' E_{16} + P_1 = 0, \\ \varrho_3 E_{56} - \varrho_3' E_{32} + P_1 = 0. \end{cases}$

Diese Gleichungen enthalten aber den Satz:

Jedes auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichnete Sechsseit $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6$ *ist ein Pascalsches und Brianchonsches.*

7. Beziehung zwischen Pascalebene und Brianchonpunkt. Dabei sind:

(12) $\Pi_1 = 0,$ (12') $P_1 = 0$

die Gleichungen der Pascalebene und des Brianchonpunktes.

Da aber zwischen Pol y_k und Polarebene v_k in bezug auf die Fläche § 159, (9) nach § 149, (3') die Beziehung:

(13) $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = v_4 : -v_3 : -v_2 : v_1$

besteht, ergibt sich mit Rücksicht auf (10) und (10'):

Pascalebene und Brianchonpunkt eines auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichneten Sechsecks sind Polarebene und Pol in bezug auf die Fläche.

Dies stimmt mit (5) und (5') überein, da E_{14}, E_{36}, E_{52} die Tangentialebenen der Fläche in den Punkten E_{14}, E_{36}, E_{52} sind.

8. Gleichung der Linienfläche eines Pascalschen Sechsseits. Sind umgekehrt für sechs Ebenen $\mathsf{E}_{12} = 0$, $\mathsf{E}_{23} = 0$, $\mathsf{E}_{34} = 0$, $\mathsf{E}_{45} = 0$, $\mathsf{E}_{56} = 0$.

$\mathsf{E}_{64} = 0$ in Verbindung mit einer siebenten $\Pi_1 = 0$ die Bedingungen (11) mit beliebigen Faktoren ϱ_k, ϱ_k' erfüllt, so liegen die Schnittlinien je zweier Gegenebenen des von den sechs Ebenen gebildeten Sechsflachs wie in 1 in der Ebene (12). Setzt man nun zur Abkürzung:

$$(14) \qquad \varrho_1 \mathsf{E}_{12} = V_1, \quad \varrho_2 \mathsf{E}_{34} = V_2, \quad \varrho_3 \mathsf{E}_{56} = V_3;$$
$$\varrho_1' \mathsf{E}_{54} = -V_1', \quad \varrho_2' \mathsf{E}_{16} = -V_2', \quad \varrho_3' \mathsf{E}_{32} = -V_3'; \quad \Pi_1 = -V,$$

so stellt die Gleichung:

$$(15) \qquad V^2 - (V_1 + V_2 + V_3) V + (V_2 V_3 + V_3 V_1 + V_1 V_2) = 0,$$

analog wie § 37, (16), eine Fläche zweiter Ordnung dar, auf der die sechs Seiten:

$$g_1 : V_1 = 0, \quad V_2' = 0, \quad g_2 : V_1 = 0, \quad V_3' = 0, \ldots$$

des Sechsseits liegen.

Jedes Pascalsche oder Brianchonsche unebene Sechsseit liegt auf einer Fläche zweiter Ordnung.

9. Die Steinerschen Linien der sechs Sechsseite aus sechs Erzeugenden. Bei einer wiederholten zyklischen Vertauschung der Parameter λ_2, λ_4, λ_6 nehmen die identischen Gleichungen (11) und (11') die Form an (§ 52, (23)):

$$(16) \quad \begin{cases} \varrho_3'' \mathsf{E}_{14} - \varrho_3 \mathsf{E}_{56} + \Pi_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (16') \quad \begin{cases} \varrho_3'' E_{14} - \varrho_3 E_{56} + P_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \varrho_2' \mathsf{E}_{16} - \varrho_2'' \mathsf{E}_{52} + \Pi_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (17') \quad \begin{cases} \varrho_2' E_{16} - \varrho_2'' E_{52} + P_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Identitäten kennzeichnen aber die Sechsseite S_2 und S_3 in (4) als Pascalsche und in (4') als Brianchonsche.

Die Gleichungen der Pascalebenen und Brianchonpunkte der drei Sechsseite (3) werden dabei:

$$(18) \quad \begin{cases} \Pi_1 = (M_1 - N_1) y_1 + (M_2 - N_2) y_2 + (M_3 - N_3) y_3 + (M_4 - N_4) y_4 = 0, \\ \Pi_2 = (N_1 - L_1) y_1 + (N_2 - L_2) y_2 + (N_2 - L_3) y_3 + (N_4 - L_4) y_4 = 0, \\ \Pi_3 = (L_1 - M_1) y_1 + (L_2 - M_2) y_2 + (L_3 - M_3) y_3 + (L_4 - M_4) y_4 = 0; \end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} P_1 = (M_4 - N_4) v_1 - (M_3 - N_3) v_2 - (M_2 - N_2) v_3 + (M_1 - N_1) v_4 = 0, \\ P_2 = (N_4 - L_4) v_1 - (N_3 - L_3) v_2 - (N_2 - L_2) v_3 + (N_1 - L_1) v_4 = 0, \\ P_3 = (L_4 - M_4) v_1 - (L_3 - M_3) v_2 - (L_2 - M_2) v_3 + (L_1 - M_1) v_4 = 0, \end{cases}$$

weil die zyklische Vertauschung von λ_2, λ_4, λ_6 die Ausdrücke L_k, M_k, N_k in § 52, (19) selbst zyklisch vertauscht. Die Gleichungen der Pascalebenen und Brianchonpunkte der drei Sechsseite (3') entstehen aus (18) und (18') durch Vertauschung von λ_2 und λ_4.

Da nun identisch:

$$(19)\qquad \begin{array}{ll} \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0, & P_1 + P_2 + P_3 = 0, \\ \Pi_1' + \Pi_2' + \Pi_3' = 0, & P_1' + P_2' + P_3' = 0, \end{array}$$

so folgt (I § 51, (7)):

Die drei Pascalebenen der Sechsseite S_1, S_2, S_3 *in* (3), *sowie* S_1', S_2', S_3' *in* (3′) *gehen je durch eine Gerade und die drei Brianchonpunkte der Sechsseite* S_1, S_2, S_3, *sowie* S_1', S_2', S_3' *liegen in einer Geraden (Steinerschen Geraden).*

Die Geraden seien mit g, g', h, h' bezeichnet:

$$(20)\qquad \begin{array}{ll} \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3 = g, & P_1 P_2 P_3 = h, \\ \Pi_1' \times \Pi_2' \times \Pi_3' = g', & P_1' P_2' P_3' = h'. \end{array}$$

Da aber der Punkt P_1 nach (2′) auf der Verbindungslinie von E_{12} und E_{45}, von E_{34} und E_{61}, von E_{56} und E_{23} liegt, liegt er nach (5′) auf den Ebenen Π_1', Π_2', Π_3'. Dasselbe gilt von P_2, da er nach (4′) auf der Verbindungslinie von E_{14} und E_{65}, E_{43} und E_{52}, E_{36} und E_{21} liegt, ebenso von P_3. Da somit P_1, P_2, P_3 alle auf g' und ebenso P_1', P_2', P_3' auf g liegen, so ist nach (20):

$$(21)\qquad h = g', \quad h' = g.$$

Zugleich folgt aber aus **7**:

Die beiden Steinerschen Linien (21) *sind reziproke Polaren in bezug auf die Linienfläche, auf der die Sechsseite* (3), (3′) *liegen.*

10. Übergang auf die Kurven und Kegel zweiter Ordnung und Klasse.

Schneidet man das auf einer Linienfläche verzeichnete Sechsseit mit einer Ebene A, so liefern die sechs Seiten g_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) des Sechsseits die sechs Ecken G_k *eines der Schnittkurve einbeschriebenen Pascalschen Sechsecks* und die neun Seitenebenen E_{kl} neun Seiten e_{kl} dieses Sechsecks ($k = 1, 3, 5$; $l = 2, 4, 6$) (§ 52, **11**).

Die sechs Pascalschen Ebenen Π_k, Π_k' ($k = 1, 2, 3$) liefern die sechs Pascalschen Linien der den Kombinationen (3), (3′) entsprechenden Pascalschen Sechsecke, die

Projiziert man das auf einer Linienfläche verzeichnete Sechsseit von einem Punkte A, so liefern die sechs Seiten g_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) des Sechsseits die sechs Seitenebenen Γ_k *eines dem Berührungskegel umbeschriebenen Brianchonschen Sechsflachs* und die neun Eckpunkte E_{kl} neun Kanten dieses Sechsflachs ($k = 1, 3, 5$; $l = 2, 4, 6$).

Die sechs Brianchonpunkte P_k, P_k' ($k = 1, 2, 3$) liefern die sechs Brianchonschen Linien der den Kombinationen (3), (3′) entsprechenden Brianchonschen Sechs-

wieder zu je dreien durch die Steinerschen Punkte G und G' gehen, in denen die Steinerschen Linien g und g' die Ebene Α schneiden.

Die Steinerschen Punkte G und G' sind nach 9 harmonische Pole in bezug auf die Schnittkurve.

Die Verbindungsfigur der Ebene Α mit einem Punkte A führt auf *das einem Kegel zweiter Ordnung einbeschriebene Pascalsche Sechskant.*

flache, die wieder zu je dreien in den Steinerschen Ebenen Γ und Γ′ liegen, welche die Steinerschen Linien g und g' mit dem Punkte A verbinden.

Die Steinerschen Ebenen Γ und Γ′ sind nach 9 harmonische Polarebenen in bezug auf den Kegel.

Die Schnittfigur des Bündels am Punkte A mit einer Ebene Α führt auf *das einem Kegelschnitt umbeschriebene Brianchonsche Sechsseit* (§ 37, 4).

Anmerkungen.

In den Anmerkungen sind einige häufiger angeführte Werke *abgekürzt* bezeichnet. Die zugehörigen *vollen* Titel folgen hier zur schnellen Auffindung in *alphabetischer* Reihenfolge.

Die Angaben, wie § 3, 2 und § 3, (2), beziehen sich überall auf §, Artikel **(ohne Klammern)** und Formeln **(mit Klammern)** des vorstehenden Textes; die Angaben I § oder I Anm. ebenso auf das vorausgegangene Buch des Verfassers: Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, 1905.

Apollonii Pergaei quae Graece exstant (Conicorum libri IV, um 250 v. Chr.), ed. *J. L. Heiberg,* Leipzig, Bd. 1, 1891; Bd. 2, 1893 [abgekürzt: Apollonius, Con.; Seitenzahlen auf Heib. bezüglich].

Baltzer, R., Analytische Geometrie, Leipzig 1882 [Baltzer, Geom.].

—, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Auflage, Leipzig 1875 [Baltzer, Det.].

Bopp, K., Die Kegelschnitte des *Gregorius a St. Vincentio* (1647), Leipzig 1907 [Bopp, Greg.].

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, Bd. 1, 3. Aufl. 1907; Bd. 2, 2. Aufl. 1900; Bd. 3, 2. Aufl. 1901; Bd. 4, 1908 [Cantor 1, 2, 3 oder 4].

Cauchy, A. L., Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, Paris, t. 1. 1826 [Cauchy, Applic.].

—, Exercices de mathématiques, 1.—4. année, Paris 1826—29 [Cauchy, Exerc.].

Chasles, M., Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837 [Chasles, Aperçu].

—, Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré, Bruxelles, Mém. Acad. V, 1829 [Chasles, Recherches].

—, Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré, Bruxelles, Mém. Acad. VI, 1830 [Chasles, Cônes].

Clebsch, A., — Lindemann, F., Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, 2. Aufl.. Leipzig 1906 [Clebsch-Lindemann, Ebene].

—, Vorlesungen über Geometrie, Bd. 2, Leipzig 1891 [Clebsch-Lindemann, Raum],

Desargues, G., Oeuvres par G. Poudra, Paris 1864 [Desargues, Oeuvres].

Dingeldey, F., Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, Encyklopädie der math. W. III, C, 1 [Dingeldey, Encykl.].

Dupin, Ch., Développements de géométrie, Paris 1813 [Dupin, Dével.].

Dyck, W., Katalog mathematischer Modelle, München 1892 [Dyck, Katalog].

Euler, L., Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748 [Euler, Introd.].

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, Leipzig, 2. Aufl. 1873 [Hesse, Ebene].
—, Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1874 [Hesse, Sieb. Vorl.].
—, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig, 3. Aufl. 1876 [Hesse, Raum].
Klein, F., Einleitung in die höhere Geometrie, autograph. Vorl. Bd. 1, Göttingen 1893 [Klein, Vorles.].
Klügel, G. S., Mathematisches Wörterbuch, Leipzig, Bd. 2, 1805; Bd. 3, 1808; Bd. 4, 1823 [Klügel 2, 3, 4].
Kötter, E., Bericht über die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. der D. Math. Vereinigung 5, 1901 [Kötter, Ber.].
Lamé, G., Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818 [Lamé, Exam.].
Lie, S. — Scheffers, G., Vorles. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891 [Lie-Scheffers, Differentialgl.].
—, Vorles. über kontinuirliche Gruppen, Leipzig 1893 [Lie-Scheffers, kontin. Grupp.].
—, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896 [Lie-Scheffers, Berühr.-Transf.].
Magnus, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd. 1, 1833; Bd. 2, 1837 [Magnus, Aufg.].
Müller, F., Historisch-etymologische Studien über mathem. Terminologie, Programm, Berlin 1887 [F. Müller, Progr.].
—, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1892 [F. Müller, Tafeln].
Pappus, Alexandrinus, Collectio, ed. F. Hultsch, Berlin, Bd. 1—3, 1875—78 [Pappus, Coll.].
Plücker, J., Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen, Bd. 1, 1828; Bd. 2, 1831 [Plücker, Entw.].
—, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835 [Plücker, System 1835].
—, System der analytischen Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846 [Plücker, System 1846].
—, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, Bd. 1, 1865 [Plücker, N. Geom.].
Poncelet, J. V., Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822 [Poncelet, Traité].
Reye, Th., Die Geometrie der Lage, Leipzig, 4. Aufl., Abt. 1, 1899; Abt. 2, 1907; Abt. 3, 1910 [Reye, G. d. L.].
Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, 4. Aufl. 1878 [Salmon-Fiedler, Kegelschn.].
—, Analytische Geometrie des Raumes, 1. Teil, Leipzig, 4. Aufl. 1898 [Salmon-Fiedler, Raum].
Schröter, H., Die Theorie der Kegelschnitte, Leipzig, 2. Aufl. 1876 [Schröter, Kegelschn.].
—, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880 [Schröter, Oberfl.].
v. Staudt, G. K. Chr., Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 [v. Staudt, G. d. L.].
—, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856—60 [v. Staudt, Beitr.].
—, Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen 2. O., Nürnberg 1867 [v. Staudt, Halbm.].

Study, E., Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903 [Study, Dyn.].
Sturm, R., Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie, Leipzig 1892/3 [Sturm, Liniengeom.].
Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik, Leipzig 1902/3 [Tropfke, Gesch.].
Zeuthen, G. H., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886 [Zeuthen, Kegelschn.].
—, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896 [Zeuthen, Gesch. A. M.].
—, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsch von R. Meyer, Leipzig 1903 [Zeuthen, Gesch. XVI; XVII].

---

1. **Namen der Kurven und Flächen 2. Ordnung.** I. Die Namen *Ellipse, Hyperbel* § 1, 1 und *Parabel* § 2, 1 (ἔλλειψις, ὑπερβολή, παραβολή) rühren her von *Apollonius*, Con. lib. I, art. 13; 12; 11 (Heib. 1, S. 48; 42; 38); s. *Cantor* 1, S. 335. Über ihre Entstehung und ihre Bedeutung bei Flächenanlegungen s. Cantor 1, S. 171; 288—290. Der Name *Kegelschnitt* § 3, 4; § 115, 9 (κώνου τομή) geht auf *Menächmus* (um 350 v. Chr.) zurück, s. *F. Müller*, Progr., S. 25; s. Anm. 183. Den Ausdruck *Kurve 2. Ordnung* (linea secondi ordinis) § 9, 2 braucht *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 54.

II. Der Name *Paraboloide* oder conoide parabolique, neben conoide hyperbolique und elliptique für die entspr. Rotationsfl. (Anm. 137) bei *J. Ozanam*, Dictionnaire mathématique, Amsterdam 1691, S. 121. Die Namen *Ellipsoeides, Hyperboloeides, Paraboloeides* tauchen auf bei *J. Wallis* (1695) nach *Kötter*, Ber. S. 66; *superficies elliptoidis, elliptico-hyperbolica, hyperbolico-hyperbolica, elliptico-parabolica, parabolico-hyperbolica* bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 117—125; *Ellipsoide, hyperboloide à une nappe, — à deux nappes, paraboloide elliptique, — hyperbolique* bei *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 158—161; 166; *Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid* § 55, 1; § 56, 1 neben Sphaeroid, Konoid bei *Klügel* 3 (1808), S. 305; 4 (1823), S. 375. *Fläche 2. Ordnung* (superficies secundi ordinis) § 66, 2 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 101; *Klügel* 3, S. 304.

2. **Brennpunkte der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel* § 1, 1 werden von *Apollonius*, Con. III, art. 45 (Heib. 1, S. 424) als σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς γεννηθέντα (puncta adplicatione orta) bezeichnet, s. *Cantor* 1, S. 339. Der Brennpunkt der Parabel § 2, 1 kommt erst bei *Pappus* von Alexandrien (um 295 n. Chr.), Coll. lib. VII, prop. 238 (Hultsch 2, S. 1015) ohne Namen vor, s. *Cantor* 1, S. 344. *Kepler*, Paralip. (1604), Opera omnia, ed. Frisch 2, S. 185—188 nennt den Brennpunkt *focus* (Jahrb. d. Fortschr. 12 [1880], S. 35); der Parabel schreibt er einen *unendlich fernen* oder *blinden* Brennpunkt zu. Bei *Desargues* (1639), Oeuvres 1, S. 210; 286 heißt der Brennpunkt *foyer*. *Gregorius a St. Vincentio* (1647) nennt die Brennpunkte *poli seu foci*, s. Bopp, Greg., S. 108. Die *imaginären* Brennpunkte § 13, 8 bei *Poncelet*, Ann. de math. 8 (1817/8), S. 222 nach Dingeldey, Encykl. S. 54; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (1). Bei der Ellipse und Hyperbel von gegebenen Halbachsenquadraten a^2, b^2 erscheinen die Brennpunkte § 1, (12), (12') im wesentlichen als die von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängigen Punkte der Hauptachsen § 13, (26), bei der Parabel von gegebenem Parameter p der Brennpunkt § 2, (13) als der vom Scheitel um $\frac{p}{2}$ entfernte Punkt der Hauptachse mit der Ordinate p, § 3, 1; vgl. *Zeuthen*, Gesch. A. M., S. 210.

II. Die Erklärung der Brennpunkte als Scheitelpunkte solcher Tangentenpaare, die *Kreisstrahlenpaare* sind, § 13, 8, II; 16, II, oder, was dasselbe ist, als Punkte, an denen die von dem Kegelschnitt bestimmte Involution harmonischer Polaren eine *Involution rechter Winkel* ist, § 20, 4, I; 16, I, setzt mit *De la Hire*, Sect. con. (1685), lib 8, propr. XXIII, ein und entwickelt sich weiter bei *Poncelet*, Ann. de math. 8 (1817/8), S. 222; Traité (1822), art. 451; 453; *Chasles*, Cônes (1830), S. 12; *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 64; (1832) Gesammelte Abhandl., S. 291; System (1835), S. XI; 102; System (1846), S. 278.

III. Ein vom Punkte P an einen Kegelschnitt gelegtes Tangentenpaar kann auch als ein *Linienpaar* bezeichnet werden, *das P als Mittelpunkt hat und den Kegelschnitt doppelt* (in zwei Punkten S, S) *berührt*. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte S, S, die *Berührungssehne*, ist die Polare von P. Ist nun das Tangentenpaar ein Kreisstrahlenpaar, so ist *P der Mittelpunkt eines Kreisstrahlenpaares, das den Kegelschnitt doppelt berührt*, und umgekehrt. Daher kann Auffassung II auch in der Form § 127, 11, IV gegeben werden, *Poncelet*, Traité (1822), art. 457; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn, S. 350.

IV. Durch Verbindung der II. Auffassung mit dem Begriff der *Kurvenschar* erhält man die Erklärung der Brennpunkte des Kegelschnittes als *Punktepaare* in der durch ihn und die imaginären Kreispunkte bestimmten *Schar*, § 32, 11; § 34, 10; § 20, 23 nach *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 167ff.; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47).

V. Als *Doppelpunkte der Involutionen*, in denen zwei *senkrechte harmonische Polaren* eine Hauptachse schneiden, § 20. 6; 18, entstehen die Brennpunkte bei *Chasles*, Aperçu, Note XXXI, art. (18). Wenn zwei Gerade in bezug auf *zwei* Kegelschnitte einer Schar § 32, (12) harmonische Polaren sind ($F_{12} = 0$, $G_{12} = 0$, § 17, (2)), sind sie es in bezug auf *alle* ($F_{12} - \mu G_{12} = 0$). Zwei senkrechte harmonische Polaren eines Kegelschnittes, die durch einen Punkt P gehen, sind aber harmonische Polaren in bezug auf den Kegelschnitt und das Kreispunktepaar (§ 20, 22, II), also in bezug auf alle Kegelschnitte der Schar, § 32, (14), darunter die Punktepaare, § 32, (24). Daher sind sie harmonisch zu den reellen oder imaginären Brennstrahlen des Punktes P; *Plücker*, System (1846), S. 280. Somit beruht die Auffassung V auch wieder auf der Auffassung IV.

VI. Die Brennpunkte der *Rotationsflächen* erscheinen, analog der Auffassung II, als Scheitelpunkte solcher Berührungskegel, die *Kugelkegel* sind, § 70, 5; 12, im wesentlichen nach *Chasles*, Recherches (1829), S. 27.

VII. Die *Hauptbrennpunkte* der *Ellipsoide*, *Hyperboloide* und *Paraboloide* (foyers principaux) treten als Brennpunkte der Hauptschnitte, § 55, 3; 7; § 56, 3; 7, auf bei *Dupin*, Dével. (1813), S. 315, bei Ellipsoiden und Hyperboloiden von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängig, § 55, (6), bei den Paraboloiden um die halben Parameter vom Scheitel entfernt, § 56, (17), wie bei Auffassung I. *Brennpunkte* schlechthin sind nach *Plücker*, System (1846), S. 254 *alle* Punkte der Fokalkegelschnitte [s. Anm. 144].

3. **Brennpunktseigenschaften der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Fokaleigenschaft der Ellipse und Hyperbel* § 1, (3) bei *Apollonius*, Con. III, art. 51; 52 (Heib. 1, S. 434; 436) nach *Cantor* 1, S. 339; als Ausgangspunkt der analyt. Darstellung bei *De la Hire* (1679) nach *Tropfke*, Gesch. 2, S. 452 und bei *Vega* (1786) nach *Cantor* 4, S. 461. Über die Fokaleigenschaft *der Parabel* vgl. Anm. 16.

II. Die entsprechende Eigenschaft der *sphärischen Ellipse* § 130, 4 gab *N. v. Fuß,* Nova acta. Petrop. 3 (1788), S. 90 nach *Chasles,* Aperçu V, art. 42; Cantor 4, S. 386; vgl. *C. J. Brianchon,* lignes du 2 ordre (1817), S. 15; die des *elliptischen Kegels,* § 130, 4, *J. Magnus,* Ann. de math. 16, 182 5/6, S. 33 und Aufg. 2 (1837), S. 170; *Chasles,* Cônes (1830), S. 21; *Plücker,* System (1846), S. 312.

III. Die entsprechende Eigenschaft der *Ellipsoide* und *Hyperboloide* § 134, 12 gab *O. Staude,* Leipz. Ber. 1882, S. 19; Math. Ann. 20 (1882), S. 183; vgl. die ausführl. Darstellung bei *Staude,* Die Fokaleigenschaften der Flächen 2. O., Leipzig 1896. Diese Fokaleigenschaften (Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen) § 132, 10 schliessen sich schon *der Form nach am engsten* an diejenigen der Ellipse und Hyperbel in der Ebene an, enthalten ferner die letzteren als *Spezialfälle* (Hauptschnitte, § 134, 14) in sich und bringen auch den *Unterschied* der Ellipsoide und Hyperboloide (*Summe und Differenz,* § 134, (30)—(32)) genau so, wie in der Ebene zur Geltung. *Charakteristisch* ist auch die Analogie der Formeln, § 33, (10) und § 134, (23'), welche die Fokaldistanzen durch *ellipt. Koord.* darstellen, *Jacobi,* Vorles. Dynamik (1866), S. 222; *Staude,* Math. Ann. 20, S. 182. Die Fokaleigensch. des *hyperbol. Paraboloids,* § 137, 12, II, lehnt sich an die der Hyperboloide an (Differenz der Fokaldist.).

4. Identität der Fokaleigenschaften. Die *Identität* § 1, (6) für die *Ellipse* und *Hyperbel* gibt im wesentlichen *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 45; *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 7; die der Parabel § 2, (8) ist danach gebildet.

Die entsprechende Identität für den *Kegel* § 130, (14) im Anschluß an *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 170; diejenigen für die Ellipsoide und Hyperboloide § 134, (19) und die Paraboloide § 137, (17) von *O. Staude,* Leipz. Ber. 1897, S. 83; 179; Math. Ann. 50 (1897), S. 399. Bereits *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (29), vermutet, daß die Fokaleigensch. der Fl. 2. O. auf eine kubische Gl. führen.

5. Hauptachsen und Hauptebenen der Kurven und Flächen 2. O. I. Die *Hauptachsen der Ellipse* § 1, 5; 6 unterschied *Archimedes* (um 237 v. Chr.) als μείζων und ἐλάσσων διάμετρος nach *F. Müller,* Progr. S. 27; die Hauptachse der *Parabel* § 2, 5 nannte er διάμετρος. Die Hauptachsen (ἄξονες) der Ellipse und *Hyperbel* als zwei rechtwinklige konj. Durchmesser § 14, 5, I bei *Apollonius,* Con. I, Def. (Heib. 1, S. 8) nach *F. Müller,* Progr. S. 27.

II. Die *innere Hauptachse* des Kegels, § 54, 4, heißt bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 68, schlechthin *Achse,* bei *Chasles,* Cônes (1830), S. 6, axe principal, die *Hauptebene der größten und kleinsten Öffnung* § 54, 4 nennt *Chasles,* ebd., S. 6, *grande et petite section.*

III. Die *Hauptachsen* und *Hauptebenen* der *Ellipsoide* und *Hyperboloide,* § 55, 2 und der *Paraboloide,* § 56, 2, bemerkt *Euler,* Introd. 2, App. art. 115; 116; 123 im Anschluß an die Hauptachsengleichungen; „Hauptebene der kleineren Öffnung“ beim Paraboloid § 56, 9 nach *Dupin,* Dével. (1813), S. 282 („petite section principale“); s. Anm. 88.

6. Begriff und Bedingungsgleichungen des Mittelpunktes. I. Der *Mittelpunkt* der *Ellipse* § 1, 5 bei *Archimedes* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 445, der Ellipse und *Hyperbel* bei *Apollonius,* Con. I, art. 16 (Heib. 1, S. 66) nach Cantor 1, S. 336; *F. Müller,* Progr. S. 27; *Greg. a St. Vicentio* definiert den Mittelp. der Ellipse als den Punkt, in dem jeder Durchmesser halbiert wird, und den der Hyperbel als Halbierungspunkt des ersten Durchmessers, des

latus transversum, s. *Bopp*, Greg., S. 108; 241. Der Mittelpunkt *der allg. Kurve 2. O.* (Centrum) § 11, 4 bei *Euler*, Introd. 2, art. 107; die *Bedingungsgleichungen* § 11, (7) bei *Lamé*, Exam. 1818, S. 71; *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 73. Als *Pol der unendl. fernen Geraden* § 11, 12; § 11, 16, IV bei *Fr. Aguilonius* (1613) nach *Kötter*, Ber S. 5; *Desargues* (1639), Œuvres 1, S. 215 ff.; S. 291 ff. und *De la Hire* (1685) nach *Kötter*, Ber. S. 52; bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 116.

II. Der Mittelpunkt der *Ellipsoide* und *Hyperboloide* § 55, 2 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 116; 119; *der allg. Fläche 2. O.* § 68, 4 bei *Euler*, ebd. art. 115; die *Bedingungsgleichungen* § 68, (6) bei *J. P. de Gua* (1740) nach *Cantor* 3, S. 795; *Lamé*, Examen (1818), S. 41; *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 4; *Hesse*, Raum, S. 157. Als Pol der unendl. fern. Ebene § 68, 11 bei *Poncelet*, Traité, art. 591.

III. Die *Bedingungsgl.* für den Mittelp. *der ebenen Schnitte* § 106, (26) bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 265; s. Anm. 92.

7. **Scheitelpunkte und Scheitellinien.** I. Der *Scheitelpunkt der Parabel* § 2, 5 bei *Archimedes* (κορυφή, vertex segmenti parabolae), de conoid. et sphaeroid., nach Tropfke, Gesch. 2, S. 445; für *Ellipse* und *Hyperbel*, § 1, 5, und Parabel bei *Apollonius*, Con. I, art. 17 (Heib. S. 68); des Paraboloids § 56, (4) bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 247; 249.

II. Die *Scheitellinie* des *parabol. Zylinders*, § 53, 10, bei *Plücker*, System (1846), S. 149. Die Scheitellinien des *Kegels* § 54, 5 bei *Chasles*, Cônes (1830), S. 6; Scheitel- und Nebenscheitellinien bei *Plücker*, System (1846), S. 301; 306; *Reye*, G. d. L. 1, S. 219. Die *Scheitelerzeugenden des hyperbol. Paraboloids* § 56, (13); § 65, (6) bemerkt *Euler*, Introd. 2, App. art. 125.

8. **Hauptachsengleichungen der einzelnen Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Hauptachsengleichung* der *Ellipse* und *Hyperbel* § 1, (13); (13′) im Sinne der anal. Geom. bei *P. de Fermat* (vor 1637) nach *Cantor* 2, S. 818 und *De la Hire* (1679) nach *F. Müller*, Progr. S. 27; bei *Euler*, Introd. 2, art. 138 noch in der Form $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; die Hauptachsengleichung der *Parabel*, § 2, (17), bei *Stirling* (1717) nach *Cantor* 3, S. 434.

II. Die Hauptachsengleichung des *Kegels* § 54, (14) bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 68; die der *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Parabaloide* § 55, (7); § 56, (16) bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 116; 119; 122; 124; 125; die des Paraboloids § 56, (16), auch bei *Meusnier* (1776) nach *Cantor* 4, S. 547; 1087.

9. **Unendlich ferne Elemente der Kurven und Flächen 2. O.** I. Von unendl. fern. Punkten oder Ästen der Hyperbel oder Parabel, § 1, 7; § 2, 9, ist bei *Gregor. a St. Vicentio* (1647) die Rede nach *Bopp*, Greg., S. 245; 235. Die *Gleichung*, § 9, (25), des *u. f. Punktepaares der Kurve 2. O.* und die Art dieses Punktepaares als *Einteilungsgrund*, § 21, 14 und § 26, (2), Z. 1—3, bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 219 (und 137); auch bei *Cramer* (1750) nach *Cantor* 3, S. 835; *Klügel* 3 (1808), S. 185. Die unendlich ferne *Gerade* als *Tangente* der Parabel, § 13, 14, bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 132.

II. Die Gleichung der *u. f. Kurve der Fläche 2. O.*, § 66, (23) und ihre Art als *Einteilungsgrund*, § 80, (21); § 99, (2), Z. 1—4, sachlich bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 105—112; die u. f. *Geraden* des *hyperbol. Paraboloids*, § 65, (11), erwähnt *Poncelet*, Traité (1822), art. 594 und die u. f. *Ebene* als *Tangentialebene* § 70, 10 *Poncelet*, ebd. art. 591; 622.

III. Ein *u. f. Kegelschnitt,* § 80, (20), ist nach *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 139 als Schnitt des Kegels 2. O., § 80, (1), mit der u. f. Ebene *definiert;* in diesem Sinne ist die Einteilung. § 80, (21), eine unmittelbare Folge von § 80, (17).

10. Asymptoten und Asymptotenkegel. I. Die *Asymptoten der Hyperbel* muß, nach Cantor 1, S. 231, *Menächmus* (um 350 v. Chr.) gekannt haben. *Archimedes* nennt sie *αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς*, die engstanschliessenden Geraden, nach F. Müller, Progr. S. 27; *Apollonius*, von dem der Name *ἀσύμπτωτοι* herrührt, behandelt sie Con. II, art. 1 (Heib. 1, S. 194) s. Cantor 1, S. 337. Sie heißen non coincidentes bei *Joh. Werner* (1522) nach Cantor 1, S. 456; die Lini, die in die weitten läuft und nimmer mehr zu keym end kombt bei *A. Dürer,* Unterweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt (1525) nach F. Müller, Abh. z. Gesch. der Math., Heft 9 (1899), S. 329. Als Tangenten angesehen u. anal. bestimmt, § 13, 7, bei Desargues Oeuvres 1, S. 210; *Klügel* 2 (1802), S. 717; *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 62 unter Bezugnahme auf *Ampère; Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. 157.

II. Der *Asymptotenkegel* der *Hyperboloide* und seine Lage gegen diese § 55, 9 nach *Euler*, Introd. 2, App. art. 120; 122; vgl. *Hesse*, Raum S. 166. Die *Asymptotenebenen* des *hyperbol. Paraboloids* § 62, 3 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 125; s. Anm. 155.

Die Gl. des Asymptotenkegels in *Ebenen*koord. § 111, (19) bei *Hesse*, Vorl. Raum, S. 394.

11. Fadenkonstruktionen. Die *Faden*-(Gärtner-) *Konstruktion* der *Ellipse* § 1, 9 von den drei Brüdern *Muḥammed, Aḥmed, Alḥasan* um 865 nach Cantor 1, S. 733; sie findet sich auch bei *Guidobaldo del Monte* nach Cantor 2, S. 568 und nach *v. Braunmühl,* Dyck, Katalog, S. 59; die Fadenkonstruktion der *Hyperbel* § 1, 9 von *Guidobaldo del Monte* in seiner Theoria planisphaericorum 1579 nach v. Braunmühl, ebd. S. 65, und *Fr. van Schooten*, Exercit. mathem. (1646) nach Klügel 2, S. 720; der *Parabel* § 2, 8 von *van Schooten* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 450; s. auch *Klügel* 3, S. 721.

Die Fadenkonstruktion der *sphärischen Ellipse* § 130, 6 von *N. v. Fuss* (1788), s. Anm. 3.

Die Fadenkonstruktion des *Ellipsoides* § 134, 14, welche in den beiden ersten Hauptschnitten diejenige der Ellipse unmittelbar in sich einschließt, von *O. Staude*, Leipz. Ber. 1882, S. 5; Math. Ann. 20 (1882), S. 183. Das zugehörige *Modell* von *Staude* vgl. Dyck, Katalog, S. 288.

12. Gleichseitige Hyperbel. I. Die *gleichseitige Hyperbel* § 1, 10 wird von *Alsidschzi* (972) zur Dreiteilung des Winkels gebraucht nach Cantor 1, S. 750. Ihre Gleichung § 1, (22) findet sich bei *De la Hire* (1679) nach Cantor 3, S. 128; ebenso bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 159; vgl. *Brianchon-Poncelet*, Ann. de math. 11 (1820/1), S. 205—220; *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 188; *H. Bobillier*, Ann. de math. 19 (1828/9), S. 349.

II. Die *gleichseitige kubische Hyperbel* mit drei rechtw. Asymptoten § 85, 12 bei *Th. Reye*, Mitt. der Hamburger math. Gesellsch. 2 (1890), S. 56; G. d. L. 2, S. 180; 218.

13. Konjugierte Hyperbeln und Hyperboloide. *Konjugierte Hyperbeln* § 1, 11 betrachtet *Apollonius* Con. I, art. 60; II, art. 17 (Heib. 1 S. 190; 220), sie heißen bei ihm *τομαὶ συζυγεῖς* oder *ἀντικείμεναι κατὰ συζυγίαν τομαί* (sectiones

oppositae). Die Deutung § 1, (24) ihrer Gleichung bei *Plücker*, Syst. (1835), S. 91. Konjug. Hyperboloide s. Anm. 74, III.

14. Direktrix und Direktrixebenen. I. Der Name *Direktrix* § 2, 1 bei der *Parabel* von *De l'Hospital* (vor 1704) nach Dingeldey, S. 12, bei der *Ellipse* und *Hyperbel* § 4, 5 dem Begriff nach bei *Pappus*, Coll. VII, propr. 235; 238 (Hultsch 2, S. 1004; 1012); allg. Definition der Direktrix einer Kurve bei *Joh. Bernoulli*, Acta erud. 1694, S. 435; dann bei *Raabe*, J. f. Math. 2 (1827), S. 330. Die Direktrix *als Polare des Brennpunktes* § 20, 3 bei *De la Hire*, Sect. con. (1685) 8, propr. 26 und *Poncelet*, Traité (1822), art. 452.

II. Die *Direktrixebene des Kegels* (plan directeur) führt *Chasles*, Cônes (1830), S. 29 als *Polarebene der Fokallinie* § 128, (27) ein, auch bei *Plücker*, System (1846), S. 308.

III. Die Direktrix § 127, 5; § 128, 5 und *Direktrixebenen* § 127, 11 eines Fokalpunktes *bei den Flächen 2. O.* führen *B. Amiot*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 163 und *Mac-Cullagh* (1843), Works, S. 262 ein; vgl *Plücker*, System (1846), S. 293.

IV. Die *Hauptdirektrixebenen des elliptischen Paraboloids* § 137, 11 als *Polarebenen der beiden Hauptbrennpunkte* bei *Staude*, Leipz. Ber. 1895, S. 486.

15. Parameter der Kurven und Flächen 2. O. I. Für *Parameter* § 2, 2; § 3, 1 ursprünglich *ὀρθία*, *latus rectum* (Senkrechte zur Achse) bei *Apollonius*, Con. I, art. 11 (Heib. 1, S. 42); *ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά*, *rectum figurae latus* bei *Pappus* 4, prop. 33 (Hultsch. 1, S. 278); ebenso bei *Gregorius* I def. 5; II def. 4; III def. 7, s. Bopp, Greg., S. 108; 161; 241; *chorda* oder *sagitta* bei *Kepler*, Op. omnia 2, S. 185—188. *Parameter* zuerst bei *Cl. Mydorge* (1631), nach Tropfke, Gesch. 2, S. 427; *Wallis*, Opera 1, Oxoniae (1695), S. 310; *costé droit* bei *Desargues* 1, S. 205; latus rectum bei *Jac. Bernoulli*, Acta Erud. 1689, S. 586; Die Formel § 3, (2) bei *Euler*, Introd. 2, art. 128—130.

II. Die *Parameter des Paraboloides* § 56, 5 sind ebenfalls Ordinaten der Hauptbrennpunkte nach *Plücker*, System (1846), S. 166.

16. Brennpunkt-Direktrixeigenschaft der Kurven und Flächen 2. O. I. Die *Brennpunkt-Direktrixeigenschaft* der drei *Kegelschnitte* § 2, (6); § 4 (32); (34) kannte nach Zeuthen, Kegelschn. S. 367 ff. wahrscheinlich *Euklid*. Erwähnt wird sie von *Pappus* (295 n. Chr.), Coll. VII, propos. 238 (Hultsch. 2, S. 1004); s. Tropfke, Gesch. 2, S. 447; 451; 455; Dingeldey, Encykl., S. 12.

II. Die *Brennlinien-Direktrixebeneneigenschaft* des *Kegels* § 128, 9 von *Chasles*, Cônes (1830), S. 44; der Fall $\varkappa^2 = 1$ ebd.; vgl. *Hachette*, Quet. Corr. 4 (1828), S. 285.

III. Die *Brennpunkt-Direktrixeigenschaft* der *Flächen 2. O.* § 127, 7—9; § 128, 6—7 gab für imaginäre Direktrixebenen *Mac-Cullagh*, Dubl. Proc. 2 (1843), S. 446 = Works, S. 269. Sie schließt sich nicht nur *der Form nach aufs engste* an diejenige der Kegelschnitte an, sondern enthält die letztere auch als *Spezialfall* in sich (in den Hauptschnitten § 127, 7; § 128, 7) vgl. *Plücker*, System (1846), S. 292; *Schröter*, Oberfl. S. 623.

Die von *B. Amiot*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 163 ff. angegebene *Brennpunkt-Direktrixebeneneigenschaft der Flächen 2. O.* § 127, 7; 9. § 128, 6 für reelle Direktrixebenen erstreckt sich nicht auf *alle* Flächen 2. O., vgl. *Amiot*, ebd. S. 188.

IV. Die *Brennpunkt-Direktrixebeneneigenschaft* des *elliptischen Paraboloides*

§ 137, 11, I, die eine vollkommene Analogie mit der der Parabel darbietet und in den beiden Hauptebenen direkt in die der Parabel übergeht, § 137, 14, von *Staude*, Leipz. Ber. 1895, S. 487.

17. **Die Scheitelgleichungen.** I. Die *Scheitelgleichung* der *Kegelschnitte* § 2, (12) und § 3, (6); (8)—(10) inhaltlich bei *Archimedes* und *Apollonius* nach F. Müller, Progr. S. 26; Tropfke, Gesch. 2, S. 437ff., im Sinne der analyt. Geometrie bei *Descartes* (1637) nach Cantor 2, S. 815. Die Parabel als *Übergangsfall* zwischen Ellipse und Hyperbel § 3, 3 bei *Kepler* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 177; s. *Euler*, Introd. 2, art. 149.

II. Die Scheitelgleichung der Flächen 2. O. ist nur beim *Paraboloid* § 56, (16) üblich und hier von *Euler*, Introd. 2, App. art. 124 angegeben; das Paraboloid als Grenzfall des Ellipsoides oder Hyperboloides bei *Dupin*, Dével. (1813), S. 222.

18. **Die Asymptotengleichungen.** I. Die *Asymptotengleichung der Hyperbel* § 3, (15) in umschriebener Form § 3, (16) bei *Menächmus*, dem Erfinder der Kegelschnitte (um 350 v. Chr.) nach Cantor 1, S. 231; auch bei *Joh. Werner* (1522) und *Fr. Maurolico* (1570) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 176; im Sinne der analytischen Geometrie bei *Fermat* (um 1650) nach Cantor 2, S. 817; unmittelbar in der Form § 3, (15) bei *Euler*, Introd. 2, art. 161.

II. Die *Asymptotenebenengleichung* § 62, (7) des *hyperbol. Paraboloids* zuerst bei *Tinseau* (1774) nach Cantor 4, S. 557 (Sonderfall von § 74, (33)); *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 250.

III. Die *Asymptotengleichung der Hyperboloide* § 74, (8) bei *Steiner* (1827), Werke 1, S. 150; *Plücker*, System (1846), S. 233.

19. **Exzentrizität.** I. Über die Benennung *lineare e* und *numerische Exzentrizität* ε § 4, (3) s. F. Müller, Progr. S. 28; daß das Verhältnis $r:d = \pm \varepsilon$ ist § 4, (18) bemerkt *Gergonne*, Ann. de math. 16 (1826), S. 369; *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161.

II. Beim *Ellipsoid* nennt *P. S. Laplace* (1782), Mécanique céleste 2 (1799), S. 16 die Größen e und $\sqrt{e^2-d^2}$ § 55, (4); (4') die beiden Exzentrizitäten; ebenso *J. Jvory*, Phil. Trans. London 1809^{II}, S. 351; *C. F. Gauss* (1813), Werke 5, S. 19.

20. **Brennpunktsgleichungen.** I. Die *Brennpunktsgleichung* der Kegelschnitte § 4, (10); (11) gibt *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161; mit der Ableitung § 4, 5 *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 132; vgl. *Baltzer*, Geom., S. 230. Charakteristisch ist für sie die Form $f = K - U^2 = 0$, wo $K = 0$ ein Kreisstrahlenpaar und $U = 0$ die Direktrix ist; s. Anm. 21.

II. Die Brennpunktsgleichungen der Flächen 2. O. ist nach § 127, (29) von der Form $f = K - UV = 0$, wo $K = 0$ ein Kugelkegel und $U = 0$, $V = 0$ die Direktrixebenen sind, und wird von *Amiot* und *Mac Cullagh* erhalten, s. Anm. 16.

21. **Die Identitäten der Direktrixeigenschaften.** I. Die Identität § 4, (27); (28) der *Direktrixeigenschaft* der Kegelschnitte im wesentl. bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161 und Exerc. 3 (1827), S. 71. Die Identität § 4, (27) von der Form $f = K - \lambda U^2$ bringt auch unmittelbar zum Ausdruck (Anm. 2, III), dass der Kegelschnitt $f = 0$ in seinen beiden Schnittpunkten mit der Direktrix $U = x - \sigma\frac{a^2}{e} = 0$ das Kreisstrahlenpaar $k = (x - \sigma e)^2 + y^2 = 0$ berührt, *Pon-*

celet, Traité (1822), art. 457; *Steiner*, J. f. Math. 45 (1852), S. 195 = Werke 2, S. 453; *Salmon-Fiedler*, Kegelsch., S. 350.

II. Die Identität der Direktrixeigenschaft *der Flächen 2. O.* § 127, (29) ist von *B. Amiot*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 163 und *Mac Cullagh* (1843), Works S. 263 aufgestellt und ist analytisch dieselbe für die von beiden Autoren gefundenen Eigenschaften (s. Anm. 16). Die Deutung § 127, 11 nach *Chasles*, Par. C. R. 16 (1843), S. 831 und *Plücker*, System (1846), S. 276, vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 256.

22. **Fokaldistanz als lineare Funktionen von x.** Die Darstellung der *Fokaldistanzen* r, r' der Punkte einer *Ellipse* oder *Hyperbel* als *lineare* Funktionen von x § 4, (35) gibt *Euler*, Introd. 2, art. 128; vgl. Kötter, Ber. S. 57; Dingeldey, Enc. S. 59. Die Erweiterungen § 131, (8) nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 280. Die *gebrochenen Fokaldistanzen* r_1, s_1, r_1', s_1' § 133, (22); (23) sind für die Punkte einer Krümmungskurve der *Ellipsoide* and *Hyperboloide lineare* Funktionen von x nach *E. Gradhandt*, Fokaleigenschaften der Krümmungskurven, Dissert. Rostock 1901.

23. **Reziproke Quadrate rechtwinkliger Halbmesser.** Die Sätze § 5, (8) und § 92, (8) über die *Summe der reziproken Quadrate rechtwinkliger Halbmesser* bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 273 und 274; *Anonymus*, Ann. de math. 18 (1828), S. 369—371 und *Bobillier*, Ann. de math. 19 (1828/9), S. 249; 251. Die Auffassung als *Invarianteneigenschaft*, § 22, 9; § 92, (8), bei *Cauchy* a. a. O.; *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 84, Anm.; (1842), Abhandl. S. 391; System (1846), S. 154.

24. **Polargleichung der Kegelschnitte.** Die *Polargleichung* § 5, (14) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 177 in umschriebener Form bei *Kepler* (1604); bei *Klügel* 2 (1805), S. 79; 709 als in der Astronomie gebräuchlich bezeichnet; die *beiden* Gleichungen § 5, (9); (9′) bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 162. Die Ableitung § 5, 3; 4 nach *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 134.

25. **Trigonometrische Parameterdarstellung.** Die *Parameterdarstellung der Ellipse* § 6, (1) bei *O. Brien*, Cambr. Math. J. 4 (1845), S. 99 nach *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 322; der Hyperbel § 6, (5) bei *A. M. Legendre*, (1786) nach *Dingeldey*, Encykl. S. 11. Die entsprechende des *Ellipsoides*:

$$x = a \cos\varphi,\ y = b \sin\varphi \cos\psi,\ z = c \sin\varphi \sin\psi$$

bei *J. Ivory*, Phil. Trans. R. S. London (1809), S. 352; *C. F. Gauss*. (1813), Werke 5, S. 16.

26. **Konstruktion der Ellipse und Hyperbel aus zwei Kreisen.** Die *Konstruktion der Ellipse* § 6, 1 bei *Cl. Mydorgius* (1631) nach *Kötter*, Ber. S. 10; bei *Ph. de la Hire* (1689) nach *Dingeldey*, Encykl. S. 10; s. *Klügel* 2 (1805), S. 76. Die Konstruktion der Hyperbel § 6, 3 von *E. R. Turner*, Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), S. 123 nach *Dingeldey*, Encykl. S. 11. Die Konstr. der *Tangente* § 13, 5 nach *Brianchon*, J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 7, Anm. Eine entspr. Konstr. des *Ellipsoides* aus drei konz. Kugeln bei *Ch. Gudermann*, J. f. Math. 42 (1851), S. 282.

27. **Affinität zwischen Kreis und Ellipse.** Die *Affinität* § 6, (4) zwischen *Kreis* und *Ellipse*, angedeutet bei *Archimedes*, nach Tropfke, Gesch. 2, S. 453, findet sich bei *J. Ceva*, De lineis rectis etc., Mailand (1678), S. 35; *Klügel* 2, S. 101; vgl. *Baltzer*, Geom. S. 108. Die *Kollinearverwandtschaft* § 6, (7) bei

Newton, Philos. nat. princ. math. (1687) 1, lemma 22 nach Chasles, Aperçu V, § 23. Affine Figuren betrachtet zuerst *Clairaut* (1731) nach Chasles, Aperçu (1837), S. 553, Addition à la page 218; dann *Euler*, Introd. 2 (1718), art. 442, wo das Wort *affin* eingeführt wird; *Poncelet*, Traité (1822), art. 326. Die tiefere Grundlegung und umfassendere Behandlung der affinen Verwandtschaft bei *A. F. Moebius*, Baryc. Calc. (1827) Werke 1, S. 180; ferner Werke 1, S. 392; 519. Die allgemeinen Formeln der *Kollineation* in der Ebene gibt *Waring* (1762) nach Chasles, Aperçu V, § 23; *Moebius* (1829) Werke 1, S. 451.

28. **Rationale Parameterdarstellung der Kegelschnitte.** Die *Parameterdarstellungen* § 6, (10); (12); (14) der *Punkte* und § 13, (48); (49); (50) der *Tangenten* des Kegelschnittes sind Spezialfälle der allgemeinen Darstellungen § 52, (15); (15'). Sie gehen, was die Punkte betrifft, auf *Euler*, Introd. (1748) 1, art. 54; 2, art. 398 u. *Moebius* (1827), Werke 1, S. 81 zurück. Über die rationale Parameterdarstellung der Kurven vom Geschlecht 0 überhaupt vgl. *Salmon-Fiedler*, Höhere eb. Kurven (1873), S. 35.

29. **Projektive Strahlbüschel und Punktreihen am Kegelschnitt.** Der Satz über *projektive Strahlbüschel* an zwei Punkten eines gegeb. Kegelschnitts § 6, 8 nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187 bei *Pascal* (1640); in seiner allg. Bedeutung aufgestellt von *J. Steiner* (1832), Werke 1, S. 332, III rechts.

Der Satz über *projektive Punktreihen* auf zwei Tangenten § 13, 18 für parallele Tangenten und für die Asymptoten bei *Apollonius*, Con. III, art. 41—43 (Heib. 1, S. 415 f.), s. Zeuthen, Kegelschn. S. 344; bei *Euler*, Introd. 2, art. 122; allgemein bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 332, III links; s. Anm. 68 und 109.

30. **Kongruente Strahlbüschel am Kreise.** Daß der Peripheriewinkel halb so groß, wie der zugehörige Zentriwinkel, Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich sind, bei *Euklid* III, prop. 20; 21 nach Tropfke, Gesch. 2, S. 61. Der hieraus folgende Satz über *gleichlaufend kongruente Strahlbüschel* am *Kreise* § 6, 9 bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 330. Die Betrachtung § 6, 9 gibt denselben Satz mit *ungleichlaufenden* Strahlbüscheln für die *gleichseitige Hyperbel*, *Steiner* ebd. S. 330 (s. Anm. 110).

31. **Gleichungen der Punkte- und Strahlenpaare.** Die *Gleichung des Punktepaares* in *gemeiner* Koord. § 7, (1) bei *Hesse*, J. f. Math. 45 (1853), S. 82 = Werke, S. 298; in *Verhältniskoord.* § 7, (30) bei *Hesse*, Ebene, S. 77; in *Zweieckskoord.* § 39, (1) bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 413.

Die Gleichung des *Strahlenpaares* § 7, (33) bei *Fermat*, (um 1635) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 198; ferner bei *Euler*, Introd. 2, art. 485; *Lamé*, Exam. (1818), S. 45; *Hesse*, Ebene, S. 124; *Baltzer*, Geom. S. 193.

32. **Name und Begriff der Involution.** Der *Name Involution* § 8, 5 von *Desargues* (1639), Oeuvres 1, S. 119. Der *Begriff der Punktinvolution*, ursprünglich für *drei Punktepaare* geht in der Form § 8, (20) im wesentlichen auf *Pappus*, Collect. VII, prop. 130 (Hultsch 2, S. 873), zurück nach Baltzer, Elem. 2 (5. Aufl.), S. 382, sachlich in der Form § 8, (15) und (4) gibt sie *Desargues*, Oeuvres 1, S. 119; 247; 250, vgl. *Brianchon*, Lignes (1817), S. 11; *Poncelet*, Traité (1822), art. 172—178. Über die *drei Definitionen* § 8, (4); (15); (20) vgl. *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 185; *Chasles*, Aperçu (1837), Note X; *Moebius* (1853), Werke 2, S. 221.

Der *allgemeine Begriff* § 8, 5 mit ∞^1 *Punktepaaren* bei *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 173; *Plücker*, System (1835), S. 39; *Moebius*, a. a. O.

Zwei Punktepaare bestimmen eine Involution § 8, 7, wie zwei Punkte eine Gerade; daß *drei* Punktepaare in Involution liegen, ist ein Satz wie der, daß drei Punkte in gerader Linie liegen. Daher der *allgemeine* Begriff bei vielen Sätzen auf *drei* Paare reduziert.

Strahleninvolutionen mit drei Paaren bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 257, mit ∞^1 Paaren § 8, 10 bei *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 173; *Plücker*, System (1835), S. 22; *Poncelet*, Par. C. R. 16 (1843), S. 953.

33. **Arten der Involution.** Die *Arten der Punktinvolutionen* § 8, 5 im wesentlichen bei *Desargues*, vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 182; dann bei *Gergonne*, Ann. de math. 16 (1826), S. 277 Anm.; *Plücker*, System (1835), S. 39. Die *Namen* elliptisch, parabolisch, hyperbolisch usw. § 8, 5 nach *Schröter*, Kegelschn., S. 50f.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 178; *Reye*, G. d. L. 1, S. 150.

Die *Arten der Strahleninvolutionen* § 8, 11 bei *Plücker*, System (1835), S. 22.

Die Involution *rechter Winkel* (zirkulare) § 8, 12 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 187; *Fr. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 4 (1843), S. 261.

Die *gleichs. hyperb.* Inv. und Satz § 8, 13, II bei *Schröter*, Kegelschn. S. 16, vgl. *Schoenflies*, Enzyklopädie III AB 5, S. 430 (1901).

34. **Interpretation imaginärer Gebilde durch Polarsysteme.** Die elliptische Involution § 8, 5 dient zur *Vertretung* des *imaginären* Punktepaares bei *Seydewitz* (1846) nach Kötter, S. 313, *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 186; Beitr. (1856), S. 76; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 342.

35. **Involution als Spezialfall der projektiven Verwandtschaft.** Die Involution als Spezialfall der projektiven Verwandtschaft zweier vereinigt gelegener Punktreihen § 8, 15 bei *Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 253 ff.; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 118; *Moebius* (1853), Werke 2, S. 234; vgl. *Baltzer*, Geom., S. 15 und Determ., S. 33.

36. **Erhaltung der Involution bei Projektion.** Die Erhaltung der Punktinvolutionen bei Projektion § 8, 16 bemerkt *Desargues*, Oeuvres 1, S. 146; vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 182.

37. **Analytische Darstellung der Involutionen in der Ebene.** Die anal. Darst. der Involution in der Ebene § 8, 17 nach *Hesse*, Vorles. Ebene S. 59f.; die Formeln § 8, (40); (42) ebd.

38. **Die Involution beim Kegelschnittbüschel.** *I. Satz*, § 8, 18, I im wesentlichen bei *Pappus*, Collect. VII, prop. 130 (Hultsch 2, S. 873); vgl. *Carnot*, Géom. de position (1803), S. 456 (nach Poncelet, Traité S. 92); *Brianchon*, Lignes (1917), S. 11; *Poncelet*, Traité (1822) art. 172. *Chasles*, Aperçu (1837) Note X und géom. sup. S. 220; 339; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 122; *Baltzer*, Elem. 2 (5. Aufl.), S. 382.

II. Satz, § 48, 8, III von *Desargues* (1839), Oeuvres 1, S. 186; 267; 2, S. 162; vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 183.

III. Satz, § 48, 8, I von *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 180; *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1828), S. 363 erkennt die beiden vorhergehenden Sätze als Spezialfälle des dritten und gibt auch die dualen Sätze; vgl. Anm. 75; 126.

39. Involution als Büschel von Punktepaaren. Die Involution als Büschel § 8, 21 bei *Hesse*, J. f. Math. 63 (1864), S. 179 = Werke, S. 521; *Hesse*, Ebene, S. 77; 99; *Baltzer*, Geom. S. 19; 196; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 407.

40. Allgemeine Gleichungen der Kurven und Flächen 2. O. und 2. Kl. I. Daß eine *Gleichung 2. Grades in gemeinen Punktkoordinaten* einen Kegelschnitt darstellt, wußten nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 195; 209 *Fermat* und *Descartes*. Die *allg. Gl.* dieser Art § 9, (1) findet sich bei *A. J. Hermann*, Comm. acad. Petrop. 4 (1735), S. 15 nach Dingeldey, Encykl., S. 16; dann bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 54. Die Bezeichnung der Koeffizienten mit A_{xx}, A_{xy}, ... bei *Cauchy*, Exerc. 4 (1828), S. 141, mit a_{11}, a_{12}, ... bei *Jacobi* (1834), Werke 3, S. 204; *Hesse*, J. f. Math. 20 (1840), S. 285 = Werke, S. 23; vgl. über die Entstehung der „*topographischen*" Bezeichnung bei *Leibniz* auch Baltzer, Det., S. 5.

Die allg. Gleichung 2. Grades in *gem. Linienkoord.* § 15, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 6 (1830), S. 109 = Abhandl. S. 180; Entw. 2 (1831), S. 47 (*Gergonne*, Ann. de math. 11 (1820/1), S. 381 und *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 160 benutzen noch nicht die richtigen Linienkoordinaten); die Bezeichnung der Koeffizienten mit b_{11}, b_{12}, ... bei *Hesse*, Sieb. Vorl., S. 16.

Die allg. Gl. der Kurve 2. O. und 2. Kl. in *Dreieckskoordinaten* § 41, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 5 (1830), S. 8 = Abhandl. S. 131; § 41, (1) und (1') bei *Plücker*, System (1835), S. 87.

II. Die *allg. Gl. der Fläche 2. O. in gem. Punktkoord.* § 66, (1) bei *Fermat* nach Kötter, Ber. S. 67 (Stäckel), dann bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 102; die topographische Bezeichn. der Koeff. bei *Cauchy*, *Jacobi*, *Hesse* a. d. vorhin a. O.

Die allg. Gl. der Fläche 2. Kl. *in gem. Ebenenkoord.* § 75, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 9 (1832), S. 124 = Abhandl. 1, S. 225; System (1846), S. 191.

Die allg. Gl. der Fläche 2. O. und 2. Kl. *in Tetraederkoordinaten* § 138, (1) und (1') bei *Plücker*, System (1846), S. 49; 79.

41. Die Determinanten der Punktepaare, der Kurven und Flächen 2. O. In *entwickelter* Form findet sich die „*Determinante*" des Punktepaares (der binären quadrat. Form) § 7, (11); § 39, (11) bei *Gauss* (1801), Werke 1, S. 122; *des Kegelschnittes* (der ternären qu. F.) § 9, (15); § 41, (8) bei *Gauss*, ebd. S. 301; *Jacobi* (1831), Werke 3, S. 109; *der Fläche 2. O.* § 66, (15); § 138, (8) bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 208; *Plücker*, System (1846), S. 52; 58 (Formel VIII). Auch die *Unterdeterminanten* A_{12}, A_{23}, A_{33} § 9, (16) und A_{44} § 66, 6 finden sich *entwickelt* bei *Euler*, Introd. 2, art. 107; Append. art. 112; ein Teil der Unterdet. A_{kl}, α_{kl} § 66, 6 ebenso bei *Plücker*, System (1846), S. 57; 58.

Der *bewußte* Gebrauch der Determinanten der quadrat. Formen (auch mit n Veränderlichen) setzt bei *Cauchy*, Exerc. 4 (1829), S. 142 (fonction alternée) und *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 11 = Werke 3, S. 201; *Hesse* (1844) Werke, S. 114, ein und wird von *Hesse*, Raum, S. 138; 174 usw.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. 7. Aufl., S. 310; Raum, S. 88 allgemein durchgeführt.

42. Invarianteneigenschaft von Ordnung und Klasse. Die Erhaltung der *Ordnung* bei der Transformation der *gemeinen* Koordinaten für die *Kurve 2. O.* § 9, 7 bei *de Gua* (1740) nach Cantor 3, S. 798; *Cramer* (1750) nach Cantor 3, S. 829; *Euler*, Introd. 2, art. 37; *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 127; für die *Kurve 2. Kl.* § 15, 4 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 48; für die *Fläche 2. O.* § 66, 7 bei

Euler, Introd. 2, Append. art. 94; für die *Fläche 2. Kl.* § 75, 4 bei *Plücker*, System (1846), S. 191; bei der Transformation der *Dreiecks-* und *Tetraederkoordinaten* bei *Plücker*, System (1835), S. 5; System (1846), S. 9.

Es handelt sich dabei schließlich nur um den *allgemeinen* Satz, daß bei jeder *linearen* Substitution, mag sie als *Koordinatentransformation* oder als *kollineare* oder *reziproke* Verwandtschaft gedeutet werden, eine *quadrat. Form* als solche invariant bleibt.

Für den *linearen Komplex* § 86, 2 gilt nach *Plücker*, N. Geom. (1868), S. 11; *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), S. 202; 366 das entsprechende, jedoch kann zu der linearen Gleichung § 86, (1) immer das quadratische Glied λP mit beliebigem λ zugefügt werden, da der Komplex in sechs unabh. homog. Koord. p_{kl} durch *zwei* Gleich. $\varphi = 0$, $P = 0$ dargestellt ist.

43. **Geometrische Bedeutung von Ordnung und Klasse.** Die Bedeutung der *Ordnung* für die *Kurve 2. O.* § 9, 8 bei *J. Newton* (1704) nach Cantor 3, S. 421; bei *Euler*, Introd. 2, art. 66; 70; für die *Fläche 2. O.* § 66, 8; 9 bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 51; 95; *Steiner* (1832), Werke 1, S. 365; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 197; *Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 9 (1846), S. 190.

Das Wort *Klasse* und ihre geom. Bed. § 15, 5; § 75, 5; 7 für Kurven und Flächen 2. O. von *Gergonne*, Ann. de math. 18 (1828), S. 151; *Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), S. 109 = Abhandl.. S. 180.

Die Kurve und Fläche 2. Kl. heißt nach *v. Staudt*, G. d. L. S. 72; 73 auch *Strahlenbüschel* und *Ebenenbündel 2. O.*

44. **Anzahl der Bestimmungsstücke.** Die *Bestimmbarkeit der Kurve 2. O. durch fünf Punkte* bei *Pappus*, Coll. VIII, prop. 13 (Hultsch 3, S. 1077); vgl. Zeuthen, Kegelschn. S. 184 ff.; durch Abzählen der Konstanten der Gleichung, § 9, 9, bei *Euler*, Introd. 2, art. 79; *Kästner* (1758) nach Cantor 4, S. 457; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 147. Die der *Kurve 2. Kl. durch fünf Tangenten*, § 15, 6, bei *Pascal* (vor 1640), *Newton* (1687) nach Kötter, Ber. S. 32. Die Bestimmbarkeit *der Fläche 2. O. durch neun Punkte*, § 66, 10, bei *Klügel* 3 (1808), S. 318; *Anon.*, Ann. de math. 20 (1829/30)), S. 185 ff.; der Flächen *2. Kl.*, § 75, 8 bei *Plücker*, System (1846), S. 36.

Die *Determinantendarstellungen*, § 9, (27) und § 15, (23), bei *Hesse*, Sieb. Vorles. S. 2; 17; die § 66, (27) bei *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 181.

45. **Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve und Fläche 2. O.** Die Entwicklung der *fundamentalen* Aufgabe der Bestimmung des Schnittpunktepaares einer Geraden mit der Kurve und Fläche 2. O. hat sich in *drei* Stufen vollzogen.

Die *erste Methode* ist die der *gemeinen* Koordinaten x, y; s, § 10, 1; x, y, z; s, § 67, 1, welche *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 66, für die Kurve und ebd. S. 2 für die Fläche 2. O. benutzt; die quadrat. Gleich., § 10, (4); § 67, (4), gibt er ebd. S. 66; 3.

Die *zweite Methode* ist die der homogenen gemeinen Koordinaten x, y, t, § 10, 2; x, y, z, t, § 67, 2, in Verbindung mit der *reinen* Verhältniskoord. λ (I § 6, (1)) bei *Joachimsthal*, J. f. Math. 33 (1846), S. 373, und der *multiplizierten* Verhältniskoord. λ (I § 6, (7)), auch der dualen Aufgaben, § 16, 2; § 76, 1, bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 8; 21; Vorl., Raum S. 130; 146.

Die *dritte Methode* ist die des Übergangs von *Dreiecks- und Tetraederkoordinaten auf Zweieckskoordinaten*, § 44, (7); § 142, (7), welche die Aufgabe in ihren vollen Zusammenhängen erfaßt, vgl. *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 136; Raum, S. 132; sie wird dann auch unmittelbar auf die Schnittkurve der Fläche 2. O. mit einer Ebene ausgedehnt, § 141, 2, Absatz 3.

Die sachgemäßen *Bezeichnungen*, § 10, (9); (10); § 16, (7); (8); § 41, (6); § 67, (8), (9); § 76, (5); (6); § 138, (6), nach *Hesse* (1858), Werke S. 329; Sieb. Vorl. S. 9; 22.

46. **Imaginäre Schnittpunktepaare.** Das Mitzählen der *imaginären Schnittpunktepaare*, § 10, 1, findet sich bei *J. Stirling* (1717) nach Cantor 3, S. 430; *Euler,* Introd. 2 (1848), art. 86; *Poncelet,* Traité (1822), art. 50; *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXVI; *Ch. Paulus,* Arch. Math. Phys. 21 (1853), S. 183; 22 (1854), S. 121.

Der *Mittelpunkt* einer imaginären Sehne, § 11, 1; § 68, 1, bei *Poncelet,* Traité, S. X u. art. 51; *Gergonne,* Ann. de math. 16 (1826), S. 279; *Plücker,* System (1835), S. 101; *v. Staudt,* Halbm. (1867), S. 38.

Imag. *Tangentenpaare,* § 16, 2, bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 187.

In den Involutionen § 11, 6; § 17, 2; § 68, 7; § 77, 2 finden diese imag. Elemente ihren reellen Ausdruck, vgl. Anm. 34.

47. **Gleichungen der Tangenten und Tangentialebenen.** Die beiden Formen der *Gleichung der Tangente der allg. Kurve 2. O.* § 10, (14); (18), gibt *Cauchy,* Exerc. 3 (1826), S. 80, indem er in etwas anderer Weise an die quadr. Gleich. § 10, (4) anknüpft. Wie *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 156 bemerkt, enthält das Verfahren § 10, 3 eine Umschreibung der Methode der Differentialrechnung.

Die *Gleichung des Berührungspunktes,* § 16, (12), bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 192; Entw. 2 (1831), S. 117.

Die Existenz der *Tangentialebene* als Ort der Tangenten, § 67, 4, beweist *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 7. Die beiden Formen der *Gleichung* der Tangentialebene, § 67, (16); (18), bei *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 109; in *Tetraederkoordinaten,* § 143, (5), bei *Plücker,* System (1846), S. 19.

Die Gleichung des *Berührungspunktes,* § 76, (10) und § 143, (7), bei *Plücker,* System (1846), S. 21; 193.

48. **Begriff und Gleichungen der Tangentenpaare und Berührungskegel.** Die Gleichung des *Tangentenpaares* der allg. Kurve 2. O., § 10, (21), bei *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 164; die Form § 10, (23) bei *Hesse,* Raum, S. 291, die Gl. des *Schnittpunktpaares,* § 16, (14), für den Kreis bei *Hesse,* Ebene, S. 190; vgl. *Baltzer,* Geom., S. 207.

Die Gl. des *Berührungskegels* der allg. Fläche 2. O., § 67, (22), im wesentl. bei *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 58; in der Form § 67, (23); § 144, (6) bei *Hesse,* Raum, S. 171; *Baltzer,* Geom., S. 494; die Gl. der *Schnittkurve,* § 76, 4 bei *Hesse,* Raum, S. 178.

Daß der Berührungskegel *des Kegels,* § 71, (13), in ein Ebenenpaar zerfällt, bei *Serenus,* (350 n. Chr.) nach Cantor 1, S. 490.

49. **Begriff und Gleichungen der Doppelelemente.** Die *linearen Gleichungen* für die *Doppelpunkte* einer Kurve oder Fläche 2. O., § 10, (28); § 67, (32) erhält *Lamé,* Exam. (1818), S. 71; 72, indem er ausdrückt, daß der Mittelpunkt auf der Kurve oder Fläche liegt. Die für die *Doppelgerade* einer Kurve oder

Doppelebene einer Fläche 2. Kl., § 16, (16); § 76, (16), gibt *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 19; Raum S. 173.

Die für die Doppelpunkte einer *ebenen Schnittkurve* der Fläche 2. O., § 106, (22); § 107, (2); § 141, (31), *Hesse,* Raum S. 392; für den Doppelp. des *Schnittpunktpaares* mit einer Geraden s. § 44, (25); § 142, (28).

Der Ausdruck point singulier (dans lequel la direction de la tangente devient indéterminée) bei *Cauchy,* Appl. (1826), S. 76, *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 395. Eine zweite Erklärung, nach der es sich um Punkte handelt, durch deren Einführung als Koordinateneckpunkte eine Koordinate aus der Gleichung der Kurve oder Fläche verschwindet, in § 39, (26); § 42, 3; § 139, 3; § 141, 6.

50. **Durchmesser und Diametralebenen.** Den Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen bei *Ellipse, Hyperbel* und *Parabel,* § 14, 1; 8, nennt *Apollonius,* Con. I, Def. 4 (Heib. 1, S. 6) einen *Durchmesser* (διάμετρος), s. Cantor 1, S. 337; F. Müller, Progr. S. 27. Derselbe Begriff für die *allg. Kurve 2. O.,* in § 11, 1 als die einer Richtung konjugierte Gerade bezeichnet, bei *Euler,* Introd. 2, art. 90; die *Gleichung* dieser Linie, § 11, (2), gibt *Gergonne,* Ann. de math. 5 (1814/5), S. 64; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 67.

Diametralebene einer Fläche als Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen, § 68, 2, die einer Richtung konjugierte Ebene genannt, im wesentl. bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 13; *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 151; die *Gleichung* der Ebene, § 68, (2), bei *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 19; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 8; 82; *Gergonne,* Ann. de math. 5 (1814/5), S. 74; *Plücker,* System (1846), S. 93; als *Polarebene* des unend. fernen Punktes der Richtung, § 68, 11, bei *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 19; *v. Staudt,* Halbm. (1867), S. 37.

Durchmesser einer Fläche ist der Ort der Mittelpunkte paralleler ebener Schnitte, § 111, 4, die reziproke Polare der unendl. f. Geraden der Schnitte, *Poncelet,* J. f. Math. 4, S. 21; *v. Staudt,* Halbm. S. 39; 40; *Hesse,* Raum S. 389.

51. **Harmonische Pole, Polaren und Polarebenen.** I. Die *induktive Definition harmonischer Pole,* § 11, 5; § 68, 5, *harmonischer Polaren,* § 17, 1, und *harmonischer Polarebenen,* § 77, 1, setzt die *Kurve* oder *Fläche* als gegeben voraus und benutzt *gleichartige* Elemente (zwei Punkte, zwei Gerade, zwei Ebenen). Sie ist ausgeprägt bei *Hesse,* Sieb. Vorl., S. 11; 22; Raum, S. 131; 147. Die *deduktive Definition,* § 11, 20; § 17, 12; § 68, 29; § 77, 16, geht von der allg. Verwandtschaft der *Reziprozität* (der *ungleichartigen* Polarelemente Punkt und Gerade, Punkt und Ebene) aus und bezeichnet allgemein (s. auch Anm. 166) zwei Elemente als *konjugiert,* wenn das eine von ihnen mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt. Sie ist ausgeprägt bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 134; 190; Beitr. S. 286 f.; vgl. *Reye,* G. d. L. 1, S. 104; 2, S. 47; *Sturm,* Linieng. 1, S. 82; Jahrb. d. F. 1878, S. 413. Vorgebildet sind beide Definitionen bei *Steiner,* Entw. (1832), Werke 1, S. 350 („zugeordnete harmonische Pole, zugeordn. harm. Gerade"), *Plücker,* System (1835), S. 101 („zugeordn. Pole, zugeordn. Polaren"), *Hesse* (1840) Werke, S. 30; 34 („puncta conjugata, lineae conj."); vgl. *Baltzer,* Geom. S. 209.

II. Der *analytische Ausdruck* aller Definitionen liegt in der Gleichung $f_{12} = 0$, § 11, (8); § 46, (2); § 68, (7); § 149, (2). Denn einerseits ergibt sich f_{12} als mittlerer Koeffizient der quadratischen Gleichung des *Schnittpunktproblems,* § 10, (7); § 67, (7), und der Gleichung des *Schnittpunktpaares* in Zweieckskoordinaten, § 44, (7); § 142, (7). Andererseits ist die Gleichung $f_{12} = 0$ § 41, (6); § 138, (6)

(auch ohne die Bed. $a_{kl} = a_{lk}$) der *Ausgangspunkt* des allg. Begriffs der *Reziprozität* bei *Möbius* (1833), Werke 1, S. 492; *Plücker*, System (1846), S. 13.

III. Die *involutorische Eigenschaft*, § 11, 14; § 17, 7, bei der Kurve und, § 68, 13; § 77, 7, bei der Fläche hebt *Poncelet*, Traité (1822), art. 196; J. f. Math. 4 (1829), S. 19; 20 („Fundamentalsatz") hervor, vgl. *Steiner*, Entw. (1833), Werke 1, S. 350; *Schröter*, Oberfl. S. 132; 489; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 86; 203. Auch die verschiedenen Auffassungen dieser Eigenschaft vereinigen sich in der einzigen anal. Gleichung $f_{12} = 0$ nach *Moebius* (1833), Werke 1, S. 493, art. 3, Absatz 2.

52. **Involution harmonischer Pole, Polaren und Polarebenen.** Der Begriff der *Involution harmonischer Pole*, § 11, 6; § 68, 7, Polaren, § 17, 2, und Polarebenen, § 77, 2, knüpft wiederum (Anm. 51) *induktiv* an das *Schnittpunktpaar* der gegeb. Kurve und Fläche mit einer geg. Geraden usw. an bei *Plücker*, System (1835), S. 101.

Deduktiv erscheint die Involution als *Durchschnitt* einer Geraden mit einem *Polarsystem* in der Ebene oder im Raume bei *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 134; 193.

53. **Begriff und Gleichung der Polare und Polarebene.** I. Der Name „*Polare eines Punktes*" § 11, 7 von *Gergonne*, Ann. de math. 3 (1812/3), S. 297.

II. Die *harmonische Teilung* einer Sehne durch Pol, Polare und Kurve für den Kreis § 12, 6 und für die Kegelschnitte im Spezialfall § 20, 3 bei *Apollonius*, Con. I, art. 34; 36; III, art. 37 (Heib. 1 S. 100; 106; 402); vgl. Cantor 1, S. 338; Zeuthen, Kegelschn. S. 119; allgemeiner bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 168; 263, vgl. Cantor 2, S. 678; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 180; Baltzer, Elem. 2 (1878), S. 385; weiter bei *De la Hire* nach Cantor 3, S. 128; *Poncelet*, Traité, art. 194; 186; Polarebene § 68, 8 für Kugel und Fläche 2. O. angedeutet bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 290; allgemein bei *Poncelet*, J. f. Math. 4 (1829), S. 19; Traité (1822), art. 590.

III. Die *Gleichung* der Polare § 11, (16) bei *Gergonne*, Ann. de math. 3, S. 296; die der Polarebene § 68, (15) von *Monge* nach Kötter, Ber. S. 48; *Gergonne*, Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; 3 (1812/3), S. 297; *Livet*, Corr. polyt. 1 (1805), S. 75.

54. **Konstruktion der Polare.** Die *Konstruktion der Polare* (trauersale) mittels des vollst. Vierecks § 11, 8 bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 189; *Servois*, Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; *Gergonne*, Ann. de math. 3 (1812/3), S. 297; *Lamé*, Exam. (1818), S. 46 zugleich zur Konstruktion des Tangentenpaares.

55. **Polar- und Berührungselemente.** I. Die *Tangente* als *Polare* des Berührungspunktes § 11, 9 bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 265 nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 181; der *Berührungspunkt* als *Pol* der Tangente § 17, 4 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 118. Die *Tangentialebene* als *Polarebene* des Ber. p. § 68; 9; der *Berührungspunkt* als *Pol* der Tangentialebene § 77, 4 bei *Plücker*, System (1846), S. 21; *Hesse*, Raum S. 134.

II. Die *Polare* als *Berührungssehne* des Tangentenpaares § 11, 10 bei *Gregorius a St. Vinzentio* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 97; bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 192; der *Pol* als *Scheitel* des Tangentenpaares § 17, 5 bei *Plücker*, System (1835), S. 100. Die *Polarebene* als *Berührungsebene* des Berührungskegels § 68, 10 bei *Monge* nach *Livet*, Corr. polyt. 1 (1805), S. 75; *Lamé*, Exam. (1818), S. 47f. Der *Pol* als *Spitze* des Berührungskegels § 77, 5 bei *Hesse*, Raum S. 171.

56. **Zusammengesetzte Polarbeziehungen.** I. Daß die Polaren der Punkte einer *Punktreihe* § 11, 15, II ein *Büschel* bilden, bei *De la Hire* (1685)

nach Kötter, Ber. S. 47; daß die Polarebenen der Punkte eines *Feldes* ein *Bündel* bilden § 68, 23, II, bei *Gergonne*, Ann. de math. 3 (1812/3), S. 293 ff. nach Kötter, Ber. S. 49 und die Polarebenen der Punkte einer *Geraden* ein *Büschel* bei *Monge* nach Kötter, Ber. S. 48.

II. Die *Projektivität* der entsprechenden Gebilde § 11, 15, I; § 17, 8, I; § 68, 14, I; 23, I; § 77, 8, I; 12, I folgt aus der *allg. Theorie* der reziproken Verwandtschaften I § 67, 3; 7; § 69, 3; 6; vgl. *Klügel*, Suppl. v. *Grunert* 2 (1836), S. 989.

57. **Begriff und Gleichung des Poles.** I. Der Name *Pol einer Geraden* § 11, 16 von *J. F. Servois*, Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; hier ist der Pol der Punkt, durch den die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen, § 11, 16, II; Name und Begriff des *Poles einer Ebene* § 68, 24 bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 590.

II. Die *Gleichung* des Poles in *Linienkoordinaten* § 11, (27); § 17, (6) bei *Plücker* (1829) Abhandl. S. 193; Entw. 2 (1831), S. 118; *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 23; in *Ebenenkoordinaten* § 68, (26); § 77, (5) bei *Hesse*, Raum, S. 147.

58. **Gleichungen von Kreis und Kugel.** I. Die *Gleichung des Kreises* § 12, (20) im wesentl. bei *P. de Fermat* nach Cantor 2, S. 817; die der *Kugel* § 69, (1) bei *Parent* (1713) nach Cantor 3, S. 417, und *Clairaut* (1731) nach Cantor 3, S. 781. Die *Unterscheidung der Normalform* § 12, (1); § 69, (1) und der *allgemeinen* § 12, (20); § 69, (20) bei *Plücker*, Entw. 1, S. 47; *Hesse* Ebene, S. 179; Raum, S. 345, vgl. *Magnus*, Aufg. 1, S. 83; *Klügel* 3, S. 295.

II. *Imaginäre* Kreise § 12, 9 bei *Chasles*, Traité de géom. supér. Chap. 33; *Möbius* (1857) Werke 2, S. 317; *v. Staudt*, Halbm. S. 9; imag. Kugel § 69, 10 bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 253.

III. Geom. Deutung der Relationen zwischen 4 Punkten eines Kreises § 12, 12 und 5 Punkten einer Kugel § 69, 14 s. bei *R. A. Luchterhandt*, J. f. Math. 23 (1842), S. 375; *Möbius*, J. f. Math. 26 (1843), S. 26 = Werke 1, S. 583; *Joachimsthal*, J. f. Math. 40 (1850), S. 21; *Baltzer*, Geom. S. 368; Det. S. 230; vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 79 (1875), S. 185.

59. **Potenz in bezug auf Kreis und Kugel.** I. Über das Vorkommen des *Sekantensatzes* vom *Kreise* § 12, 3 bei *Archytas* (um 350 v. Chr.) und *Euklid* s. Tropfke, Gesch. 2, S. 84; 85.

II. Den *Begriff der Potenz* § 12, 3 führt *Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), S. 164 = Werke 1, S. 22 ein; für die *Kugel* § 69, 3 *Moebius* (1857), Werke 2, S. 319. Die *anal. Darstellung* § 12, (8); § 69, (8) nach *Hesse*, Ebene S. 180. Die Alten nannten den konst. Inhalt des Parallelogramms § 3, 6 *Potenz der Hyperbel* (δύναμις) nach F. Müller.

III. Bei der *allg. Kurve 2. O.* § 9, (1) ist $s_1 s_2$ nicht von α, β unabhängig, wie beim Kreise in § 12, (7). Vielmehr folgt aus § 10, (4) für zwei durch einen Punkt x_0, y_0 gehende Richtungen α, β und α', β':

$$s_1 s_2 = \frac{g(x_0 y_0)}{h(\alpha\beta)}, \qquad s_1' s_2' = \frac{g(x_0 y_0)}{h(\alpha'\beta')},$$

so dass:

$$\frac{s_1 s_2}{s_1' s_2'} = \frac{h(\alpha'\beta')}{h(\alpha\beta)}$$

von x_0, y_0 unabhängig wird. Dies gibt die *Sekantensätze der Kegelschnitte*, *Apollonius* Con. III, art. 16—23 (Heib. 1, S. 347 ff.) nach Cantor 1, S. 338; *Newton* (1706) nach Cantor 3, S. 423; *Stirling* (1717) nach Cantor 3, S. 434; vgl. *Euler*, Introd. 2, art. 93; *Klügel* 3, S. 189; Zeuthen, Kegelschn. S. 116; Gesch. A. M. S. 208.

60. Imagin. Kreispunkte und Kugelkreis. Der *Begriff* des *imaginären Kreispunktpaares* § 12, 10 von *Poncelet*, Traité (1822), art. 94; vgl. *Klein*, Autogr. Vorles. Elementarmath. 2 (1909), S. 248. Seine *Gleichung in Linienkoordinaten* § 20, (60') bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 41; *Clebsch-Lindemann*, Ebene (1906), S. 248.

Das *Kreisstrahlenpaar* § 12, (18) als Punktkreis bei *Cauchy*, Appl. S. 65; Exerc. 3, S. 81.

Der *Begriff* des *imag. Kugelkreises* § 69, 9 bei *Poncelet*, Traité art. 593; 619; *v. Staudt*, Beitr. S. 129. Seine *Gleichung in Ebenenkoord.* § 84, (9') bei *Hesse*, Raum S. 338; *in Linienkoord.* § 84, (11') bei *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 9 (1876), S. 222; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 183. Der Ausdruck *Kugelkegel* § 69, 9 nach *F. Meyer*, Jahrb. der Fortschr. 1882, S. 717. Die Tangentialebenen des imag. Kugelkreises heißen *Minimalebenen* nach *Lie-Scheffers*, Berühr.transf., S. 429; die Treffgeraden des imag. Kugelkreises § 84, (11') *Minimalgerade* nach *Lie-Scheffers*, ebd. S. 255, lignes isotropes nach *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 11 (1872), S. 14.

61. Gleichung des Kreises und der Kugel in Linien- und Ebenenkoordinaten. Die Gl. des *Kreises* in *Linienkoord.* § 12, (27) bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 34; *Hesse*, Ebene, S. 186; der *Kugel* in *Ebenenkoord.* § 69, (27) bei *Plücker*, System (1846), S. 244; in *Linienkoord.* § 69, (28) nach *Plücker*, N. Geom. S. 256.

62. Imagin. Ellipse und Ellipsoid. Die Gleichung der *imaginären Ellipse* § 13, 1 und des *imag. Ellipsoides* § 70, 1 bei *Cauchy*, Exerc. 3, S. 70; Applic. S. 253; vgl. *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 37; s. Anm. 85.

F. Klein, Vorl. 1, S. 355 bezeichnet als imagin. Kurven und Flächen 2. O. solche mit imagin. *Koeffizienten* a_{kl} in § 9, (1); § 66, (1) und nennt die hier betrachteten *nullteilig*.

63. Abstände der Brennpunkte von der Tangente. Der Satz über das Produkt der Abstände der Brennpunkte von der Tangente § 13, (11) von *J. Keill* (1709) nach *Klügel* 2, S. 97; vgl. *Plücker*, Syst. (1835), S. 115. Der Satz liegt auch in der Formel § 31, (28) nach *Hesse*, Vorl. Raum, S. 344.

64. Winkel der Brennstrahlen gegen Tangente und Normale. I. Der Satz von der *Halbierung des Winkels der beiden Brennstrahlen* eines Punktes *P* der *Ellipse oder Hyperbel* durch Tangente und Normale § 13, 4 bei *Apollonius*, Con. III, art. 48 (Heib. S. 430) nach Cantor 1, S. 339; für die *Parabel* § 13, 13 erst von *Anthenius* (6. Jahrh.) nach Heiberg, Zeitschr. Math. Phys. (1) 28 (1883), kl. Abh. S. 121; *Joh. Werner* (1500) nach Cantor 2, S. 458. Daß die Halbierungslinien der Winkel der Brennstrahlen des Punktes *P* die Tangenten der beiden durch *P* gehenden *Konfokalen* sind § 33, 9; § 35, 7 bemerkt *Chasles*, Aperçu Note XXXI, art. (30); die Beziehung des Satzes zur Theorie der *senkrechten harmon. Polaren* § 20, 6 bei *Chasles* ebd. art. (18).

II. Der entsprechende Satz von den *Halbierungsebenen der Winkel der Fokalebenen beim Kegel* § 119, 8, III von *Magnus*, Ann. de math. 16 (1826), nach *Chasles*, Aperçu V, § 42 (1837, S. 237).

III. Der entsprechende Satz bei den *Flächen 2. O.* gliedert sich in *zwei*, je nachdem man die durch einen Punkt P der Fläche gehenden *Fokalkegel* § 122, (4) oder *Fokalstrahlen* § 122, (9), bezügl. die gebrochenen Fokaldistanzen § 134, 13; § 137, 13, als Analoga der *Brennstrahlen* ansieht. Die Normalen der drei durch P gehenden *Konfokalen* sind nach § 122, 1 die Hauptachsen der Fokalkegel und nach § 122, 4, III die Halbierungslinien der Fokalstrahlen, s. Anm. 102 und 136.

65. Hauptachsengleichungen der Kegelschnitte in Linienkoordinaten und der Flächen 2. O. in Ebenenkoordinaten. I. Die *Linienkoordinatengleichung* der *Ellipse*, *Hyperbel* § 13, (18) und *Parabel* § 13, (48) bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 139; *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 43. Andeutungen über die Auffassung der Parabel als *Liniengebilde* bei *Apollonius*, Con. III, art. 41 (Heib. 1, S. 412ff.) nach Tropfke, Gesch. 2, S. 448; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 227. Der Übergang von § 13, (23) zu § 13, (18) bei *Cayley* nach Dingeldey, Enc. S. 19. Daß die Parabel keine *parall.* Tang. hat § 13, 15, II erwähnt *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 334.

II. Die *Ebenenkoord.gleich.* des *Ellipsoides* und *Hyperboloides* § 70, (10) bei *Plücker*, System (1846), S. 211; 212.

66. Ort der Scheitel besonderer Tangentenpaare und Berührungskegel. I. Den Ort der Scheitel *rechtwinkl.* Tangentenpaare eines Kegelschn. § 13, 8, I; § 13, 16, I; § 33, (22); § 35, (21) bestimmt *De la Hire* nach Cantor 3, S. 129; *Lamé*, Exam. (1818), S. 78; *Poncelet*, Traité (1822), art. 452. Auch die *allgemeinere* Aufgabe § 33, (24) behandelt *De la Hire*, Sect. con. VIII, prop. 27 ff. und für die Parabel § 35, 8, letzt. Abs., *De l'Hospital*, Sect. con., S. 266ff. nach Kötter, Ber. S. 52. Die Kurven 4. O. § 33, (24) (bei der Parabel 2. O.) in *ellipt. Koord.* von *O. Staude*, Dissert., Leipzig 1881, S. 17 behandelt.

II. Den Ort der Scheitellinien *rechtwinkl.* Tangenten*ebenen*paare beim *Kegel* § 119, 10 gibt *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 321; s. auch *Painvin*, Bull. scienc. math. 2 (1871), S. 371; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 439.

III. Der Ort der Schnittpunkte von drei *rechtw. Tangenten* beim Ellipsoid od. Hyperboloid bestimmt *Lamé*, Exam. (1818), S. 80; *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1827/8), S. 232; von drei *rechtw.* Tangenten*ebenen* („Mongesche Kugel") *Monge* nach *Livet*, Corr. polyt. 1 (1804), S. 30; der erste Beweis von *Poisson*, ebd. 1 (1806), S. 240; vgl. *Chasles*, Corr. polyt. 3 (1816), S. 320; *Lamé*, Exam. S. 80; beim Paraboloid *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 325. Daß es sich dabei um den Ort der Scheitel *gleichseitiger*, § 100, (17); (21); § 122, (13); § 125, (8), und *dual* gleichseit. *Berühr. Kegel*, § 100, (18); (22); § 122, (16); § 125, (10) handelt, bemerkt *Plücker*, System (1846), S. 206. Ort der Scheitel Pappusscher und Hachettescher Kegel (s. Anm. 143) nach *A. Mannheim*, Proc. R. Soc. Lond. 1881, S. 447, eine Fresnelsche Wellenfläche. Die Bed. dafür lautet nach § 122, (2): $(\mu + \nu - 2\tau)(\nu + \lambda - 2\tau)(\lambda + \mu - 2\tau) = 0$ und ist nach *Staude*, Dissert. Leipzig 1881, S. 61, die Gl. der Fresnelschen Wellenfl. in *ellipt.* Koord. Die Methode der ellipt. Koord. ist für alle diese Örter I—III das *systematische* Hilfsmittel und gestattet auch die *getrennte* Deutung der einzelnen Kurvenzweige und Flächenschalen, wie $\mu + \nu - 2\tau = 0$, $\nu + \lambda - 2\tau = 0$ usw.

IV. Da alle Ebenen durch eine Erzeugende Tangentialebenen sind, gehört dem Ort der Scheitel von drei rechtw. Tangenteneb. auch der Ort der Schnitt-

punkte zweier rechtw. Erzeugender der Fläche § 64, (3); § 65, (44) an, *Plücker* System (1846), S. 207; 208. Die letztgenannten Örter erscheinen wiederum auch bei der Theorie der *gleichseitig hyperbol. Schnitte* § 116, (24).

67. **Asymptotengleichung in Linienkoordinaten.** Die Asymptotengl. der Hyperbel in *Linienkoord.* § 13, (31) bei *Plücker*, Entw. 2, S. 53. Der Satz § 13, (32) aber schon bei *Apollonius*, Con. III, art. 43 (Heib. 1, S. 420); in der Auffassung § 13, 18 bei *Steiner*, Syst. Entw., Werke 1, S. 335.

68. **Ähnliche Punktreihen auf zwei Tangenten der Parabel.** Der Satz § 13, 19 gibt *Apollonius* III; art. 41 (Heib. 1, S. 412); vgl. *Zeuthen*, Kegelschn. S. 344. Er findet sich auch bei *De la Hire* und *M. R. de Prony*, J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 57 f. nach *Dingeldey*, Encykl. S. 16; ferner bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 224 und in seiner systematischen Stellung bei *Steiner*, Syst. Entw., Werke 1, S. 334.

69. **Gleichungen des Linienpaares in Linien- und des Kegels in Ebenenkoordinaten.** Die Darstellung des *Linienpaares* § 13, (57) durch *zwei* Gleichungen in *Linienkoordinaten* § 13, (58'); § 19, (14); (18); § 45, (11); (15) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 16; des *Kegels* durch *zwei* Gleichungen in *Ebenenkoord.* § 71, (8); (9); § 143, (9); (11) nach *Plücker* (1832), Abhandl. S. 229; *Hesse*, Raum, S. 164; *Clebsch-Lindemann*, Raum. S. 23 f.; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 343.

Die Beziehung der Geraden u_k', u_k'' des Geradenpaares § 42, (15) und der Ebenen des Ebenenpaares § 139, (28) zu den Koeffizienten a_{kl} bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene S. 182; Raum S. 153. Die umgekehrte Aufgabe deckt sich im wesentl. mit der Darstellung des Geraden- und Ebenenpaares in Linien- und Ebenenkoord. § 45, (11); (15); § 71, (33); (34); § 143, (14); (17); s. Anm. 139.

70. **Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen.** I. Der *Begriff zweier konjugierter Durchmesser* der *Ellipse* und *Hyperbel* § 14, 2, I bei *Apollonius*, Con. I (Heib. 1, S. 8) nach Cantor 1, S. 337; bei *Gregorius a St. Vincentio* nach Bopp, Greg. S. 108 ff.; *Euler*, Introd. 2, art. 111. Die besondere Art § 14, 5, II bei *Euler*, Introd. 2, art. 146; *Klügel* 2, S. 87. Bei der *Parabel*, wo alle Durchmesser der Achse parallel sind, treten für zwei konjugierte Durchmesser *ein Durchmesser* und *eine Tangente* ein § 14, 8, s. *Euler*, Introd. 2, art. 151.

II. Der *Begriff* von Durchmesser und Diametralebene, die einander konjugiert sind, ferner von *drei konjug. Durchmessern*, bezügl. *Diametralebenen* des Ellipsoides und Hyperboloides § 72, 1; 5; 7 bei *Monge-Hachette*, Journ. éc. polyt. cah. 11, S. 153; *Baltzer*, Geom. S. 514. Beim *Paraboloid*, wo alle Durchmesser und Diametralebenen der Achse parallel sind, treten für drei konj. Durchm. *ein Durchm.* und *zwei Tangenten* ein § 73, 3, s. *v. Staudt*, Halbm. S. 45; *Baltzer*, Geom. S. 517.

71. **Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen als Polarsysteme.** I. Die Auffassung *aller Paare* konjugierter Durchmesser § 14, 4 als *Strahleninvolution* mit den *Asymptoten* als Doppelstrahlen bei *De la Hire* nach Dingeldey, S. 21 und bei *Chasles* nach Kötter S. 295; — *aller Paare* konjugierter Durchmesser und Diametralebenen § 84, 3, letzter Absatz, als *Polarbündel* des *Asymptotenkegels* bei *v. Staudt*, Halbm. S. 39.

II. Allgemeiner bilden die Paare konj. Durchmesser die zum Mittelpunkt gehörige *Involution harmonischer Polaren* am Mittelpunkt § 20, 4 und konjugierte Durchmesser und Diametralebenen das Polarbündel am Mittelpunkt.

72. **Konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen.** I. Die *Gleichungen* der Ellipse und Hyperbel *in bezug auf zwei konj. Durchm.* § 14, (11) und der Parabel in bezug auf Durchm. u. Tangente § 14, (25) bei *Fermat* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 198; *Euler,* Introd. 2, art. 110; 114; 151; *Klügel* 2, S. 82. Die *Gleichung* der Ellipsoide und Hyperboloide § 72, (14) *in bezug auf drei konj. Durchm.* bei *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 154; *Moebius,* Werke 1, S. 159.

II. Die *Form* der Gleichungen § 14, (11) und § 72, (14) ist in der Auffassung der betreff. Koordinatensysteme als *Polardreieck* § 47, 1 und *Polartetraeder* § 150, 1 begründet, die auf *Poncelet,* Traité (1822), art. 617 zurückgeht. Die Form der Gl. § 14, (25) und § 73, (8) in der Auffassung als Berührungsdreieck § 52, 3 und Polarberührungstetraeter § 158, 5.

73. **Metrische Sätze über konjugierte Durchmesser.** I. Die beiden Sätze § 14, (16); (17) bei *Apollonius,* Con. VII, art. 12; 13; 31 nach Zeuthen, Kegelschn, S. 393; bei *Euler,* Introd. 2, art. 119; 116; 145; *Klügel* 2 (1805), S. 84; 713. Als *Invariantenbeziehungen* § 22, 10 bei *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 144.

II. Die Sätze § 72, (23) bei *Livet,* Corr. polyt. 1 (1804), S. 29; J. éc. polyt. cah. 13 (1806), S. 277; *J. Binet,* Corr. polyt. 2 (1810), S. 79 (2 (1812), S. 323; J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 321; mit zahlreichen ähnlichen Sätzen bei *Chasles.* Corr. polyt. 3 (1816), S. 306 ff.; J. de math. (1) 2 (1837), S. 388; *Magnus* 2 (1837), S. 236; *v. Staudt,* Halbm. S. 50. Als *Invariantenbeziehungen* § 92, 2 bei *Binet,* J. cé. polyt. 16 (1813), S. 51; vgl. *Plücker,* System (1846), S. 160 ff.; *Salmon-Fiedler.* Raum 1, S. 125 f.; vgl. *Bauer,* Münch. Ber. 1880, S. 637. Die Sätze § 73, (12); (13); § 92, 3 von *Allman,* Quart. J. 13 (1875), S. 102.

74. **Ähnliche Kurven und Flächen 2. O.** I. Der *Begriff der Ähnlichkeit* der *Parabeln* § 14, 10 bei *Archimedes,* Con. et Sphaer., Op. omnia ed. Heiberg, 1, S. 279, der *Kegelschnitte* überhaupt § 14, 10 bei *Apollonius,* Con. VI, nach Cantor 1, S. 342; bei *De la Hire,* Sect. con. VI, nach Cantor, 3, S. 129; *De l'Hospital,* Sect. con. (1720) V, art. 190; *Euler,* Introd. (1748) 2, art. 439; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 174; (1852), Werke 2, S. 91. Über den *weiteren* Begriff § 14, 10 vgl. *R. Müller,* Arch. math. Phys. (3) 2, S. 342; Jahrb. der Fortschr. 1902, S. 560.

II. Die Formeln § 14, (32) bei *Euler,* a. a. O. art. 446. Die *allgem. Formeln* für die Ähnlichkeit zweier auf dasselbe (oder nicht dasselbe) *rechtwinklige* Koordinatensystem bezogene Figuren lauten in der *Ebene:*

$$x = x_0 + m(\alpha_1 x' + \alpha_2 y'),\; y = y_0 + m(\beta_1 x' + \beta_2 y'),$$

wo α_1, β_1 und α_2, β_2 die Bedingungen § 21, (7) erfüllen, und im *Raume:*

$$x = x_0 + m(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'),\; y = y_0 + m(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'),$$

$$z = z_0 + m(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'),$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Bedingungen § 88, (3), (4) erfüllen. Beidemal ist m das konstante *Verhältnis entsprechender Strecken;* vgl. *Klügel* (*Grunert*), Suppl. 2 (1836), S. 984.

III. Begriff u. Übereinstimmung der konjugierten Durchmesser konjugierter Ellipsoide und Hyperboloide § 72, 12 bei *Cauchy,* Applic. S. 274; *v. Staudt,* Halbm. S. 42; *Salmon-Fiedler,* Raum, S. 124 f.

75. **Abschnitte auf der Tangente der Hyperbel.** Der Satz § 14, 11, IV, daß die *Asymptote auf der Tangente der Hyperbel gleiche Stücke abschneidet,* bei

Archimedes und *Apollonius* nach *Tropfke* 2, S. 456. Alle Sätze § 14, 11, II—IV sind Spezialfälle des Satzes § 48, 8, II. Denn das Büschel ähnlicher Hyperbeln:

$$f - \lambda g = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \lambda t^2 = 0$$

enthält die unendl. ferne Gerade $t^2 = 0$. Daher ist für die Involution § 48, 8, I der unendl. ferne Punkt ein Doppelpunkt und die Involution gleichseitig hyperbolisch, § 8, (16). Die Schnittpunktpaare S und T, S' und T' § 14, Fig. 75 haben also denselben Mittelpunkt M.

76. **Begriff und Kriterien des Ranges.** I. Der *Rang eines Punktepaares, einer Kurve* oder *Fläche 2. O.* oder *2. Kl*, ist gleich dem Rang der zugehörigen *Determinante*, § 39, 7; § 42, 1; § 139, 1. Als solchen bezeichnet *L. Kronecker*, Berl. Ber. (1884), S. 1071 die größte Zahl r von der Beschaffenheit, daß nicht alle Unterdeterminanten r-ten Grades verschwinden. Seine *Invarianz* § 39, 7; § 42, 1; § 139, 1 für jede Koordinatentransformation bei *K. Weierstraß*, Berl. Monatsber. (1868), S. 316.

II. *Geometrisch* kommt der Rang erstens in der *Anzahl der Doppelelemente* zur Geltung § 18, 1; § 78, 1; § 39, 8, zweitens in der *Mannigfaltigkeit niedrigster Ordnung*, der das Gebilde angehört (eigentl. Fläche 2. O. dem Raume von ∞^3 Punkten, Kegel dem Bündel von ∞^2 Strahlen, Ebenenpaar dem Büschel von ∞^1 Ebenen), drittens überhaupt in der durch die *Benennung* ausgedrückten Beschaffenheit des Gebildes § 19, (27); § 81, (27); § 80, (17). Das *Linienpaar* als Grenzfall der Kurve 2. O. bei *Desargues* nach Chasles, Aperçu II § 21, S. 75; *Poncelet*, Traité art. 221, das *Punktepaar* als Kurve 2. Kl. bei *Plücker*, Abh. S. 441. *Reduzible* Flächen 2. O. bei *Brandes*, Höh. Geom. (1824), S. 199; *Baltzer*, Geom. S. 454;

III. Bei der *analytischen Darstellung* tritt der Rang hervor in der niedrigsten Anzahl der Koordinaten in der Gleichung des Gebildes § 39, 10; § 42, 2; § 139, 2 bei *Plücker*, System (1846), S. 59; *Baltzer*, Geom. S. 198, 486; sowie spezieller in der Zahl der *Quadrate* in der Quadratdarstellung § 40, (4); § 39, (26); § 46, 13; § 149, 15 nach *S. Gundelfinger* in Hesse, Raum, S. 462.

IV. Die ursprünglichen Bedingungen des Ranges liegen nach seiner Definition I in dem *Verschwinden aller Unterdeterminanten eines bestimmten Grades* § 39, (16); (17); § 19, (27); § 81, (27). Die Bedingung § 19, (1); (1') in ausgeschriebener Form bei *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 131; 2 (1831), S. 50; 173; System (1835), S. 87; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 103; die Bed. § 79, (3) andeutungsweise bei *Lamé*, Exam. (1818), S. 42; 72; ausgerechnet bei *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 95; *Plücker*, System (1846), S. 52; 59. Die *Determinantenform* durch *Cauchy*, Exerc. 4 (1829), S. 142; *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1833), S. 11 = Werke 3, S. 207; *Hesse*, Ebene S. 94; Sieb. Vorl. S. 4; Raum, S. 138 in Gebrauch; vgl. *Baltzer*, Det. S. 42; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 154.

V. Eine Vereinfachung erfahren diese Bedingungen durch Zurückführung auf die *Hauptunterdeterminanten* § 49, (18) vor den geschweift. Klammern, § 152, (36) vor den Klammern. Diese Zurückführung geschieht durch die Betrachtung der Spezies und beruht auf den Determinantensätzen I Anm. 1, II, (7); (8); III, (21)—(23) in § 152, 11; 13.

VI. Während die „aufgelöste Form“ IV und V der Bed. des Ranges für die Einzelanwendung (vgl. die Tabellen § 40, (22); § 153, (21)) bequemer ist, er-

halten sie ihre theoretisch vollkommenste, „geschlossene Form“ durch Zurückführung auf *die Summen der Hauptunterdeterminanten* § 19, (28); § 81, (28); § 139, (30). Diese Form ergibt sich auf Grund der *orthogonalen Transformation* (s. Anm. 116) § 50, 19; § 155, 21; oder auf Grund der *Determinantenidentitäten* (s. Anm. 80).

VII. Bei den *Schnitten* der Kurve 2. O. mit einer Geraden und der Fläche 2. O. mit einer Ebene und einer Geraden durchlaufen die *Bedingungen des Ranges* ebenfalls die vorstehenden *drei Entwicklungsformen* IV - VI, nur daß überall, statt der einfachen, die *geränderten* Det., Unterdet., Hauptunterdet., Summen von Hauptunterdet. erscheinen: Form IV § 44, (17)—(19); § 141, (20) bis (23); § 142, (17)—(19); Form V § 49, (22) Zeilenvorschr.; § 153, (21) Zeilenvorschr.; § 154, (9); Form VI § 51, (35); § 141, (24); § 142, (24). Der Vergleich dieser Stellen dürfte zugleich die überall durchgeführte *Bezeichnung* A^u, A^u_{kl}, A'^u usw. *rechtfertigen.*

VIII. Bei den *geränderten* Det. treten als Bedingungen des Ranges von der Form IV z. B. § 107, (18) nur die „*regelmäßigen*“ *Unterdet.* § 107, (9) auf, während die „*unregelmäßigen*“ § 107, (10); (11) ausfallen. Indessen folgt aus dem Verschwinden aller 9 regelm. Unterdet. 3. Gr. A^u_{kl} auch das Verschw. der Det. 4. Gr. A^u selbst, sowie das der 7 unregelm. Unterdet. 3. Gr. § 44, 10; ebenso aus dem Verschw. aller 16 regelm. Unterdet. 4. Gr. A^u_{kl} das der Det. 5. Gr. A^u, § 141, bei (22), und der 9 unregelm. § 107, 4 (wo in Satz I „neben A^u“ wegbleiben kann); ebenso mit bezug auf $A^{uu'}$ § 142, bei (19) und § 142, 10. Auch begründen die Formeln § 44, (37); § 107, (21); § 142, (21) den Übergang zur Form V der Bedingungen.

77. **Identität der eigentlichen Kurven oder Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse.** I. Die Identität der eigentlichen Kurven und Flächen 2. O. und 2. Kl., § 18, 7 und § 78, 7, bei *Gergonne,* Ann. de math. 18 (1827/8), S. 152; *Plücker,* System (1835), S. 87; Abhandl. (1831). S. 225; System (1846), S. 21; 321.

II. Die Beziehung der *Gleichungen* der *eigentl.* Kurven und Flächen in *Punkt-* und *Linien-* bezügl. *Ebenenkoord.,* § 18, (9); (10) und § 78, (10); (11); § 45, 3; § 143, 3, bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 120 f.; System (1846), S. 321; s. dagegen Anm. 69.

78. **Polarsysteme im allgemeinen.** I. Ursprünglich war die *Kurve* oder *Fläche 2. O.* der Ausgangspunkt, § 18, 11; § 78, 13. Zwei Figuren, bei denen die Geraden der einen die Polaren der Punkte der andern und die Punkte der einen die Pole der Geraden der andern in bezug auf eine Kurve oder entsprechend eine Fläche 2. O. sind, wie die Dreiecke, § 48, 5; die Tetraeder, § 151, 8, erscheinen bei *Brianchon,* J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 14; cah. 13 (1806), S. 297 und *Poncelet,* Traité (1822), art. 232. *Poncelet* nennt sie, ebd. art. 229, *polaires réciproques* und die zugrunde liegende Kurve *directrice ou auxiliaire,* vgl. *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 19; *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 262; *Hesse,* Werke S. 33, art. 9. Die Polarverwandtschaft beim *Kegel,* § 79, 6; § 80, 3, wird entwickelt von *Chasles,* Cônes, S. 3; *Magnus* 2, S. 147 („konische Reziprozität“); *Salmon-Fiedler,* Raum, S. 87, 115; *Hesse,* Raum S. 163; 167; *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 147; 148.

II. Den umgekehrten Ausgangspunkt, vom „*Polarsystem*“ aus zur Kurve und Fläche 2. O., § 18, 11; § 78, 13, nimmt im Anschluß an *Gergonne, Steiner, Plücker* (vgl. I Anm. 119), *v. Staudt,* G. d. L. S. 131; Beitr. (1856), S. 55; 106. Die Kurve

und Fläche erscheint dann als *„Ordnungskurve“* oder *„Ordnungsfläche“* des Polarsystems, *v. Staudt,* G. d. L. S. 137; 197; *Reye,* G. d. L. 2, S. 103. Im gleichen Sinne erscheint das „Polarbündel“, § 79, 6, bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 211; Beitr. S. 285; Halbm. S. 36; *Reye,* G. d. L. 1, S. 109 f.; 2, S. 108; *Schröter,* Oberfl. S. 34; 37.

III. Als Sonderfall der *allg. Korrelation,* § 18, 12; § 78, 14, wird das Polarsystem von *Moebius, Plücker, Magnus* und *Chasles* erkannt (vgl. I Anm. 119).

79. **Koordinaten der Doppelelemente.** Die Koordinaten des *Doppelpunktes,* § 19, (2); § 42, (8), und der *Doppelgeraden,* § 19, (20); § 42, (16), der *Kurve 2. O.* bei *Clebsch-Lindemann,* Ebene S. 180; 184; die des Doppelpunktes § 79, (4); § 139, (8), der Doppelgeraden § 81, (2); § 139, (16) und der Doppelebene § 81, (21); § 139, (24) der *Fläche 2. O.* nach *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 150. Entsprechend sind die Koordinaten des Doppelpunktes § 107, (17); § 141, (32) und der Doppelgeraden § 107, (31); § 141, (46) eines *ebenen Schnittes der Flächen 2. O.* gebildet.

80. **Determinantenidentitäten.** Die systematisch hergestellten Identitäten für die *Summen der Quadrate der Unterdeterminanten bestimmten Grades* sind teils *unbedingte* für *einfache* Determinanten § 39, (20); § 19, (7); (23); § 79, (10); § 81, (17); (24) und für *geänderte* Determinanten § 44, (40) = § 109, (20); § 107, (25); (48); § 142, (28), teils *bedingte* § 23, (20); (25); § 94, (29); (35); (43); § 111, (17); (29); (35). Sie sind aus einer an das *Dupin*sche Paradoxon (s. Anm. 150) anknüpfenden Anregung von *Hesse,* Raum, S. 402 f., hervorgegangen, wo sich die Formel § 109, (20) im Spezialfall $H(\lambda) = 0$ findet. Bei der *Herleitung* bildet die Identität, § 81, (17), deshalb besondere Schwierigkeiten, weil zu den zwölf Formeln, § 81, (3), die drei entsprechenden für $\alpha_{11}\alpha_{44} - \alpha_{14}^2$, $\alpha_{22}\alpha_{55} - \alpha_{25}^2$, $\alpha_{33}\alpha_{66} - \alpha_{36}^2$ fehlen, so daß in § 81, (5) die Quadrate α_{14}^2, α_{25}^2, α_{36}^2 nicht eingeführt werden können. Entsprechendes gilt bei § 107, (41) für α_{14}^u, α_{25}^u, α_{36}^u.

Der *Zweck* dieser Identitäten ist einerseits die direkte Herleitung der gegeschlossenen Bedingungen des Ranges, Anm. 76, VI und andererseits die Verwendung zur Bestimmung der Elementarteiler bei der orthogonalen Transformation § 40, 9, II; III; § 50, 10; § 51, 9; § 155, 10; § 156, 9; § 157, 8.

81. **Tangente und Normale, Tangentialebene und Normale.** Die Involution, in der Tangente und Normale der *Kurve 2. O.* die Hauptachsen schneiden § 20, 6; 7; 18 und das Polarsystem, in der Tangentialebene und Normale der *Fläche 2. O.* die Hauptebenen schneiden § 120, 14; § 123, 12; § 118, 9 bei *Chasles,* Aperçu Note XXXI, art. (1); (18); vgl. *Schröter,* Kegelschn. S. 190; Satz § 20, 7, II bei *Schröter,* ebd. S. 193.

82. **Senkrechte harmonische Polaren und Achsenkomplex.** I. Die Theorie der *zugeordneten Normalstrahlen* § 20, 8; 19 folgt im wesentl. *Reye,* G. d. L. 1 (4. Aufl. 1899), S. 187 f. Sie ist die Vorstufe zur Theorie des *Achsenkomplexes.* Während aber in der Ebene, § 20, (18), *jede* Gerade als Normale von Pol auf Polare erhalten wird, werden im Raume als Normalen von Pol auf Polarebene *nur* ∞^3 von den ∞^4 Geraden erhalten. Sie bilden also einen Komplex § 85, 1. Als solcher, im Plückerschen Sinne (vgl. I Anm. 130), ist der Komplex zuerst von *Th. Reye* eingehend untersucht, *Reye,* G. d. L. 1. Aufl. (1868) und Ann. di mat. (2) 2 (1869), S. 1; vgl. über die Literatur *Reye,* G. d. L. 2 (4. Aufl. 1907), S. 223; *Kötter,* Ber. S. 403; *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 271; 320. Der Satz § 85, 9 von *E. Waelsch* (1887) nach Reye, G. d. L. 2, S. 215.

II. Die *Gemeinsamkeit* der senkr. konj. Polaren für *konfokale Kegelschnitte* § 32, 13; § 34, 11 und des Achsenkomplexes für konf. *Flächen* § 120, 12; § 123, 11 bei *Reye,* G. d. L. 1, S. 188; 2 S. 229; 240. Der Unabhängigkeit der Formeln § 85, (37), von a in § 85, (34) entspricht der Verschiebbarkeit des Achsenkomplexes eines Paraboloides in der Richtung der Hauptachse, *Reye,* G. d. L. 2, S. 221.

83. **Das Normalenproblem.** I. Das Normalenproblem der *Kegelschnitte* § 20, 9; 19 bei *Apollonius* nach Cantor 1, S. 341; *De la Hire* nach Cantor 3, S. 129; *Frézier* nach Cantor 4, S. 621; *Poncelet,* Traité (1822), art. 492; *Joachimsthal,* J. f. Math. 26 (1843), S. 172 ff.; *Steiner* (1854) Werke 2, S. 627; *Schröter,* Kegelschnitte S. 203; *Salmon-Fiedler,* Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 352; 394; siehe *Dingeldey,* Encykl., S. 62 ff.

II. Das Normalenproblem der *Flächen 2. O.* § 85, 14 bei *Chasles,* J. de math. (1) 3 (1838), S. 433; Quetel. Corr. 9 (1839), S. 49; Par. C. R. 54 (1862), S. 318; *Steiner,* J. f. Math. 49 (1854), S. 346 = Werke 2, S. 686; *Reye,* G. d. L. 2, S. 241; vgl. Staude, Encykl. III C 2, 44.

84. **Polarbeziehung der Direktrix.** Der Satz am Schluß von § 20, 9 von *De la Hire* nach Kötter, Ber. S. 54 und Dingeldey, Encykl., S. 54. Der Satz hängt aufs engste mit der *Identität der Direktrixeigenschaft* zusammen. Der Kegelschnitt gehört einem Büschel $K - \lambda U^2 = 0$ (Anm. 21) an, dessen Linienpaare das Kreisstrahlenpaar $K = 0$ (mit dem Scheitel F) und die Doppelgerade $U^2 = 0$ (die Direktrix) sind. In einem solchen sind alle Punkte P der Doppelgeraden Punkte gleicher Polare (§ 50, 3). In bezug auf das Kreisstrahlenpaar ist aber die Polare eines solchen Punktes P die in F zu PF errichtete Senkrechte. Diese ist daher auch in bezug auf den Kegelschnitt die Polare von P.

Entsprechend würde im Raume, wo die Tangente t_0 im Punkte P_0 eines Fokalkegelschnittes (§ 127, Fig. 190) die reziproke Polare der Direktrix p_0 des Punktes P_0 ist, die zur Verbindungsebene eines Punktes P der Direktrix mit der Tangente t_0 durch t_0 gelegte Normalebene die Polarebene von P sein, da t_0 Fokalachse ist (§ 122, 11).

85. **Polarsysteme mit besonderer Direktrix.** I. Die *imaginäre Ellipse* § 20, 10, der imag. *Kegel* § 84, 4, das imaginäre *Ellipsoid* § 82, 12 gewinnen durch das jedesmal entsprechende *reelle Polarsystem* ihre Vertretung, wie das imaginäre Punktepaar (Anm. 34) durch die zugehörige Involution; vgl. *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 157; *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 137; *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 341; *Reye,* G. d. L. 2 (1907), S. 91; 105.

II. Den anal. Ausdruck § 20, (27) der Polarreziprozität in bezug auf einen imag. Kreis vom Radius $\sqrt{-1}$ (*Dualität in gemeinen Koordinaten*) gibt *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 283; vgl. *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 24; in bezug auf eine imag. Kugel § 82, 13 *Salmon-Fiedler,* Raum, 3. Aufl. S. 184; 202. Der Ausdruck § 46, (24); § 149, (39) (*Dualität in Dreiecks- u. Tetraederkoord.*) nach *Hesse,* J. f. Math. 45 (1853) S. 88 = Werke S. 303.

86. **Besondere polarreziproke Figuren.** I. Der *Kegelschnitt als Reziproke des Kreises* in bezug auf einen Kreis bei *De l'Hospital,* Sect. Con. S. 275 und *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 48 nach Kötter, Ber. S. 171. Die analyt. Darstellung § 20, 12 von *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 59; 62; 125. Die *Rotationsflächen als Reziproke der Kugel* in bezug auf eine Kugel § 82, 14 bei *Poncelet* nach Kötter, S. 171; *Plücker,* System (1846), S. 319; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 213.

II. *Reziproke Ellipsoide* § 82, 15 benutzt *Chasles,* Corr. polyt. 3 (1816), S. 319.

87. Polarentheorie der imaginären Kreispunkte und des imaginären Kugelkreises. Die *Polarentheorie des imag. Kreispunktepaares* und des Kreisstrahlenpaares § 20, 22 bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 205; *Cayley,* Philos. Transact. 149 nach *Salmon-Fiedler,* Kegelschn. (4. Aufl. 1878), S. 574; *Baltzer,* Geom. S. 195.

Die des *imag. Kugelkreises* und des Kugelkegels § 84, 6 bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 210; 215; Beitr. S. 126; 128; Halbm. S. 36; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 341; 365; 370; *Clebsch-Lindemann,* Raum, S. 183 f.; 252; *Reye* 2, S. 97; *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 429; s. Anm. 169, II.

88. Das Hauptachsenproblem der Kurven und Flächen 2. O. Das Hauptachsenproblem der Kurven und Flächen 2. O. hat eine *doppelte Auffassung* erfahren, je nachdem nur die *einzelne* Kurve oder Fläche oder *zwei* solche gleichzeitig ins Auge gefaßt wurden.

I. Der Typus der *1. Auffassung* ist die Definition § 21, 1 und § 88, 1 der Hauptachsen („*Beseitigung des Gliedes* mit $\xi\eta$ *in der Gleichung* § 21, (2) *und der Glieder mit* $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ *in* § 88, (2)“), welche ausgeht von *Euler,* Introd. 2, art. 125 f. und append. art. 114; *Monge-Hachette,* J. éc. pol. cah. 11 (1802), S. 154; *Biot,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 187 (die Definition § 21, 6, II und § 88, 5, II nach *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 17; *Cauchy,* Exerc. 3 (1827), S. 67; 4 versagen in Ausnahmefällen, während die § 21, 1 und § 88, 1 alle Fälle § 21, 13 und § 90, 7 gleichmäßig umfassen).

II. Der Typus der *2. Auffassung* ist die Definition § 21, 2, II und § 88, 2, II („*gemeinsames Polzweieck des unendl. fern. Punktepaares der Kurve 2. O. und des imag. Kreispunktepaares, gemeins. Poldreieck des u. f. Kegelschnittes der Fläche 2. O. und des imag. Kugelkreises*“), welche von *Chasles,* Corr. polyt. 3 (1816), S. 330; *Poncelet,* Traité art. 624, vorbereitet, von *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 148; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 1 = Werke 3, S. 193; *Hesse,* Ebene S. 125; Raum S. 244 als Problem der gleichzeitigen Transformation zweier quadrat. Formen auf eine Summe von Quadraten erkannt und von *Weierstraß,* Berl. Ber. 1858, S. 216 auch für den Fall gleicher Wurzeln der Determinante $\Delta(\lambda)$ in § 21, (17); § 88, (17) erledigt wurde. Dabei ordnet sich das Hauptachsenproblem des Kegelschnittes unter die orthog. Transf. des Punktepaares § 40, 7 und das der Fläche 2. O. unter die des Kegelschnittes § 50, 2 unter.

III. Die *Ausführung* § 21, 6—7 und § 88, 2—7, die für beide Auffassungen I und II zusammenläuft, folgt im wesentl. *Cauchy,* Exerc. 3, S. 67 f.; 4 f.

IV. Das Hauptachsenproblem der *ebenen Schnitte* § 108, 8 ist von *Cauchy,* Appl. (1826), S. 266 in Angriff genommen, weiter entwickelt von *Hesse,* Raum S. 395; *Henrici,* J. f. Math. 64 (1865), S. 187.

89. Quadratische und kubische Gleichungen der Hauptachsenprobleme der Kurven und Flächen 2. O. u. 2. Kl. I. Die *quadrat. Gl. des Hauptachsenproblems der Kurve 2. O.* in der *trigonometr.* Form (Gl. f. die Hauptachsen*richtung*) § 21, (9) und § 8, (31) bei *Hachette-Poisson,* J. éc polyt., cah. 11 (1802), S. 171; *Cauchy,* Exerc. 3 (1827), S. 73; in der *algebr.* Form (Gl. f. d. Hauptachsen*koeffizienten*) § 21, (17) und § 29, (21) ebd. S. 68; die *Realität* der Wurzeln § 21, (20) und die Bedingungen ihres *Gleichwerdens* § 21, (22), ebd. S. 68. Die Gl. § 22, (23) für *schiefw.* Koord. in trigon. Form bei *Euler,* Introd. 2, art. 125; *Magnus,* Aufg. 1, S. 112; *Grunert,* Arch. Math. Phys. (1) 51 (1870), S. 279. Die quadr. Gl. des Hauptachsenproblems *der Kurve 2. Kl.* § 28, (16); § 29, (12) bei *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 272.

II. *Die kubische Gl. des Hauptachsenproblems der Fläche 2. O.* ursprünglich auch in *trigon.* Form (für die Hauptachsen*richtungen*) bei *Euler,* Mechanik starrer Körp. (1765) deutsch von *J. Ph. Wolfers* 3, S. 214; *Hachette-Poisson,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 170; *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 19; 78; *Bourdon,* ebd. 2 (1811), S. 191; 250; in der *algebr.* Form (für die Hauptachsen*koeffizienten*) § 88, (17), aber *entwickelt,* zuerst bei *Hachette-Petit,* Corr. polyt. 2 (1812), S. 325; 327; *Cauchy,* Appl. 1 (1826), S. 240; in *Determinantenform* zuerst bei *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 142. Die *Realität* der Wurzeln in der Weise § 89, 3 von *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 6ff. in der Weise § 50, 7 von *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 145; *Jacobi,* Werke 3, S. 209; *Hesse,* Raum S. 250. Über zahlreiche andere Beweise s. Encyklopaedie III C 2, S. 175. Die Gleichung § 91, (19) für *schiefw.* Koord. bei *Binet,* J. éc. polyt, cah. 16 (1813), S. 50; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 51; *Plücker,* System (1846), S. 212; die Realität ihrer Wurzeln beweisen *Ch. Brisse,* Nouv. ann. (3) (1882), S. 193, 207; *Gundelfinger,* ebd. 13 (1884), S. 7. Die kub. Gl. des Hauptachsenproblems *der Fläche 2. Kl.* § 102, (12) bei *Hesse,* Raum, S. 342.

90. **Invarianten der Kurve und Fläche 2. O.** I. Die *Determinante* als Invariante einer quadrat. Form *bei jeder linearen Substitution* für $n = 2$ in § 39, (12) bei *Lagrange,* Mém. de Berlin 1773, S. 285 (nach *Baltzer,* Det. S. 51), für $n = 3$ in § 22, (16), § 31, (13) und § 41, (17) bei *Gauß* (1801), Werke 1, S. 302; für beliebiges n mit der *Methode* § 41, 6; § 138, 6 bei *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), S. 83 = Werke, S. 114; J. f. Math. 49 (1853), S. 243ff. = Werke, S. 329.

Der Name Invariante (Hessesche Determinante) von *Sylvester,* Philos. Mag. 2 (1851), S. 396 (nach *Baltzer* Det. S. 171); *Sylvester,* Cam. Dubl. math. J. 6 (1851), S. 290; *Fr. Meyer,* Encyklopädie d. math. W. 1, S. 322.

II. Die beiden letzten *dem gemeinen Koordinatensystem eigentümlichen Invarianten der Kurve 2. O.* § 22, (16) gibt *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 144; der Kurve 2. Kl. § 31, (13) in nicht ganz reiner Form *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 85. (Die Plückersche Formel (14) ist der Quotient $\frac{B}{\sin^4\omega} : \left(\frac{b_{33}}{\sin^2\omega}\right)^3$, die Plückersche Formel (15), in der es A^3 statt A^4 heißen muß, ist der Quotient des zweiten Ausdruckes § 31, (13) und des Quadrats des dritten).

III. Die Invarianten A_{44}, A'_{44}, A''_{44} der Fläche 2. O. im rechtw. System § 91, 4 bemerkt *Cauchy,* Appl. 1 (1826), S. 244; *Plücker* (1842) Abhandl. S. 390; die im schiefw. System § 91, (17) bei *Briot et Bouquet,* Géom. analyt. S. 612; die der Fläche 2. Kl. § 105, (17) bei *Hesse,* Raum S. 372; § 105, (23) bei *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 51.

IV. Die Invariante k des linearen Komplexes im rechtw. System § 86, 3; § 87, (10) bei *Plücker,* N. Geom. (1868), S. 37; 58.

91. **Doppelte Auffassung der Invarianten.** I. Die Erhaltung der Gleichung des imag. Kreispunktepaares § 31, (7) und des imag. Kugelkreises § 105, (12) *bei jeder Veränderung der rechtw. Koordinaten* nach *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 41.

II. Die Auffassung von der Invarianz des Kreispunktepaares und des Kugelkreises *bei der kontinuierlichen Gruppe der Euklidschen Bewegungen* ausgebildet von *Lie,* s. für das Kreisstrahlenpaar § 22, (27), *Lie-Scheffers,* Differentialgl. S. 9f.; für das Kreispunktepaar § 31, (7), *Lie-Scheffers,* Kontin. Gruppen, S. 110; für den Kugelkegel § 91, (22) und den Kugelkreis § 105, (12), *Lie-Scheffers,* Kontin.

Grupp. S. 549; ferner *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 529. Bei der Rotation in der Ebene sind alle um den Drehungspunkt beschriebenen Kreise (zu denen auch das Kreisstrahlenpaar § 22, (27) gehört); bei der Rotation um eine Achse im Raume § 53, (6) alle um diese beschriebenen Rotationsflächen, bei der Rotation um einen Punkt im Raum § 91, (22) alle Kugelflächen invariant; bei der Schraubenbewegung § 57, (8); (10) alle Schraubenlinien nach *Lie-Scheffers*, Differentialgl. S. 287.

92. **Unterscheidung und Koordinaten der Mittelpunkte.** I. Die Unterscheidung der *Anzahl der Mittelpunkte* der *Kurven 2. O.* § 23, 3 bei *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 79, der *Flächen 2. O.* § 94, 3 bei *Cauchy*, ebd. S. 99, genauer bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 207; der *ebenen Schnittkurven* der Flächen 2. O. § 111, 1 bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 266.

II. Die Unterscheidung eines *endlichen* und *unendl. fernen* Mittelpunktes § 23, 4 bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 150 und § 94, 4 bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 115; 123; *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 153.

III. Die *Koordinaten* des Mittelpunktes der *Kurve 2. O.* § 23, (12) bei *Euler*, Introd. 2, art. 107; der Fläche 2. O. § 94, (16) bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 238; Exerc. 3 (1828), S. 91; der *ebenen Schnittkurve* der Fläche 2. O. § 111, (11) bei *Cauchy*, Applic. S. 265, wo sich die Bed. § 111, (14) (mit $-P=0$ bez.) findet; ihre Bedeutung § 111, (19) bei *Salmon-Fiedler*, Raum S. 373.

IV. Die *Determinantenbeziehungen* § 23, (20); (25); (28) bei der *Kurve 2. O.*; § 94, (29); (35); (43) bei der *Fläche 2. O.*; § 111, (17); (29); (35) bei der *Schnittkurve* begründen jedesmal das *Ineinandergreifen* der Bedingungen des Mittelpunktes und des Ranges, wonach z. B. eine Fläche mit ∞^1 Mittelp. keine eigentliche sein kann.

V. Die Tabellen § 23, 8; § 94, 10; § 111, 12 zeigen die Analogie der Bedingungen der verschiedenen Mittelpunktsverhältnisse in den drei Fällen und motivieren gleichzeitig die Bezeichnung der geränderten Determinanten mit dem oberen Index u.

93. **Die Mittelpunktsgleichung und ihr konstantes Glied.** I. *Begriff und Form der Mittelpunktsgleichung* für die *Kurve 2. O.* § 24, (4) bei *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 79; *für die Fläche 2. O.* § 95, (3) bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 239; *Hesse*, Raum, S. 158.

II. *Die Bestimmung des konstanten Gliedes* für die Kurve 2. O. § 24, (8) bei *Cauchy*, Exerc. 3, S. 74 (mit $K-k$ bezeichnet), für die Fläche 2. O. § 95, (7) bei *Cauchy*, ebd. S. 91; die Determinantenformen § 24, (8); § 95, (7) nach *Magnus*, Aufg. 2, S. 209 bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 159; Raum S. 166; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 107. Die Unabhängigkeit von der Wahl eines Mittelpunktes im Falle von unendl. vielen solchen bemerkt *Cauchy*, ebd. S. 99. Die Formeln § 24, (8); (10); § 95, (7); (11); (13); § 112, (7); (11) enthalten die vollständige Reihe dieser Bestimmungen.

94. **Scheitelpunkt der Parabel und des Paraboloides.** I. Die Koord. des *Scheitels der Parabel* bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 173, und des *Paraboloides* bei *Plücker*, System (1846), S. 147; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 178. Für die davon abweichenden Formeln § 25, (26) und § 97, (29) war die Absicht maßgebend, *im Nenner die Invarianten A und A'_{33}, bezgl. A'_{44} direkt einzuführen*, wie in § 25, (27) und § 97, (30), weil auf diese allein sich die *Voraussetzung*

§ 25, (8) und § 97, (7) bezieht. Aus demselben Grunde ist den Koordinaten des Scheitels der *parabol. Schnittkurve* die Form § 113, (22) gegeben. Die *Scheitelachse* des parabol. Zylinders § 98, 6; 7 bestimmt *Plücker,* System (1846), S. 150. Die entsprechenden Formeln für die Kurve und Fläche 2. Kl. § 29, (11); § 103, (10) ebenfalls nach *Plücker,* System (1846), S. 193.

II. Die Übereinstimmung der Bedingungen des unendl. fern. Mittelp. einerseits und des Verschwindens einer Wurzel λ_1 § 97, 2 bemerkt *Cauchy,* Exerc. 3, S. 103; *Hesse,* Raum S. 251.

95. **Klassifikation der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die Klassifikation der Kurven und Flächen 2. O. *mittels der Transformation des gemeinen Koordinatensystems* ist, nach unvollst. Anfängen bei *Fermat* (s. Anm. 40), von *Euler,* Introd. 2 (1748), art. 131 ff und append. art. 101 ff. u. *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 153 begonnen. Als Bedingungen z. B. für Zeile 1 der Tabelle § 99, (31) gibt *Euler,* a. a. O. app. art. 108—10: $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$, in seiner Bezeichnung: $4\delta\zeta > \varepsilon^2$, $4\alpha\delta > \beta^2$; $4\alpha\zeta > \gamma^2$; $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 < \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, $\alpha > 0$. Alle Einzelfälle suchen die Klassifikationen von *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 69 ff.; 85 ff.; *Magnus,* Aufg. 1 (1833), S. 104; 2 (1837), S. 221 zu umfassen.

II. Aber erst nach Einführung der *homogenen Koordinaten* durch *Plücker,* System (1835), S. 87; System (1846), S. 73, der *topographischen Bezeichnung* der Koeffizienten (s. Anm. 40) und der *Determinanten* (s. Anm. 41) konnte die *elementare* Klassifikation ihre *volle Ausbildung* erhalten. Diese liegt nun einerseits in der Herstellung der *kanonischen Gleichungen* (Tabelle § 26, (2); § 99, (2)), in denen die neuen Koeffizienten Invarianten des rechtwinkligen Systems sind (§ 22, 4; 5; § 91, 4) und mit denen die Halbachsenquadrate, Parameter usw. der betr. Kurven und Flächen durch die ursprüngl. Koeff. a_{kl} in § 26, (1); § 99, (1) dargestellt sind; andererseits in der Herstellung der *Bedingungen für jede einzelne Art,* Tabelle § 26, (19); § 99, (31).

III. Sind dabei für die Ausgangsgleichungen § 26, (1); § 99, (1) zunächst *rechtw.* Koord. zu Grunde gelegt, so kann man die kanon. Gleichungen durch Einführung der Ausdrücke § 26, (22); § 22, (23) in die Tabelle § 26, (2) auch in *schiefw.* Koord. übertragen, und entsprechend § 99, (2). Für die Klassifik. aber *gilt die Tabelle* § 51, (38) *und* die nach § 155, 21; § 156, 18 veränderte § 153, (21) *sowohl bei rechtw.* als bei *schiefw. Koord.* in der Ausgangsgleichung. Aber auch die Tabelle § 26, (19), die sich von § 51, (38) nur in den beiden ersten Kolonnenüberschr unterscheidet, gilt mit Rücksicht auf § 26, (21); (22) auch für *schiefw.* Koord., da $a_{11} + a_{22}$ und $a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega$ für $A_{33} > 0$ gleiches Vorzeichen haben nach *Grunert,* Arch. Math. Phys. (1) 51 (1870), S. 288. Es gilt nämlich, wie § 23, (25), die Identität:

$$(a_{11} + a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega) = \{(a_{11} - a_{12})^2 + (a_{21} - a_{22})^2\}\cos^2\frac{\omega}{2} + \{(a_{11} + a_{12})^2 + (a_{21} + a_{22})^2\}\sin^2\frac{\omega}{2} + 2A_{33}.$$

IV. Die Behandlung der Klassifikation in *Dreiecks- und Tetraederkoordinaten* § 49, (22) und § 153, (21), wo man die Gleichung § 49, (19) oder § 141, (2) speziell als Gleichung der unendl. fern. Geraden oder Ebene ansehen kann, bringt schließlich die allgemeinen Gesichtspunkte zur Geltung: 1. Die Klassif.

der Kegelschnitte und Flächen 2. O. ist ein Spezialfall der *Klassifikation der Schnittpunktpaare des Kegelschnittes mit einer Geraden*, bezügl. der *ebenen Schnitte der Fläche 2. O*; 2. die Einteilung geschieht nach *zwei Einteilungsgründen*, die Spezies der Kurve oder Fläche selbst (Kolonnen der Tabellen § 51, (38) und § 158, (21)) und der Spezies des unendl. fernen Schnittpunktpaares oder Schnittkegelschnittes (Zeilen der Tabellen); 3. Beide Einteilungsgründe sind *teilweise voneinander abhängig*, so daß nicht jede Kombination möglich ist (freie Felder der Tabellen). Von der zahlreichen Literatur sei nur hervorgehoben: *Hesse*, Raum S. 253; *Gundelfinger*, daselbst S. 465 und J. f. Math. 127, (1904), S. 85; *Lindemann*, Raum S. 161; *K. Hensel*, J. f. Math. 113 (1894), S. 303; *E. Timerding*, J. f. Math. 122 (1900), S. 172; *C. Koehler*, Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), S. 21, 94; *L. Heffter*, J. f. Math. 126 (1903), S. 83.

96. **Die Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Klasse.** I. Die *elementare Methode*, nach der die Klassif. der Kurven und Flächen *2. Klasse* in den §§ 27—30 und §§ 101—104 durchgeführt wird, folgt im wesentl. *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 48 ff. und System (1846), S. 191 ff.; ferner *Hesse*, Sieb. Vorl., S. 24; 40 und Vorles. Raum, S. 173.

Dabei gilt es besonders, die *gegenseitige Abhängigkeit* der den *verschiedenen Einteilungsgründen* (Rang § 27, 1; § 101, 1; unendl. ferne Gerade u. Ebene § 27, 2; § 101, 2; Mittelpunkt § 27, 4; § 101, 5; Hauptachsenproblem § 28, (25); § 102, (22)) entsprechenden *Bedingungen* mittels Determinantensätzen herzustellen.

II. Die *Koordinaten des Mittelpunktes* § 27, (12) bei *Hesse*, Sieb. Vorles., S. 23; § 101, (13) bei *Plücker*, System (1846), S. 192; *Hesse*, Raum, S. 161.

III. Die *Kriterien der Ellipse, Hyperbel, Parabel* § 104, 5 bei *Plücker*, ebd. S. 195; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 204.

97. **Brennpunktsgleichungen in Linien- und Ebenenkoordinaten.** Die charakteristische Gleichung des Kegelschnittes § 31, (28) ist von *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 167 ff. gegeben, die speziellen Formeln § 31, (32) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 45 f. Die entsprechende Gl. der Rotationsfläche 2. O. § 105, (31) von *Plücker*, System (1846), S. 243; 247; *Hesse*, Raum S. 344.

98. **Begriff und Name konfokal.** I. *Zwei konfokale Parabeln* § 34, 1 treten bei *Tschirnhaus* (1695) auf nach Cantor 3, S. 155; *zwei konfokale Ellipsen* § 32, 1 und *Ellipsoide* § 55, 10 bei *Maclaurin* (1742) nach Chasles, Aperçu IV § 23 und Cantor 3, S. 748. Konfokale Ellipsoide ferner bei *P. S. Laplace*, Méc. cél. (1782), Ostwalds Klassiker Nr. 19, S. 21; *J. Ivory*, London philos. Transact. (1809), S. 351; *C. F. Gauss* (1813) Werke 5, S. 19. Jedoch handelt es sich bei diesen auf das Problem der Anziehung der Ellipsoide bezüglichen Untersuchungen nur um *gleichartige* konfok. Flächen.

II. Mit dem *Namen* „konfokal" bezeichnet *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 204 zwei Kegelschnitte und, Aufg. 2 (1837), S. 353, zwei Rotationsflächen, die *einen* Brennpunkt gemein haben, während *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 137 = Werke 7, S. 7 „konfokale" Flächen 2. O. solche nennt, deren Hauptschnitte dieselben Brennpunkte haben. *Lamé*, Ann. chim. phys. 53 (1833), S. 199 und J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 nennt solche Flächen „surfaces homofocales".

99. **Gestaltliche Verhältnisse des konfokalen Systems.** I. Die Gestalt des *vollen* konfokalen Systems, die Unterscheidung und Veränderlichkeit der ungleichartigen Flächen § 120, 3; 4 und § 123, 2; 3; die dreifache Erfüllung des

Raumes durch sie § 120, 5; 6 und § 123, 4; 5 beschreibt erschöpfend *Dupin,* Dével. (1813), S. 269 und S. 281, und schließt damit auch die entsprechende Betrachtung für die Ebene § 32, 3—6; § 34, 2—5 ein.

II. Den *rechtwinkl. Durchschnitt* ungleichartiger konfokaler *Kegelschnitte* § 32, 7 bemerkt *Dupin,* Dév., S. 269 und zugeh. Fig. 12; *Gergonne,* Ann. de math. (1822/3), S. 316; *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 211; für konf. *Kegel* § 118, 7 *Chasles,* Cônes (1830), S. 28; für *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Paraboloide* § 120, 7 und § 123, 6 *Dupin,* Dév. S. 268; 302; 316; *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 59; J. de math. 2 (1837), S. 248.

III. Die Gleichungen § 120, (1); § 123, (1) im wesentl. auch bei *Dupin,* Dév. S. 309; 318; vgl. *Jacobi,* Vorl. Dynamik (1866), S. 207; 212 *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 50; 52; Raum, S. 288; 305.

100. **Das konfokale System als Schar.** I. Die *vier gemeins. imag. Tangenten* § 32, 9 finden sich angedeutet bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 453 und bestimmt ausgesprochen bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47). Die *Gleichung* der konf. Schar in *Linienkoordinaten* § 32, (12); (13) und die Punktepaare der Schar § 32, (24) bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 172; 180; System (1846), S. 279; auch *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 42; 46; 48.

II. Die *gemeins. Developpable* zweier Flächen überhaupt tritt bei *Monge* auf nach Cantor 4, S. 537. Die abwickelbare Linienfläche der Schar der Konfokalen § 120, 10; § 123, 9 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47); die *Gleichung* in *Ebenenkoordinaten* § 120, (18) gibt *Plücker,* System (1846), S. 255; 331; vgl. Abhandl. S. 228; vgl. *v. Staudt,* Beitr. S. 383; *Hesse,* Raum S. 337.

101. **Polarentheorie im konfokalen System.** Die Polarensätze § 32, 12; § 34, 11 bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 197; System (1846), S. 279; Abhandl. S. 195; für die Schar im allg. bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 42. Die entsprechenden Sätze im Raume § 120, 11 und § 123, 10 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (50); (51); *Plücker,* System (1846), S. 331; vgl. Kötter, Ber. S. 171; 400; 402.

102. **Hauptachsen der Tangentenpaare und Berührungskegel.** I. Der Satz über die Hauptachsen des *Tangentenpaares* der *Ellipse, Hyperbel und Parabel* § 32, 13, III; § 34, 11 bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 478; *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (10); *Plücker,* System (1846), S. 280; die Herleitung der *Hauptachsengleichung* § 33, (19) nach *Hesse,* Raum, S. 291.

II. Die entsprechenden Sätze für den *Kegel* § 119, 7 gibt *Chasles,* Recherches (1829), S. 41; Cônes, S. 19; die für die *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Paraboloide* § 121, 7; § 122, 1; § 124, 7 sind von *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 137; später von *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (10); (11); (32) angegeben. Die wirkliche Herstellung der *Hauptachsengleichungen* § 121, (18); (24); (36); § 124, (18); (24) gibt *Mac Cullagh* (1843), Coll. Works, S. 311; daß die Erzeugenden gleiche Winkel mit den Krümmungslinien bilden, bemerkt schon *Dupin,* Dével. (1813), S. 52; vgl. *Cayley,* Cam. Dubl. math. J. 3 (1848), S. 48; *A. Wangerin,* Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), S. 126.

III. Die Einführung der Tangenten der zwei durch den Punkt $P = \lambda, \mu$ gehenden Kurven der konfok. Schar als *Koordinatenachsen* ξ, η in § 33, (13) setzt voraus, daß diese *zwei Tangenten getrennt* sind. Dies ist nach § 33, (12) der Fall, wenn $\lambda \neq \mu$. Dagegen ist es für die Punkte der vier gemeins. imag. Tangenten § 32, (23) im allg. nicht der Fall, weil durch solchen Punkt nur *eine*

Kurve $\lambda = \mu$ der Schar geht und nur *eine Tangente* zur Verfügung steht, im besonderen aber doch wieder der Fall für die Werte $\lambda = \mu = \beta$ oder $\lambda = \mu = \alpha$, weil dann die Kurve $\lambda = \mu$ in ein Punktepaar § 32, (24) zerfällt und in jedem Punkte des Paares ein ganzes *Büschel von Tangenten* zur Verfügung steht. Die Gleichung § 33, (19) kann daher auf alle Punkte $\lambda \neq \mu$ und wie in § 33, (23) auf die Punkte $\lambda = \mu = \beta$ oder α angewendet werden, jedoch nicht auf andre Punkte $\lambda = \mu$ (§ 13, (26)). Aus entsprechendem Grunde ist die Gleichung § 121, (18) auf alle Punkte mit *drei verschiedenen* ellipt. Koord. λ, μ, ν und alle Punkte, wo *zwei* ellipt. Koord. den *gemeins. Wert* γ, β *oder* α haben, § 122, 8, anwendbar, *nicht aber* auf *andere* Punkte mit *zwei* oder solche mit *drei gleichen* elliptischen Koord. (§ 70, (19)).

103. Elliptische Koordinaten. I. Die *ellipt. Koord.* in der *Ebene* § 33, 1 schuf *Euler* zur Behandlung des Problems der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren, nach Jacobi, Werke 2, S. 61, Vorl. Dynamik (1866), S. 221; sodann erscheinen sie, auf ellipt. u. hyperb. Zylinder angewendet, bei *Lamé,* J. de math. (1) 2 (1837), S. 173. Die ellipt. Koord. im *Raume* § 121, 1 schuf *Lamé,* J. éc. polyt., cah. 23 (1834), S. 235; Par. Mém. sav. étrang. 5 (1838), S. 174; J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 (wo zuerst der *Name* „coordinées elliptiques" auftritt); 4 (1839), S. 134; 8 (1843), S. 430; die *parabolischen* § 124, 1 ebenfalls *Lamé,* J. de math. (1) 8 (1843), S. 434 und (Nachlaß) J. de math. (2) 19 (1874), S. 311. Ellipt. Koord. für *n* Dimensionen bei *Jacobi,* Vorl. Dynamik (1866), S. 198.

II. Die Darst. der *gem. Koord.* durch die *ellipt.* § 120, (13) und *parabol.* § 123, (13) bei *Lamé,* J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 und J. de math. (1) 8 (1843), S. 434. Die Realität der Wurzeln der *kubischen Gleichung* § 120, (10) und die Bestimmung ihrer Grenzen § 120, (11) gibt (für beliebiges *n*) *Jacobi,* Vorl. Dynam. S. 199. Die kub. Gl. ist die *Resolvente* der *biquadrat.* Gl. der gebrochenen Fokaldistanzen § 134, 6 nach *Staude,* Leipz. Ber. 1897, S. 75.

III. Die *Identitäten* § 33, 3; § 121, 3 für beliebiges *n* bei *Jacobi,* Vorl. Dyn. S. 201; vgl. *Hesse,* Vorl. Raum S. 288.

104. Ivorys Theorem. Das *Ivorysche Theorem* umfaßt *drei* Gesichtspunkte: 1. die *affine Verwandtschaft* § 129, (5) zwischen zwei konfokalen Ellipsoiden (bezüglich § 36, (5) Ellipsen) und den Begriff der hierbei sich *entsprechenden* (korrespondierenden) *Punkte,* die *J. Ivory,* Lond. Phil. Trans. 1809 I, S. 355 (Ostwalds Klass. Nr. 19, S. 32) einführt; 2. den *Entfernungssatz* § 129, (9) (§ 36, (9)), der bei *Ivory,* ebd. S. 353 (S. 31) in der Formel

$$\Delta^2 = (h \cos m - k \cos \varphi)^2 + \cdots = (k \cos m - h \cos \varphi)^2 + \cdots$$

versteckt liegt und von *M. Chasles,* J. de math. (1) 5 (1840), S. 485 (Ostw. Klass. Nr. 19, S. 93) klar ausgesprochen und in der hier § 129, 2 (§ 36, 2) vorliegenden Weise abgeleitet wird; 3. Die Gewinnung entsprechender Punkte als solcher mit *zwei,* § 129, 7; 8 (oder *einer,* § 36, 5) *gleichen ellipt. Koord.*, die bei *Ivory,* ebd. S. 352 (S. 30) in der Parameterdarst. $a = h \cos m$, usw. im Keime enthalten, aber nicht ausgesprochen ist. Für die Ebene ist das Ivorysche Theorem aus *Jacobis* Nachlaß von *O. Hermes,* J. f. Math. 73 (1871), S. 180 = Werke 7, S. 43, entwickelt; vgl. *G. Darboux,* Sur les théorèmes d'Ivory, Paris (1872), S. 25.

105. Die Jacobischen Fokaleigenschaften. Die Sätze § 36, 6, II und § 129, 9, II bezeichnet *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 139 = Werke 7, S. 8 ohne

nähere Ausführung als Folgen des Ivoryschen Theorems. Die Ableitung § 36, 6 findet sich in *Jacobis* Nachlaß (*O. Hermes*), J. f. Math. 73 (1871), S. 182 = Werke 7, S. 44 und die Ableitung § 129, 9 bei *O. Hermes*, J. f. Math. 73, S. 211. Einen Zusatz über die Bestimmung der Flächennormale gibt *F. Joachimstal*, J. f. Math. 73, S. 207; die Entwicklungen § 36, 7 und § 129, 10 und weitere bei *Darboux*, Sur les théorèmes d'Ivory, Mem. Soc. Bordeaux 8 (1872), S. 197 ff.; vgl. auch *Townsend*, Cam. Dubl. math. J. 3 (1848), S. 150, *Schröter*, Oberfl. S. 639; *J. Larmor*, Proc. Lond. math. Soc. 16 (1885), S. 189 ff.

106. **Pascalscher und Brianchonscher Satz.** Der Satz § 37, 4 (links) von *Bl. Pascal*, Essai pour les coniques (1640), lemme 1, vgl. Chasles, Aperçu Note XIII; Cantor 2, S. 679 ff.; 3, S. 802; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 186. Der Satz § 37, 4 (rechts) von *C. J. Brianchon*, J. éc. polyt. cah. 13 (1806), S. 301; Lignes du sec. ordre (1817), S. 34. *Analyt.* Beweise gaben *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1828), S. 366; *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 184; System (1835), S. 119; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 152, an die sich das § 37, 5 angegebene Verfahren von *Hesse*, Ebene, S. 163 anlehnt.

Die 60 Sechsecke aus 6 Punkten § 52, 10 bemerkt *Bobillier*, a. a. O. und *Plücker*, Entw. 1, S. 185; Abhandl. S. 164. Die Punkte § 52, 11 bei *Steiner* (1828) Werke 1, S. 224 ohne Beweis; diesen gibt *Plücker* (1829) Abhandl. S. 166.

Ausführl. Geschichte des Pascalschen Satzes bei *Möbius*, Werke 1, S. 634; *Kötter*, Ber. S. 14 ff.; *Dingeldey*, Encykl. S. 32 f.

107. **Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Punkten.** I. Die Anwend. des Pascalschen Sechsecks § 37, 7 bereits *Pascal* selbst bekannt nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187; später bei *Poncelet*, Traité (1822) art. 208. II. Die Konstr. durch projekt. Büschel § 38, 4 von *Steiner*, Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 338.

108. **Grenzfälle des Pascalschen Satzes.** I. Über das einbeschriebene *Fünfeck* § 37, 8 vgl. *Reye*, G. d. L. 1, S. 82. II. Die Sätze über das *Viereck* und Vierseit § 37, 9 nach Kötter, Ber. S. 33; 50 und Dingeldey, Encykl. S. 20 von *R. Simson* (1735); nach Cantor 3, S. 802 auch bei *C. Maclaurin* (1748); vgl. *Plücker*, System (1835), S. 117. III. Der Satz über das *Dreieck* § 37, 10 nach Dingeldey, Encykl. S. 36, von *Carnot* (1803) und *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1828), S. 321 ff., vgl. *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 185; s. Anm. 125; der Satz über das Dreiseit § 37, 10 nach Dingeldey, Encykl. S. 36, von *J. Ceva* (1678); auch bei *Maclaurin* nach Kötter, Ber. S. 50.

109. **Projektive Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O.** I. Umschriebene Spezialfälle der Erzeugung der *Kegelschn.* durch proj. Strahlbüschel und Punktreihen finden sich bei *Apollonius*, III, art. 53—56, bezügl. 41—43 (Heib. 1, S. 439; 413) nach Zeuthen, Kegelschn. S. 123; 344; bei *Pascal* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187 und *Cavalerius* (1647) nach Kötter, Ber. S. 9; ferner bei *Newton* (1706) als descriptio organica nach Cantor 3, S. 424; bei *De l'Hospital* (1720) nach Cantor 3, S. 427; bei *Maclaurin* (1720) nach Cantor 3, S. 427 und *Braikenridge* (1733) nach Cantor 3, S. 788. Die allgemeine Begründung gibt *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 329 ff.; s. *Schoenflies* in der Encyklopädie III AB 5, S. 416. Die analyt. Darst. § 38, 2 bei *Hesse*, Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), S. 383; 397; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 79.

II. Die Erzeugung der *Linienflächen* durch proj. Ebenenbüschel und Punkt-

reihen § 159, 5 in Spezialfällen bei *Hachette*, Corr. polyt. 1 (1806), S. 179; *Binet*, ebd. 2 (1810), S. 71; *Poncelet*, J. f. Math. 4 (1829), S. 49; *Meier-Hirsch*, Aufg. 2 (1807), S. 238; *Giorgini*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 440; *Chasles*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 446. Systematisch bei *Steiner* (1832), Werke 1, S. 370.

110. Spezielle projektive Gebilde. Die Erzeugung der Parabel durch *ähnliche* Punktreihen § 38, 6 bei *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 334; Die Erz. des Kreises und der gleichseit. Hyperbel § 38, 7 durch *kongruente* Büschel bei *Steiner*, ebd. Werke 1, S. 330; 336; *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 128; s. Anm. 165, IV.

111. Dreiteilung des Winkels. Die *Dreiteilung* wurde mittels einer *gleichseitigen Hyperbel* ausgeführt von *Alsidschzi* (972) nach Cantor 1, S. 750. Für die Geschichte der Dreiteilung vgl. *J. E. Montucla,* Histoire des recherches sur la quadrature du cercle etc., Paris 1754; nouv. éd. par *S. L. Lacroix*, Paris 1831; *M. Backer,* A collection of solutions of the trisectionproblem, Bull. phil. soc. Washington 10 (1887), S. 96—100; *O. Hölder,* in der Encyklopädie d. math. W. I, 1, S. 501. Die hier § 38, 10 geg. Darst. im wesentl. bei *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. 279; *Chasles,* Sect. con. Nr. 37; *Cremona*, Elem. der proj. Geom., deutsch v. Trautwetter (1882), S. 302; *F. Amodeo,* Lez. Geom. proiettiva, Napoli 1905, S. 440.

112. Pascalsches Sechseck und proj. Erzeugung. Die Beziehung § 38, 11 von *Steiner,* Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 299 und Fig. 32; *Schröter,* Kegelschn. S. 99f; 127.

113. Die allgemeine lineare Transformation der einzelnen quadrat. Form. I. Der *Name* „Form" § 39, 1; § 41, 1 von *Gauß* (1801), Werke 1, S. 120.

II. Die *Identitäten* § 39, (4); § 41, (4); § 138, (4) von *Euler,* Mechanica (1736) 2, § 106; § 497; Calcul. diff. § 225 nach Baltzer, Det. S. 149.

III. Die *allg. Transformationsformeln* für zwei Veränderliche § 39, (10) bei *Gauß,* Werke 1, S. 124; die umgekehrten Formeln § 41, (25) (in Verbindung mit der orthog. Transf.) bei *Gauß* (1818), Werke 3, S. 339; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 48 f.; für n Veränderl. ebenso bei *Hesse* (1840), Werke S. 24; 26.

IV. Die *Aufgabe der Transf.* besteht in erster Linie darin, die *neuen* Koeffizienten und die aus ihnen gebildeten *Determinanten* und *Unterdet.* durch die *alten* § 39, (10); § 41, (20); § 138, (23), sowie umgekehrt die *alten* Koeff. und die aus ihnen geb. Det. u. Unterdet. sämtlich durch die *neuen* darzustellen § 39, (15); § 41, (25); § 138, (32). Dieselbe doppelte Aufgabe ist sodann auch für die *einfach geänderte* Det. § 43, (10); (23); § 140, (14); (26); (40) und die *zweifach ger.* Det. § 43, (15); § 140, (14); (45) vollst. erledigt. Hierbei ist Gewicht darauf gelegt, überall nicht nur die für die *Gleichung* $f = 0$ in Betracht kommenden *Verhältnisse* der Koeff. u. Variabeln, sondern die für die *Form* f erforderlichen *Größen selbst* zu berücksichtigen. Diesem Zweck dient die genaue Beibehaltung der Faktoren S, S^2 in § 41, (24); § 43, (16); § 138, (28); (29); (31); § 140, (32); (39) und σ in § 138, (26); (27); § 140, (18); (18').

114. Transformation einer einzelnen quadrat. Form auf Quadrate. I. Die *Quadratdarstellung der quadrat. Form überhaupt* für $n = 2$ in § 40, (4) und für $n = 3$ in § 46, (14) bei *Lagrange,* Misc. Taur. 1 (1759), S. 18; Mécanique anal. (1788) 1, III nach Baltzer, Det. S. 160; dann bei *Gauß* (1801), Werke 1, S. 306; (1818), Werke 3, S. 339; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 48; für beliebiges n

§ 149, (21) bei *Hesse* (1840), Werke S. 24. Die Mannigfaltigkeit dieser Transf. faßt durch Einführung willkürlicher Parameter zusammen *Darboux,* J. de math. (2) 19 (1874), S. 347; *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 91 (1881), S. 221, und in *Hesse,* Raum S. 449; vgl. *Fr. Meyer,* Encyklopädie I B 2, 3, S. 327.

II. Der geom. Gesichtspunkt, daß es sich bei jeder solchen Transf. um die Einführung eines *Polarzweiecks, -dreiecks oder -tetraeders* handelt § 40, 1; § 46, 6; 9; § 149, 6; 7; 10, erscheint bei *Plücker,* System (1835), S. 100; 107; System (1846), S. 88 mit dem Gebrauch der *allg. homog.* Koordinaten.

III. Da es unendl. viele Transf. einer quadr. Form auf Quadrate gibt, so tritt die einer tunlichst weitgehenden Erhaltung der alten Koord. entsprechende „*Stufentransformation*" § 40, (15); § 47, (13); § 150, (17) in den Vordergrund, die für beliebiges n von *Jacobi* (Nachlaß) Werke 3, S. 590; *Plücker,* J. f. Math. 24 (1842), S. 287 = Abhandl. S. 399 behandelt ist. Sie führt auch zu den Quadratdarstellungen § 47, (32); § 150, (62); (46) der Schnittpunktpaare und Schnittkurven.

115. **Begriff und Erhaltung der Spezies.** I. Die *Spezies* einer quadr. Form, bzgl. Kurve oder Fläche 2. O., mit reellen Koeff. bezeichnet die *Anzahl gleicher Vorzeichen* in der Quadratdarstellung § 40, 4; § 49, 2; § 152, 4, s. Baltzer, Leipz. Ber. 1873, S. 530; Determ. (1875), S. 162.

II. Ihre Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems, auf das sich die Quadratdarst. bezieht, heißt das *Trägheitsgesetz der quadr. Formen.* Es ist bei *Plücker,* System (1835), S. 101 und System (1846), S. 75; 89 bereits vorgebildet und allgemein von *Sylvester,* Phil. Mag. (4) 4 (1852), S. 140, Lond. Phil. Trans. 143 (1853), S. 481 aufgestellt, findet sich auch bei *Jacobi* (Nachlaß v. 1847) Werke 3, S. 593; vgl. *Ch. Hermite,* J. f. Math. 53 (1857), S. 271; *Borchardt,* ebd. S. 281; *F. Brioschi,* Nouv. Ann. 15 (1856), S. 264; s. *Fr. Meyer* in der Encyklopädie I B 2, 2, S. 328.

III. Die Bedingungen der Spezies knüpfen sich für die Kurve und Fläche 2. O., ebenso wie die des Ranges (s. Anm. 76, V; VI), entweder an die *einzelnen* Hauptunterdeterminanten („aufgelöste Form"), § 49, (18); § 152, (36), oder an die Summen der Hauptunterdet. („geschlossene Form") § 50, (38); § 155, (41) an. Ebenso erscheinen sie für die *Schnitte* der Kurve 2. O. mit einer Geraden und der Fläche 2. O. mit einer Ebene oder Geraden in *geränderten* Determinanten entweder in der aufgelösten Form § 49, (20); § 153, 5; 6; § 154, 2 oder in der geschlossenen Form § 51, (35); § 156, (38); § 157, (21).

116. **Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution.** I. Der *Begriff* der orthogonalen Substitution § 40, 7; § 50, 1; § 155, 1 entwickelt sich bei *Euler,* Nov. Comm. Petrop. 15 (1770), S. 75; 20 (1775), S. 217; vgl. *Jacobi,* Werke 3, S. 601; *Baltzer,* Det. S. 172; vgl. *Cayley,* J. f. Math. 32 (1846), S. 119.

II. Die *orthog.* Transf. *einer* quadr. Form § 40, 7; § 50, 2; § 155, 2 wird als Spezialfall der *gleichzeitigen* Transf. *zweier* quadrat. Formen f und g erkannt und ausgebildet von *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 140; *Jacobi,* J. f. Math. 12, S. 7 = Werke 3, S. 199; *Hesse,* Ebene, S. 123; Raum, S. 259. Der Spezialfall ist dadurch ausgezeichnet, daß die *eine* Form g § 40, (19); § 50, (3); § 155, (3) *definit* ist, *Weierstrass,* Berl. Ber. 1858, S. 213; *Kronecker,* Berl. Ber. 1868, S. 339.

III. Der *geom.* Gesichtspunkt, der in § 40, § 50, § 155 in den Vordergrund gestellt ist, daß es sich nämlich um ein *gemeinsames Polzweieck, -dreieck* oder *-tetraeder* handelt, wird von *Plücker,* System (1835), S. 121 erkannt.

117. Die kovarianten Funktionen. Die Funktion F in § 41, (21) führt *Gauß*, (1801), Werke 1, S. 301 als „adjungierte" von f ein, mit der Bemerkung, daß die adjungierte von F wieder f ist, was § 18, 8; § 78, 8 benutzt wird. Die mit f gleichzeitige Transformation von F § 41, (23) zieht *Jacobi* (1831), Werke 3, S. 101 in Betracht. Die allgemeine Auffassung der Formen § 188, (24); (25) als *Kontravarianten* und *Zwischenformen* vgl. *Fr. Meyer*, Encyklopädie I B 2, S. 324.

118. Übergang der geränderten Determinanten in vollständige Quadrate. I. Der Übergang der Kovariante F oder der einfach geränderten Determinanten A^u in ein vollst. Quadrat für den Fall § 42, (14) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 16; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 180, für den Fall § 139, (14) bei *Hesse*, Raum, S. 164; *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 151. Der allg. Satz für belieb. n bei *G. Salmon* (1859) nach Baltzer, Det. S. 42; von *Hesse* (1868), Werke S. 559.

Die Kovariante φ oder die nach Linienkoord. entwickelte zweif. ger. Det. $A^{uu'}$ als vollst. Quadrat § 139, (22) bei *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 152.

Daß die Form f selbst ein vollst. Quadrat werden kann § 42, (20); § 139, (28), bemerkt *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 132; System (1846), S. 78.

II. Derselbe Übergang erstreckt sich in der Ebene auf die *zweif.* geränderte *Determinante* § 44, (36), sowie die *einf.* gerānd. *Unter*determinanten § 45, (16); im Raume auf die nach Ebenen- und Linienkoord. entwickelte zwei-, bezügl. dreifach geränderte Det. § 141, (41); (49), *Hesse*, Raum S. 179 f., und die nach Ebenenkoord. entw. dreif. ger. Det. § 142, (35), aber auch auf die einf. ger. Unterdet. § 143, (14); (18) und zweif. ger. Unterdet. § 146, (17). Er beruht überall auf dem *Zerfall der Koeffizienten* in zwei Faktoren.

119. Geränderte Determinanten. I. Die *geränderten Determ.* sind von *Hesse*, Werke S. 283 (1850); S. 323 (1852); S. 362 (1853); S. 471 (1857) eingeführt nach Clebsch-Lindemann, Ebene, 1, S. 144 Anm.; vgl. *Hesse*, Raum S. 138; 179; *Clebsch*, J. f. Math. 59 (1861), S. 56; *Salmon*, Higher Algebra (1876), S. 16.

II. Die *Entwicklung* der *einfach* ger. Det. § 43, (7) und § 140, (7) nach *Hesse*, Sieb. Vorl., S. 15; Raum, S. 138; die doppelte der *zweifach* ger. § 43, (17) und (19); § 140, (16); (17); (19) und (22); die dreifache der *dreif.* ger. § 140, (33); (36); (37); (42) nach *Hesse*, Raum S. 179; *Salmon*, Higher Alg. S. 16.

III. Die *Invarianteneigenschaft* folgt *erstens* mittels des Multiplik.theorems § 43, 2; 3; § 140, 3; 5; 10 nach *Hesse* (1853), Werke S. 330; *zweitens* aus der Inv.eigensch. der kovar. Formen § 43, 4 letzter Abs.; § 140, 6 vorletzt., 11 letzt. Abs.

IV. Die Bez. zwischen den dualen zweif. ger. Det. φ und Φ § 154, (16) nach *Salmon-Fiedler*, Raum S. 104; vgl. *Schröter*, Oberfl. S. 142 f.; *Sturm*, Flächen 3. Ordn. (1867), S. 252.

120. Übergang von zwei auf eine, von drei auf zwei und eine Dimension. Um die Eigenschaften des Schnittpunktpaares einer Geraden mit der Kurve oder Fläche 2. O. oder der Schnittkurve einer Ebene mit der Fläche 2. O. zu gewinnen, ist es wesentlich, die einfachen Determinanten und Unterdeterminanten der *Schnittgebilde* durch die geränderten Det. u. Unterd. der *gegebenen Kurve und Fläche* auszudrücken u. umgekehrt, wie es § 44, (14)—(16); § 142, (14)—(16) und § 141, (17)—(19) geschieht. Die Formeln § 44, (14) und § 141, (17), (vgl. *H. M. Taylor*, Proc. L. M. Soc. 11 (1880), S. 141) leitet *Clebsch-Lindemann*, Ebene (1876), S. 277; Raum, S. 138, Anm. mittels der *symbolischen Methoden der Invariantentheorie* ($(\frac{1}{6}\, a\, b\, c\, u)^2 = (\alpha\beta\gamma)$) ab, während sie hier mit den

übrigen sämtlich als spezielle Fälle der allg. Transformationsformeln (Anm. 113) sofort hervorgehen. Das allg. Prinzip der symbol. Methoden, die von Theorie der Schnittgebilde ausgeht s. bei *Fr. Meyer,* Encyklopädie I B 2 S. 363.

121. **Zerfall der Koeffizienten in zwei Faktoren.** I. *Die Methode der „übergreifenden Proportionen"*. Der Schluß in § 90, von (3) auf (4); in § 44, von (26) auf (28) rührt her von *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 17 = Werke 3, S. 210. Er wiederholt sich in § 50, von (28) auf (29); in § 110, von (2) auf (3) nach *Hesse,* Raum, S. 399; in § 141, von (32) auf (34); § 142, von (29) auf (31).

II. *Methode der Transformationsformeln*. Dasselbe Resultat geben jedoch auch die allg. Transformationsformeln der quadr. Formen in der Ebene für die Unterdeterminanten A_{kl}, a_{k}; § 42, (13); (19); für die einf. geränderten A^{u}_{kl} § 44, (31); (32) und im Raume für die Unterdeterminanten A_{kl}, α_{kl}, a_{kl} § 139, (13); (21); (27), für die einf. geränderten A^{u}_{kl}, α^{u}_{kl} § 141, (38); (48), für die zweif. ger. A^{uw}_{kl} § 142, (31); (34).

122. **Geometrische Bedeutung der geränderten Determinanten.** Die Bed. der ein- und zweifach geränd. Det. in der Ebene § 45, (2); (17), sowie der ein-, zwei- und dreifach geränd. Det. im Raume § 143, (2); § 144, (3); § 148, (10) bei *G. Salmon,* Lessons higher Algebra (1876), S. 17; § 45, (2) auch bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 15 f.; § 148, (2); (5) bei *Hesse,* Raum S. 179; § 148, (13) bei *Hesse,* ebd. S. 129; 471. Die *vollst. Durchführung* für die *Kurve 2. O.* s. § 45, (2); (9); (15); (16); u. das Schnittpunktpaar § 45, (18); (20); für die *Fläche 2. O.* § 143, (2); (8); (11); (14); (17); (18); auch § 144, (3); (18); § 146, (5); (17); das Schnittpunktpaar § 148, (13); (14), die Schnittkurve § 148, (3); (5); (8); (9); (11); (12).

123. **Polardreieck und Polartetraeder.** I. Der *Begriff* § 46, 7 und die *Konstruktion* § 46, 8 des *Polardreiecks* bei *Brianchon,* Lignes du sec. ordre (1817), S. 22; *Poncelet,* Traité (1822), S. 103, art. 192; *Steiner* (1832), Werke 1, S. 351. Der *Name* „Polardreieck" § 46, 10 bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 132; „Polardreiseit" § 46, 7 bei *Schröter,* Kegelschn. S. 147.

II. Das *Polardreikant* des Kegels § 149, 7 bei *Chasles,* Cônes (1830), S. 5; *Plücker,* System (1846), S. 94; drei konj. Durchmesser als Polardreikant des Asymptotenkegels § 84, 3 bei *v. Staudt,* Halbm. S. 39.

III. Das *Polartetraeder* § 149, 8 bei *Poncelet,* Traité (1822), S. 395, art. 615; der Name „Poltetraeder" bei *Plücker,* System (1846), S. 88.

124. **Sätze über zwei Polardreiecke und Polartetraeder.** I. Die Sätze § 48, 2, I ohne Beweis bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 448, Aufg. 46; der Beweis § 48, 1; 2 von *Hesse* (1840), Werke S. 31; 34; der Satz § 48, 3, II bei *Hesse* (1852) Werke S. 303. Der Satz § 48, 4, III von *Brianchon-Poncelet,* Ann. de math. 11 (1820/1), S. 205 nach Salmon-Fiedler, Kegelschn. S. XXXII, 39).

II. Die entsprechenden Sätze im Raume § 151, 2 mit dem Beweis § 151, 1; 2 gibt *Hesse* (1840) Werke S. 36; 39; Vorl. Raum S. 197; vgl. *v. Staudt,* Beitr. (1860), S. 373. Der Spezialfall über zwei Polartetr. mit einer gemeins. Ecke § 151, 4 bei *Hesse,* Raum S. 204; der Satz über zwei Tripel konjugierter Durchmesser § 151, 6 von *A. Goepel,* Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 205; vgl. *Hesse* (1838) Werke S. 8; *Chasles,* J. de math. (1) 2 (1837), S. 400. Der Satz über zwei Tripel rechtwinkl. Achsensysteme § 151, 7 bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 452; *A. R. Luchterhandt,* Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 101; 103; vgl. *Fr. Meyer,* Jahrb. d. d. Math.-Ver. 18 (1909), S. 107.

125. **Polarreziproke Dreiecke und Tetraeder.** Den Satz § 48, 5 über polarrezipr. Dreiecke gibt *Plücker,* J. f. Math. 5 (1830), S. 11 = Abhandl. S. 134; den entsprechenden für polarreziproke Trieder beim Kegel 2. O. *Chasles,* Ann. de math. 19 (1828/9), S. 74; vgl. *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 135; *Schröter,* Oberfl. S. 40. Fr. Meyer, Jahrb. d. Fortschr. 16 (1884), S. 548.

Der entsprechende Satz über polarrezipr. Tetraeder § 151, 8 von *Chasles,* Ann. de math. 19 (1828/9), S. 65; Aperçu (1837), Note XXXII, S. 402; *Hesse* (1844), Werke S. 642; vgl. *Cayley,* Quart. J. 1 (1857), S. 7; *Ferrers,* ebd. S. 191; *Salmon,* ebd. S. 237; *Brioschi,* ebd. S. 368; *Weddle,* Cambr. Dub. J. 6 (1851), S. 123; weitere Literatur bei *F. Schur,* Math. Ann. 19 (1882), S. 429; *Schoenflies,* Encyklopaedie III A B 5, S. 429; der Spezialfall § 151, 8, II von *Bobillier* nach Kötter, Ber. S. 198.

126. **Begriff und Gleichung des Büschels.** Die Gleichung $f - \lambda g = 0$ des *Kegelschnittbüschels* § 48, (16), der die des *Büschels von Punktepaaren* § 8, (53) nachgebildet ist, wurde von *G. Lamé,* Exam. (1818), S. 32 gebildet; ebenso die des *Flächenbüschels,* ebd. S. 28; 35.

127. **Der Hessesche Satz.** Der Satz § 48, 7, IV in dualer Form bei *Hesse* (1840), Werke S. 41; mit dem Spezialfall § 8, 20, IV bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 31; 32; auch bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 136; 205; die Formel § 48, (19) findet auch bei *Magnus,* Aufg. 1 (1833), S. 147 Verwendung.

128. **Geometrische Bedeutung der Spezies.** Die Sätze § 49, 5 und § 152, 8 (§ 72, 11) über die Lage der Polardreiecke und Polartetraeder gegen Kurve und Fläche 2. O., welche die Spezies geometrisch deuten, nach *Plücker,* System (1835), S. 100; (1846), S. 89; *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. 111; *Schröter,* Kegelschn., S. 148; Oberfl., S. 166.

129. **Klassifikation der Schnittpunktpaare von Kurve oder Fläche 2. O. und Gerader.** I. Die Tabelle § 49, (22), nach *Gundelfinger,* Vorl. Kegelschnitte, S. 46—51; *Dingeldey,* Encykl. S. 23, vertritt *zwei* Tabellen, insofern ihre Kolonnen- und Zeilenüberschriften nach § 51, 15 auch in den *Summen* der Hauptunterdeterminanten dargestellt werden können (s. Anm. 76, VI). Sie enthält in der letzteren Form die Tabelle § 51, (38) und in teilweise modifizierter Form die Tabelle § 26, (19) in sich, s. Anm. 132.

II. Im Raume entspricht ihr eine Tabelle, die nach § 154, 3 hergestellt werden kann.

130. **Elementarteiler der Büscheldeterminante.** Die Theorie der Elementarteiler der Determinante $\Delta(\lambda) = | a_{kl} - \lambda b_{kl} |$ § 50, (16); § 155, (16) ist für beliebiges n von *K. Weierstraß,* Berl. Ber. 1857, S. 213; 1868, S. 316 begründet. Sie dient unter anderen dazu, die *Möglichkeiten der Lage zweier Kurven* oder *Flächen 2. O.* erschöpfend zu bestimmen. Es gibt fünf Lagen zweier Kurven und 13 zweier Flächen 2. O. gegeneinander, die sich einerseits nach der Multiplizität l_i der Wurzel λ_i § 50, 9; § 155, 9 und andererseits nach den Werten der Elementarteilerexponenten $e_i = l_i - l_i'$, $e_i' = l_i' - l_i''$, ... § 50, (27); § 155, (27) unterscheiden. In *zwei,* bezüglich *vier* dieser Lagen sind die Exponenten $e_i, e_i', \ldots$ *alle* 1, § 50, 10; § 155, 10, und *nur* dann gibt es ein oder mehr *gemeinsame Polardreiecke,* bezügl. *-tetraeder* und ist eine *gleichzeitige* Quadratdarstellung möglich § 50, (8); (34); § 155, (8); (35). Diese zwei, bezügl. vier Lagen sind die *einzig* möglichen, wenn, wie § 50, (3); § 155, (3), die eine Kurve oder Fläche $g = 0$ eine

imaginäre eigentl. ist. In diesem Sinne enthalten die § 50 und § 155 einen *Ausschnitt* aus der allg. Theorie des Büschels. Dasselbe ist auch der Grund, warum der unendl. ferne Kegelschnitt der Fläche 2. O. (außer der identischen) nur zwei Lagen gegen den imaginären Kugelkreis haben kann § 100, 2, statt, wie im allg., fünf.

131. **Regel des Descartes.** Über die *Regel* § 89, 9 *des Descartes* (1649) s. *J. A. Serret,* Höh. Algebra, deutsch v. G. Wertheim, 1 (2. Aufl. 1878), S. 215; *C. Runge,* Encyklopaedie I, 1, S. 410. Ihre *Anwendung* auf die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ in § 89, 9 gab zuerst *Petit,* Corr. polyt. 2 (1812), S. 325; 327; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 92.

132. **Invarianten der orthogonalen Substitution.** Die Invarianten A, A' § 40, 13 der orthogon. Transf. des Punktepaares sind im wesentl. dieselben wie A_{33}, A'_{33} in § 21, (19); § 22, (16); ebenso die Invarianten A, A', A'' der orthogon. Transf. der Kurve 2. O. § 50, (42) dieselben wie $A_{44}, A'_{44}, A''_{44}$ in § 89, (7); § 91, (17). Sie sind im letzteren Sinne von *Cauchy,* Applic. 1 (1826), S. 244; *Plücker,* J. f. Math. 24 (1842), S. 283 = Abhandl. S. 390 erkannt. Die Invarianten A, A', A'', A''' in § 155, (46) und die entsprechenden für beliebig viele Koordinaten bei *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 142; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 14 = Werke 3, S. 208; s. *W. F. Meyer* in der Encyklopaedie I B. 2 S. 329.

133. **Die geränderten Gleichungen des Hauptachsenproblems.** I. Die *quadrat. Gleichungen des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte* der Fläche 2. O. § 108, (27) ist in entwickelter Form gegeben von *Cauchy,* Applic. (1826), S. 269; in Determinantenform von *Hesse,* Raum (1. Aufl. 1861), S. 331; (3. Aufl.), S. 398; Werke S. 498. *Hesse,* Werke S. 498 tritt auch formal die zweite Bedeutung derselben Gleichung § 51, (18) für das Problem der orthogonalen Transf. des Schnittpunktpaares einer Kurve 2. O. mit einer Geraden hervor. Die Darstellungen § 51, 12 und § 110, 5 ergänzen sich daher wechselseitig (eine dritte Bedeutung der Gl. s. § 103, (14)).

II. Der indirekte Beweis für die Realität der Wurzeln § 51, 6 nach *Hesse,* Raum, S. 399; der direkte § 109, 5 schließt sich an die Darstellung der Diskriminante als Summe von Quadraten an, *Hesse* ebd. S. 406; s. Anm. 150, IV.

134. **Berührungs-Dreiecke und Tetraeder.** I. Unter den *ausgezeichneten Koord.dreiecken* eines Kegelschnittes ist, neben dem Polardreieck mit der Darstellung in drei Quadraten § 46, (14), das *Berührungsdreieck* mit der Darstellung durch *ein Quadrat* und *ein Produkt* § 52, (3) hervorzuheben. Es ist bei der Parabel § 13, (37) und Hyperbel § 13, (27) schon in gemeinen Koordinaten gebräuchlich, in Dreieckskoord. eingeführt bei *Moebius* (1827) Werke 1, S. 85; *Plücker,* System (1835), S. 84; 86; 88; 89; 90.

II. Beim Kegel entspricht ihm das *Berührungsdreikant* § 74, 1.

III. Unter den ausgez. Tetraedern der Fl. 2. O. sind, neben dem Polartetraeder mit der Darstellung durch 4 Quadrate § 149, (21), das *Polarberührungstetraeder* mit der Darst. durch *2 Quadrate* und *1 Produkt* § 158, (5) und das *Schmiegungstetraeder* mit der Darst. durch *2 Produkte* § 159, (4) wichtig. Jenes ist bei beiden Paraboloiden § 56, (16); (16′), dieses beim hyperbol. Paraboloid § 62, (7) gebräuchlich. Allgemein wird das Schmiegungstetraeder bei *Magnus,* 2 (1837), S. 292 betrachtet und als Koord.tetraeder eingeführt bei *Plücker,* (1842), Abhandl. S. 396; System (1846), S. 99; vgl. *Klein,* Geom., S. 29.

135. **Anwendung von Berührungs-Dreieck und Tetraeder.** I. Der Zusammenhang des Berührungsdreiecks mit der *projekt. Erzeugung* § 52, 4 (§ 38, 5) und *Parameterdarstellung* § 52, 5 bei *Salmon-Fiedler* Kegelschn. 4. Aufl. S. 387ff.; vgl. auch *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rat. Kurven, Tübingen 1883, S. 43.

II. Der Zusammenhang des Schmiegungstetraeders mit der projekt. Erzeugung § 159, 5 wird von *Plücker,* System (1846), S. 105 hervorgehoben; ähnlich verhält sich das Polarberühr.tetr. zu der Erzeugung durch reziproke Bündel § 158, 11.

136. **Doppelverhältnisse in Elementargebilden 2. O.** Begriff und Gleichheit der Doppelverhältnisse ϑ von vier Punkten und vier Tangenten eines Kegelschnittes § 52, 7 (für $\vartheta = -1$) bei *Steiner*, Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 347; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XV, XVI (S. 334; 341); das Doppelverh. von vier Erzeugenden § 159, 12, bei *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 4.

137. **Rotationsflächen.** I. Der *Begriff* der Rotationsfl. § 53, 1 für spezielle Fälle bei *Euklid* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 388; die allg. *Gleichung* $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ (§ 53, (3)) bei *Clairaut,* (1731) nach Cantor 3, S. 781; bei *Euler*, Introd. 2 (1748), Append. art. 37; 39; bei *Kästner* (1758) nach Cantor 4, S. 457.

II. Das *verl.* u. *abgepl.* Rotat.*ellipsoid* § 53, 3; 4 |(*σφαιροειδὲς παραμάκες* und *ἐπικλατύ*), *eine* Schale des *zweischal.* Rot.*hyperboloids* § 53, 3 (*κωνοειδὲς ὀρθογώνιον*) und Rot.*paraboloid* § 53, 5 (*κ. ἀμβλυγώνιον*) bei *Archimedes* (237 v. Chr.) Op. ed. Heib. 1, S. 280; 274, nach Cantor 1, S. 309; F. Müller, Zeittaf. S. 22; vgl. *J. Gow*, A short history of greek mathematics, Cambridge 1884. Das *einschal.* Rotat.*hyp.* § 53, 4 als solidum annularium bei *Kepler*, Nova stereometria doliorum, Linz 1615, und als Cylindroid bei *Wren*, Lond. Phil. Trans. 3 (1669), S. 961 nach Cantor 3, S. 401.

Die *Kugel* als Rotationsfl. bei *Euklid*, als Ort der Punkte gleichen Abstandes vom Mittelp. § 69, (1) bei *Theodosius von Tripolis* (55 v. Chr.) nach Tropfke, Gesch. 2, S. 259. Der *rechtwinklige* Rot.kegel (*ὀρθογώνιος κῶνος*) neben dem allg. Rot.kegel bei *Archimedes* nach Cantor 1, S. 244, seine Gleichung § 53, (16) bei *Klügel* 3 (1808), S. 314.

III. Die *Bedingungen*, daß die *allg. Gl.* der Fl. 2. O. eine Rotationsfl. darstelle, § 100, (6)—(8) sind auf verschied. Wegen entwickelt von *Bourdon*, Corr. polyt. 2 (1811), S. 196; 250; *Mondot,* ebd. S. 205; *Monge,* ebd. (1812), S. 313; *Lamé*, Exam. (1818), S. 43; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 257; aus der Gleichheit zweier Wurzeln der kub. Gl. $\Delta(\lambda) = 0$ in § 88, (17) von *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 10; 20. Dabei tritt, wie *Hesse*, Raum, S. 282 bemerkt, die Frage auf, inwiefern die *eine* Bedingung des Verschwindens der Diskriminante von $\Delta(\lambda)$ die *zwei* Bedingungen § 100, (6) der Rotat.fl. geben kann. Sie wird beantwortet mit der Darstellung der Diskriminante als Summe von Quadraten durch *E. Kummer*, J. f. Math. 26 (1843), S. 268, vgl. *Hesse*, Raum, S. 378, und völlig erledigt in der Theorie der Elementarteiler durch *Weierstraß*, Berl. Ber. 1858, S. 214. Hierauf stützt sich die elementare Darstellung § 89, 5, nach der für eine Doppelwurzel der Determinante $\Delta(\lambda)$ alle sechs Unterdet. $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden müssen, und diese sechs Bedingungen § 89, (23) für zwei unabhängige § 89, (35) zählen. Geometrisch findet diese Auffassung nach § 50, 6 ihren Ausdruck darin, daß die *Rotationsfl. den Kugelkreis doppelt berührt* § 100, 2 nach *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. 129.

138. Zylinder. I. Der Begriff des *Zylinders* beschränkt sich zuerst auf *Kreiszylinder*. Der *gerade* Kreiszylinder als *Rotationszylinder* § 53, 9 bei *Euklid*, Elem. nach Tropfke, Gesch. 2, S. 388. Der *schiefe* Kreisz. und seine Identität mit dem *elliptischen* Zylinder § 59, (19) bei *Euler*, Introd. 2, App., art. 52. Seine Auffassung als *Kegel* mit unendlich ferner Spitze § 96, 5; § 98, 10 bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 158; 261.

II. Die Zylinder *ohne* kreisförm. Basis, der *hyperbolische* § 58, (30) und *parabolische* § 53, (34) erscheinen als Arten der Fläche 2. O. bei *Euler*, Introd. 2, art. 125; 126.

139. Gleichungen des Punktepaares in Linien- und des Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten. Die Darstellung des *Punktepaares* § 13, (58) durch *eine* Gl. in *Linienkoord.* § 13, (57) nach *Plücker*, Entw. 2, S. 93; des *Kegelschnittes* durch *eine* Gl. in *Ebenenkoord.* § 53, (35) bei *Plücker*, System (1846), S. 195; 251; s. Anm. 69. Die Dualität zwischen Kegel und Kegelschnitt § 79, 3 bei *v. Staudt*, Beitr. S. 22.

140. Elliptische Kegel. Der „schiefe Kegel" (κῶνος σκαληνός) als Ort einer Geraden, die an einem Kreise gleitet und durch einen festen Punkt (κορυφή) geht, der nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises liegt, bei *Apollonius*, Con. I, Defin. I, 3 (Heiberg 1, S. 7); vgl. Cantor 1, S. 335; Tropfke, Gesch. 2, S. 389; 437. Daß dieser schiefe Kegel der *allgemeine elliptische Kegel* § 54, (1); § 93, (8) ist, ergab sich mit der Entdeckung der Kreisschnitte der letzteren § 59, 3 durch *Descartes*, vgl. Cantor 4, S. 601, war aber nach Cantor 4, S. 465 bei *Karsten* 1775 noch nicht bekannt. *Euler*, Introd. (1748) 2, App. art. 68 definiert den schiefen Kegel als einen solchen, bei dem die zur Achse senkr. Schnitte Ellipsen sind (§ 54, 3), die ihren Mittelpunkt auf der Achse haben, und erwähnt art. 74 seine Kreisschnitte.

Die *Gleichung* des Kegels ist durch ihre in x, y, z *homogene* Form § 80, (19) charakterisiert bei *Clairaut* (1729) nach Cantor 3, S. 781; *Euler*, Introd. 2, App. art. 35.

141. Die Fokallinien des Kegels. I. Die „*Fokallinien*" des Kegels § 54, (11); (15) sind entdeckt und benannt von *Magnus*, Ann. de math. 16 (1825/6), S. 33; Aufg. 2 (1837), S. 172. Beim Asymptotenkegel des Hyperboloides sind sie, § 55, 9, die Asymptoten der Fokalhyperbel, vgl. *H. Schröter*, Oberfl., S. 571. Sie hängen, wie auch die beiden Paare *imaginärer* Fokallinien § 118, (17) nur von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate ab, s. Anm. 2, I.

II. Die drei Paare von Fokallinien sind die Scheitellinien derjenigen Tangentialebenenpaare, die *Rotationszylinder-Ebenenpaare* § 119, (25) sind oder, was dasselbe ist, an denen die von dem Kegel bestimmte Involution harmonischer Polarebenen eine *rechtwinklige* ist, was *Chasles*, Cônes (1830), S. 13 erkannt hat; s. Anm. 2, II und Anm. 177.

III. Sie sind die drei *Strahlenpaare* in der *Schar konfokaler* Kegel § 118, (17), wie Anm. 2, IV.

IV. Sie sind die *Doppelstrahlen der Involutionen*, in denen zwei senkrechte harmon. Polarebenen § 119, 9 die Hauptebenen schneiden, wie Anm. 2, V.

142. Sphaerische Kegelschnitte. Die *sphaerische Ellipse* bei *N. v. Fuß*, De propr. quibusd. ellipseos in superf. sphaer. descriptae (1787) als Ort eines Punktes, für den die Summe der sphaer. Entf. von zwei festen Punkten konstant

ist (s. Anm. 8) nach Cantor 4, S. 542; 1088. Der Ausdruck „*sphaer. Kegelschn.*“ bei *Steiner* (1827) Werke 1, S. 117. Als Durchschnitt von *Kegel* und *Kugel* § 54, 6 bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 202; vgl. *Magnus*, Ann. de math. 16 (1825/6), S. 33; vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum S. 426.

143. Unterarten des elliptischen Kegels. Der elliptische Kegel § 54, (14), überall mit $a^2 > b^2$, wird für: I. $b^2 = c^2$ der *Kegel des Pappus, Pappi* Collect. (ed. Hultsch) 2, S. 581; er hat einen rechtwinkligen Hauptschnitt in der Hauptebene der *kleinsten* Öffnung § 54, 8 und außerdem „*zwei Ebenenbüschel rechtwinkliger Schnitte*“ § 116, 5, IV; vgl. über ihn *Th. Meyer,* Dissert. Straßburg 1884.

II. $a^2 = c^2$ der *Kegel des Hachette;* er hat einen rechtwinkligen Hauptschnitt in der Hauptebene der *größten* Öffnung § 54, 8; seine Erzeugung als Ort eines Punktes, der von einer Ebene und einer Geraden gleichen Abstand hat § 128, 9, letzter Satz, bei *Hachette,* Quetelet Corr. Brux. 4 (1828), S. 285; *Chasles,* Cônes (1830), S. 44. Der Ort derjenigen Bündelstrahlen, durch die nach § 119, (24) zwei rechtwinklige Tangentialebenen an den Kegel § 54, (14) gehen, nämlich der Kegel:

$$(b^2 - c^2)x^2 + (a^2 - c^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 0,$$

zerfällt für den Kegel des Hachette in das reelle Ebenenpaar ($a^2 > b^2$):

$$(b^2 - a^2)x^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 0;$$

es gibt also „*zwei Strahlbüschel rechtwinkliger Tangentialebenen*“; vgl. über ihn *Th. Meyer,* Dissert. Straßburg 1884.

Die beiden Kegel I und II sind im Sinne von § 71, 8 *reziprok.* Denn wenn mit $b^2 = c^2$ bei dem Kegel § 54, (14) der Hauptschnitt der kleinsten Öffnung rechtwinkl. ist, so ist es bei dem Kegel § 71, (22) der Hauptschn. der größten Öffnung $\left(\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2}\right)$. Mit $a^2 = b^2 = c^2$ verschmelzen die Kegel I und II in den *rechtw. Drehungskegel* § 53, (20). Die zwei Ebenenbüschel rechtwinkliger Schnitte fallen in *einen* durch die z-Achse und die zwei Strahlbüschel rechtwinkliger Tangentialebenen in *einen* in der xy-Ebene zusammen.

III. $a^2 - 2b^2 + c^2 = 0$ der Kegel mit *rechtwinkligen Fokallinien* § 54, (16);

IV. $\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ der Kegel mit *rechtw. Kreisschnittebenen* § 59, (24), beide ebenfalls *reziprok* nach § 71, 9, vgl. *Reye,* G. d. L. 1, S. 260.

V. $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$ der *orthogonale Kegel; Scheitelerzeugende* in der Hauptebene der kleinsten Öffnung *auf den Kreisschnittebenen senkrecht* § 64, 5;

VI. $b^2 - a^2 + c^2 = 0$ der *dual orthogonale Kegel* § 82, (55); Scheitelerzeugende in der Hauptebene der größten Öffnung, also auch die betreffenden *Scheiteltangentialebenen auf den Fokallinien senkrecht,* § 54, (18); *Schröter,* Oberfl. S. 71; bei *Plücker,* System (1846), S. 303; 305 heißt dieser Kegel *parabolisch,* weil die zu einer Fokallinie senkrechten Schnitte nach § 115, 9; § 74, 2 Parabeln sind; s. Anm. 165. Auch die beiden Kegel V und VI sind reziprok § 82, 16.

VII. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ der *gleichseitige Kegel;* und reziprok:

VIII. $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ der *dual gleichseitige Kegel* § 71, 10, s. Anm. 164.

144. Die Fokalkegelschnitte. I. Die *Fokalkegelschnitte* (Fokalkurven, Brennkurven) des Ellipsoides, Hyperboloides und Paraboloides § 55, (9); § 56, (7) wurden entdeckt von *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 280; sodann einschließlich des *imaginären* § 120, 9 von *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 326; *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (7) erhalten; *Chasles* nennt sie coniques excentriques ou focales. Die Analogie der Fokalkegelschn. mit den Brennpunkten tritt schon *formal* in ihren *Gleichungen* hervor:

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \text{Brennp: } \frac{y^2}{b^2-a^2}=0,\ x=1;\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}=1;\ y=0.$$

$$\text{Ellipsoid: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad \text{Fokalk.: } \frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1,\ x=0;$$

$$\frac{z^2}{c^2-b^2}+\frac{x^2}{a^2-b^2}=1,\ y=0;\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\ z=0,$$

welche wesentlich (Anm. 2, I) von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängen.

II. Nach dem Vorgange von *Apollonius,* Con. I, art. 52—53 (Heib. 1, S. 158ff.) bestimmte *Dupin,* Corr. polyt. 2 (1813), S. 424; Dével. (1813), S. 280 den einen der beiden Fokalkegelschn. als Ort der Spitzen der über dem andern errichteten Rotationskegel § 122, 8, III; § 125, 2; § 131, 3; 4; § 132, 2; § 135, 3; § 136, 2. Allgemeiner findet *Steiner,* J. f. Math. 1 (1826), S. 47 = Werke 1, S. 11; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 326 die Fokalkegelschn. als *Ort der Spitzen umbeschriebener Rotationskegel* § 122, 8, I; § 125, 2, wie sie schon bei *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 63 als Ort der Punkte mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten und ähnlich bei *Ampère,* Mém. Acad. Inst. de France 5 (1826), S. 99 sich ergeben. Die *Rotationskegel* als Kegel mit *zwei gleichen* Halbachsenquadraten entsprechen hier dem *Kreisstrahlenpaar* der Anm. 2, II, dem Linienpaar mit *zwei gleichen* Halbachsenquadraten.

III. Berührungskegel mit *drei gleichen* Halbachsenquadraten (Kugelkegel), welche die Fläche *längs einer Kurve berühren,* gibt es nach § 70, 5 bei den dreiachs. Flächen nicht. Dagegen sind die Fokalkegelschn. § 127, 11, III wiederum der *Ort der Spitzen solcher Kugelkegel,* welche die Fläche *in zwei Punkten berühren* nach *B. Amiot,* J. de math. (1) 8 (1843), S. 163; *Chasles,* Par. C. R. 16 (1843), S. 831; *Plücker,* System (1846), S. 276; s. Anm. 177.

IV. Als *Grenzflächen* (courbes limites) *im konfokalen System* § 120, 4; § 123, 3 erhielt *Dupin,* Dével. (1813), S. 277; 309 die Fokalkegelschn., und *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47) erkannte sie als Doppellinien (lignes de striction) § 120, 10 der umbeschriebenen Developpabeln; als die vier *Kegelschnitte der Schar* der Konfokalen erhalten sie ihre Gleichungen in Ebenenkoord. § 120, (21); § 123, (19) bei *Plücker,* System (1846), S. 255; 325; vgl. *v. Staudt,* Beitr. S. 383.

V. Als *Ordnungskurven* in dem Polarsystem, welches eine Ebene und ihr zugeordneter Normalstrahl in einer Hauptebene bestimmen § 120, 14; § 123, 12, betrachtet die Fokalkegelschn. *Chasles,* Aperçu, Note XXXI, art. (1); (18); *Plücker,* System (1846), S. 332 u. J. f. Math. 35 (1847), S. 103 = Abhandl. S. 459; *Reye,* G. d. L. 2, S. 227.

VI. Als Umhüllungskurven der Fokalachsen, s. Anm. 177.

145. Hauptschnitte. Die Hauptschnitte der Ellipsoide und Hyperboloide § 55, 7 und Paraboloide § 56, 7 dienen bei *Euler,* Introd. 2, App. art 117; 119;

122; 124; 125 zur ersten Beschreibung und Unterscheidung (auch Benennung) der einzelnen Flächen. Ihre verschiedene *Lage gegen die Fokalkegelschnitte* § 55, 7; § 56, 7, nach *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 327 ff., ist ebenso charakteristisch, wie die versch. Lage der Scheitelpunkte der Kegelschnitte gegen die Brennpunkte § 1, 5. Der Ausdruck *„Kehlellipse"* beim einsch. Hyperboloid § 55, 8 bei *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 173; „ellipse de gorge" bei *Amiot*, J. de math. (1) 8, (1843), S. 183.

146. **Darstellung durch Draht- und Gipsmodelle.** Durch Herstellung der Hauptschnitte § 55, Fig. 131—133; § 56, Fig. 134; 135 in *Draht* entstehen die von *H. Wiener* angefertigten Modelle, bei *A. W. Gay*, Darmstadt, 1903.

Gipsmodelle, entsprechend der Erzeugung § 55, 8 und § 56, 8 durch ebene Schnitte, sind von *R. Diesel* (1878) hergestellt, s. *Dyck*, Katalog, S. 258.

147. **Schraubenlinie und linearer Komplex.** Die *Schraubenlinie* § 57, 1; 2 bei *Pappus* IV, prop. 28 (ἡ περὶ κύλινδρον ἕλιξ) (Hultsch 1, S. 260; auch 3, S. 1125); bei *A. Parent* (1702) nach Cantor 3, S. 419; *Kästner* (1771) nach Cantor 4, S. 557 und *Frézier* (1738) nach Cantor 4, S. 621. Die Geraden des *Komplexes* als *Tangenten* von Schraubenlinien § 57, 13 bei *Plücker*, Neue Geom. (1868), S. 57; die Formel § 57, (22) ebd. S. 58; die Polarebene eines Punktes als *Schmiegungsebene* der durch ihn gehenden Schraubenlinien § 87, 8 bei *Plücker*, ebd. S. 59; in anderer Auffassung bei *F. Klein*, Vorl. Geom. 1, S. 135, im Keime schon bei *Moebius*, (1833), Werke 1, S. 506. Die Drehbarkeit und Verschiebbarkeit § 57, 13 bei *Plücker*, a. a. O. S. 38; vgl. *Lie-Scheffers*, Berührungstransf., S. 268.

148. **Tangente und Schmiegungsebene einer Raumkurve.** Ist eine Raumkurve in der Parameterdarstellung:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

gegeben und wird die Differentiation nach dem Parameter t durch Akzente bezeichnet, so ist in laufenden Koordinaten X, Y, Z die *Tangente* und die *Schmiegungsebene* der Kurve im Punkte x, y, z durch die Gleichungen dargestellt:

$$X - x : Y - y : Z - z = x' : y' : z'$$

und bezüglich:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

H. v. Mangoldt, Encyklopaedie III D 1, 2; 29.

149. **Begriff, Name, Parameter und kanonische Gleichung des Komplexes.** Begriff und Name des *linearen Komplexes* § 86, 1 von *Plücker* (1865), Abhandl. S. 464; 478; N. Geom. (1868), S. 26; *„Strahlengewinde"* § 86, 1 nach *Sturm*, Liniengeom. 1 (1892), S. 62. Begriff und doppelte Bedeutung des *Parameters* § 57, (20) bei *Plücker*, N. Geom. S. 38. Die kanonische Gleichung § 57, (19); § 87, (19) bei *Plücker*, ebd. S. 37; 57; die allgemeinere § 87, (17) ebd. S. 56: in der Form § 87, (25) schon bei *Moebius* (1833), Werke 1, S. 502.

150. **Kreisschnitte.** I. *Die Kreisschnitte des Kegels 2. O.* waren bei *Apollonius*, Con. lib. I, art. 5 (Heib. 1, S. 21) bekannt nach *Baltzer*, Geom. S. 521, später auch bei *Greg. a St. Vincentio* (1647) nach *Bopp*, Greg. S. 106. Die beiden Systeme der Kreisschnitte § 59, 3 entdeckte *R. Descartes* (1648) nach *Chasles*, Cônes S. 2; sie werden angegeben von *De l'Hospital* und *Jacquier* (1755) nach *Cantor* 4, S. 601;

A. F. Frézier (1738) mit Benutzung von *J.* und *H. Bernoulli* nach *Cantor* 4, S. 621; vgl. *Klügel* 3 (1808), S. 3. *Euler,* Introd. 2, App. art. 74.

II. *Beim dreiachsigen Ellipsoid* § 58, 3 entdeckte sie *D'Alembert,* Opusc. mathém. 7 (1780), S. 163 nach Kötter, S. 72, bei *allen Mittelpunktsflächen Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 161 ff., wo sich die Gleichungen der Hauptkreisschnittebenen § 58, (21); § 59, (21); § 60, (21) finden; für die Paraboloide § 61, 3 werden sie ohne Beweis behauptet, S. 161. Die Ausnahme des hyperbol. Paraboloids, wo die geradlinigen Schnitte § 62, 3 dafür eintreten, bemerkte *Klügel* 3 (1808), S. 328 und *Hachette,* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433; ferner betonte sie *Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), S. 50 = Werke 1, S. 13; 14. Besondere Methoden zur Bestimmung der Kreisschnitte geben *Dupin,* Dév. (1813), S. 168; *Plücker*, J. f. Math. 19 (1839), S. 8 = Abhandl. 1, S. 346.

III. Die *allgemeine Auffassung* der Kreisschnittebenen aus der Beziehung zum imaginären Kugelkreis § 100, 2 gibt *Poncelet*, Traité (1822), art. 621; *v. Staudt,* Beitr. (1867), S. 129.

IV. Das *allgemeine analytische* Problem der Kreisschnitte knüpft sich an die Bedingung der Gleichheit der beiden Wurzeln der quadr. Gl. § 109, (11) und führt auf ein von *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 129 bemerktes *Paradoxon.* Die Bedingung ist nämlich scheinbar nur *eine*, das Verschwinden der Diskrim. § 109, (16), zählt aber in Wirklichkeit für *zwei* § 117, 5. *B. Amiot,* J. de math. (1) 12 (1847), S. 130 erklärte das Paradoxon durch *Zerlegung* der Diskrim. in drei *Quadrate*, von denen zwei unabh. waren. *O. Hesse*, Raum S. 403 verlangte daher überhaupt die Zerlegung der Diskrim. in Quadrate und gelangte dazu auf Umwegen J. f. Math. 60 (1862), S. 505 = Werke, S. 497; andere Zerlegungen gaben *O. Henrici,* J. f. Math. 64 (1865), S. 191; *C. Souillart,* J. f. Math. 65 (1866), S. 325; 87 (1879), S. 220; *G. Bauer,* J. f. Math. 71 (1870), S. 46; *C. F. Geiser,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), S. 113; *E. Souvander,* J. f. Math. 85 (1878), S. 339.

V. Der Zusammenhang aller analyt. Methoden und der Ponceletschen Auffassung § 117, 14 knüpft sich an die von *O. Staude,* Arch. Math. Phys. (3) 7, S. 187 angegeb. Quadratdarst. § 109, (21) und die zugeh. Beding. § 117, (12), sowie die Beziehungen zum Hauptachsenproblem § 117, 8, 9, die teilweise von *C. Souillart,* J. f. Math. 65 (1866), S. 326, vollst. von *O. Staude,* a. a. O. S. 192 gegeben werden. Hiernach wird die *einheitliche* Darstellung § 117, 13 möglich, die auch die *geradl.* Schnitte wieder unter die *Kreisschnitte* einreiht.

VI. *Die vollständige Aufklärung des Dupinschen Paradoxons* liegt tiefer. Die Gleichung § 109, (1) ist nach § 45, (2) die Gleichung des Kegelschnittbüschels § 117, (46):

$$(1) \qquad (a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + \cdots + 2\,a_{12}\,xy = 0$$

in Linienkoordinaten u, v, w in der unendlich fernen Ebene. Als quadr. Gl. in λ § 109, (11) bestimmt sie daher diejenigen Kegelschnitte des Büschels (1), welche die Gerade u, v, w berühren. Durch Nullsetzen der Diskriminante § 109, (16) erhält man in:

$$(2) \qquad (A'^{u}_{44})^2 + 4\,(u^2 + v^2 + w^2)\,A^{u}_{44} = 0$$

die Gleichung der vier Grundpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ *des Büschels* (1) *in Linienkoordinaten.* Ihr genügen *alle Geraden der vier Strahlbüschel, welche die Schnittpunkte* $S_1 S_2 S_3 S_4$ *der unendl. fernen Kurve der Fläche mit dem imag. Kugelkreis als Scheitel haben.* Beispielsweise für das Ellipsoid § 115, (1) lautet die Gleichung (2)

nach § 115, (7); (4):

$$\left\{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)u^2+\cdots+\cdots\right\}^2-4(u^2+\cdots+\cdots)\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\cdots+\cdots\right)=0$$

und zerfällt nach § 118, (18) in die Gleichungen von vier Punkten:

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,u\pm i\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,v\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,w=0.$$

Die Gegenseitenpaare des vollst. Vierecks dieser Punkte sind nach § 118, (17) die Geraden:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2=0,\cdots,\cdots,$$

welche die Stellung der Kreisschnittebenen § 117, (17) bestimmen.

Da nun die Gleichung (2) die Bedingung der Gleichheit der Wurzeln λ_1, λ_2 der quadrat. Gl. des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte § 109, (11) darstellt, so scheint es, als müßten alle Ebenen, die durch eine Gerade der vier Strahlbüschel (2) hindurchgehen, Kreisschnittebenen sein (*Salmon-Fiedler,* Raum S. 373), während es doch nach § 117, 14 nur die sind, die durch die 6 Verbindungslinien der Scheitel der vier Strahlbüschel (2) gehen. Daß die übrigen Geraden der Büschel *ausfallen,* hat seinen Grund darin, daß für sie die Hauptachsentransformation § 110, (11) überhaupt nicht möglich ist. Das Hauptachsenproblem des Kegelschnittes, in dem die Ebene u, v, w, s die Fläche schneidet, besteht nämlich nach § 21, 2, II in der Auffindung eines Polzweiecks, welches das unendl. f. Punktepaar U_1, U_2 des Kegelschnitts und das imag. Kreispunktpaar K_1, K_2 der Ebene gemein haben. Ein solches gemeins. Polzweieck ist aber nur vorhanden, wenn entweder U_1, U_2, K_1, K_2 vier getrennte Punkte sind, also die unendl. f. Gerade u, v, w durch *keinen* der Grundpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ des Büschels (1) geht; oder $U_1 = K_1$, $U_2 = K_2$, also die Gerade u, v, w durch *zwei* dieser Grundpunkte geht; ist aber *nicht* vorhanden, wenn $U_1 = K_1$ und $U_2 \neq K_2$, also die Gerade u, v, w durch *einen* dieser Grundpunkte geht. Diese drei Möglichkeiten entsprechen aber nach der Theorie der Elementarteiler gerade den drei Fällen, daß die quadrat. Gl. § 108, (27) erstens zwei verschiedene Wurzeln $\lambda_1 \neq \lambda_2$, zweitens eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ hat, für die alle Unterdet. § 109, (24) verschwinden, drittens eine Doppelwurzel, für die nicht alle diese Unterdet. verschwinden.

Obwohl also die *eine* Bedingung (2) der Doppelwurzel eine in vier Strahlbüschel zerfallende *Kurve 4. Klasse* in der unendl. f. Ebene darstellt, kann doch die Gleichungsform § 117, (3) der Kreisschnitte sich nur für die 6 Strahlen dieser Strahlbüschel einstellen, welche auch den Gl. § 117, (12) unter Elimination von λ genügen.

151. **Die Kreispunkte.** Der *Begriff der Kreispunkte* ist von *Monge* (1795) eingeführt nach Baltzer, Geom. S. 459; vgl. *Monge,* J. éc. polyt. cah. 2 (1796), S. 155; 160; Applic. de l'analyse, 4. Aufl. Paris 1809, S. 127. Ihre Koordinaten § 58, (22); § 60, (22); § 61, (19) bei *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 260; 262 f. Daß sie auf den Fokalkegelschnitten liegen § 58, 7; § 60, 7; § 61, 7 bemerkt *Dupin,* Dév. (1813), S. 278; 321; vgl. *Steiner* (1825), Werke 1, S. 11; *Plücker,* System (1846), S. 252.

152. **Die Kartonmodelle.** Die *Kartonmodelle* § 58, 10; § 59, 9; § 60, 9; § 61, 9; § 62, 6 sind auf Grund einer Anregung von *O. Henrici,* London 1871, zuerst von *A. Brill* (1874) hergestellt; in der beigegeb. Beschreibung findet man

auch die Formel § 58, (24); § 59, (23); § 60, (24); § 61, (21); § 62, (16) im wesentlichen vor; s. *Dyck*, Katalog S. 258. *H. Wiener*, bei B. G. Teubner 1908, ersetzt die Kartonblätter durch Drahtkreise mit „geschränktem Verbindungsgelenk".

153. **Besondere Mittelpunktsflächen.** I. Das Ellipsoid § 58, 12 und die Hyperboloide § 59, 10; § 60, 10 mit rechtw. Kreisschnittebenen schließen sich an den Kegel Anm. 143, IV an.

II. Daneben tritt § 58, 11 das Ellipsoid mit konjugierten Hauptkreisschnittebenen.

III. Bei dem einschaligen Hyperboloid § 64, (1) mit $a^2 = c^2$ sind nach § 64, (3) nur die Erzeugenden in den Scheitelpunkten der kleinen reellen Achse $2b$ zueinander senkrecht.

154. **Besondere Paraboloide.** I. Das *gleichseitige hyperbolische Paraboloid* § 62, 7 erklärt *Steiner* (1832), Werke 1, S. 380, als solches mit rechtwinkligen Asymptotenebenen (s. Anm. 155); die Bedingung § 62, (17) bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 249. Infolge der Eigenschaft § 65, 17; § 116, 15 entspricht das gleichs. hyp. Par. dem *gleichseitigen* Hyperboloid, infolge der Eigenschaft, daß seine Kreisschnittebenen § 117, 13, V auf einer Scheitelerzeugenden senkrecht stehen, dem *orthogonalen* Hyperboloid, nach *Schröter*, Oberfl. S. 220; 224. Ausführlich ist es nebst der Erzeugung § 100, 9 behandelt von *A. Schoenfließ*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 245; 269; *Schröter*, Oberfl. S. 218.

II. Das elliptische Paraboloid § 61, 10 entspricht dem Kegel Anm. 143, IV.

155. **Die geradlinigen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids.** Daß das *hyp. Parab. keine Kreisschnitte* hat, s. Anm. 150, II. Indessen treten dafür nach *Berthot-Hachette* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433 die Schnitte § 62, 3 ein, die aus *einer endlichen* (und einer unendlich fernen Geraden bestehen § 115, (40) und sowohl zu den *gleichseitig hyperbolischen* § 116, (33) als zu den *Kreisschnitten* § 117, 13, V gehören. Die Ebenen dieser Schnitte nennt *Steiner* (1832) Werke 1, S. 376 Asymptotenebenen.

156. **Gerade Linien auf der Fläche 2. O.** I. Das *Rotationshyperboloid* § 53, (18) (corpus cylindroides hyperbolicum) wurde als Linienfläche erkannt von *Wren* (1669) und *A. Parent* (1698) nach Chasles, Aperçu V § 46 und Cantor 3, S. 418. Die beiden Scharen der Erzeugenden des *dreiachsigen* einschal. Hyperboloides § 63, 3 entdeckte *Monge*, J. éc. polyt. cah. 1 (1794), S. 5; *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 159. Beim hyperbol. *Paraboloid* § 65, 3 entdeckte die eine Schar nach dem Vorgange von *Clairant* (1731), *Frézier* (1738) nach Cantor 3, S. 793; *Braikenridge* (1759) nach Cantor 4, S. 556; 1079; die beiden Scharen *Mauduit* (1763) nach Cantor 4, S. 556; 1080; endlich *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 167. Die Anzahl der Bedingungen dafür, daß die Gerade § 63, (1) mit ihren vier Konstanten ganz auf der Fläche $n$ter Ordnung liegt, ist nach dem Verfahren § 63, 1 gerade $n+1$. Daher enthält die Fläche 1. O. ∞^2, die Fläche 2. O. ∞^1, die Fläche 3. O. nur noch eine begrenzte Zahl, die Flächen höherer O. i. a. keine Geraden mehr.

II. Als *Schnittlinien der Fläche mit der Tangentialebene* § 67, 8 erscheinen die Erzeugenden bei *Dupin*, Dév. (1813), S. 52; vgl. *Moebius* (1827) Werke 1, S. 139; die Gleichungen § 67, (26) gibt *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 110; s. Anm. 178.

III. Als *Inflexions- oder Haupttangenten* (Asymptoten der Indicatrix) § 67, 8 betrachtet sie ebenfalls *Dupin,* Dév. S. 52; 189f.

IV. Jede Erzeugende ist daher (§ 14, 5, III) ihre *eigne konjugierte Tangente* nach *Dupin,* Dév. S. 44; 51 und damit ihre *eigne reziproke Polare* § 68, 21.

157. **Analytische Darstellung der Erzeugenden.** I. Die Darstellung der Erzeugenden in *gemeinen* Koordinaten beim Hyperboloid § 63, (22); § 64, (19) gibt *Cauchy*, Applic. (1826), S. 228; *Bobillier,* Quetel. Corr. 4 (1828), S. 30; beim Paraboloid § 65, (9) *Cauchy,* ebd. S. 221.

II. Die Darstellung in *Tetraederkoordinaten* § 159, (15) von *Plücker,* System (1846), S. 105.

158. **Die beiden Scharen von Erzeugenden.** Daß durch jeden Punkt der Fläche zwei Erzeugende gehen § 63, (8); (12) und in jeder Tangentialebene zwei liegen § 82, (29') ergab sich bei *Dupin,* s. Anm. 156, III. Daß sich zwei ungleichnamige schneiden und zwei gleichnamige nicht § 63, 4; § 65, 4 hebt *Moebius* (1827) Werke 1, S. 140 und *Steiner* (1827) Werke 1, S. 149 hervor; das erstere ergibt sich auch aus der allg. Darst. § 147, 8.

159. **Metrische Beziehungen der Erzeugenden.** I. Beim Hyperboloid sind je *zwei* ungleichnamige *Erzeugende,* die durch denselben unendl. fernen Punkt gehen, *parallel* und einer Erz. des Asympt. Kegels parallel § 63, 5 nach *Steiner* (1827) Werke 1, S. 150 f.; *v. Staudt,* G. d. L., S. 214; beim Paraboloid alle gleichnamigen einer Asympt.ebene parallel nach *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 167; keine zwei parallel, da durch einen unendl. f. Punkt der Fläche schon eine unendl. f. Erz. § 65, (11) geht, *Schröter*, Oberfl. S. 212.

II. Der Ort *rechtwinkliger* Erzeugender für d. Hyperboloid § 64, 1; § 116, 6 bei *Plücker,* System (1846), S. 207, in allgemeiner Auff. bei *Bauer,* Münch. Ber. 1881, S. 242; für d. Paraboloid § 65, 16, III; § 116, 12 bei *Plücker,* ebd. S. 208. Den Ort der Erzeugenden mit beliebig gegebenem Winkel bestimmt *Bobillier*, Quet. Corr. 4 (1828), S. 35 nach Kötter, Ber. S. 74.

160. **Faden- und Stabmodelle.** I. Auf das Fadenmodell des Hyperboloides § 63, 7 deutet *Monge*, Géom. déscript. (1798), Ostwald's Klassiker Nr. 117, S. 174 hin; auch die Teilung der Ellipse § 63, Fig. 153 von *Monge* nach *Hachette*, Corr. polyt. 2 (1812), S. 329. Die *Fadenmodelle* § 63, 7; § 65, 11 *selbst* sind von *Th. Olivier* (1830) angefertigt nach Jahrb. d. Fortschr. 1868, S. 298; *F. Müller,* Führer durch die math. Lit., S. 206, und später bei *Ch. Delagrave*, Paris, *L. Brill,* Darmstadt, *Winkelmann u. S.*, Berlin 1879 erschienen; s. *Dyck,* Katalog, S. 259.

II. Das *bewegl.* Stabmodell § 63, 12, wurde von *O. Henrici* (1874) entdeckt, vgl. *Dyck,* Katalog, S. 261; *F. Klein,* Geom. 1, S. 50; *A. Cayley*, Mess. 8 (1879), S. 51; *E. Lucas*, Nouv. Ann. (2) 20 (1881), S. 9; *A. Mannheim,* Par. C. R. 102, (1886), S. 501. Eine wichtige Verbesserung zeigen die Stabmodelle von *H. Wiener* mit „geschränktem Verbindungsgelenk“ bei Teubner, 1908.

161. **Parameterdarstellungen der Flächen 2. O.** I. Bei der Parameterdarstellung der gemeinen Koord. der *Punkte* § 63, (25); § 65, (15) und *Tangentialebenen* § 82, (33); § 83, (24) der Fläche 2. O. dienen die Erzeugenden als Koord.linien auf der Fläche, *Gauß* (1828), Werke 4, S. 224 In Tetraederkoordinaten § 159, (26) nach *Moebius* (1827) Werke 1, S. 136 lehnt sie sich an ein Schmiegungstetraeder an.

II. Die Parameterdarstellung der gemeinen Linienkoord. der *Erzeugenden* § 82, (27); § 83, (20) schließt sich an die Parameterdarst. der Kegelschn. § 6, (10) an und enthält diese als Spezialfall (I § 48, (9′)). Für Tetraederkoord., entsprechend § 159, (17), gibt *F. Schur*, Math. Ann. 21 (1883), S. 518 eine Parameterdarst. mit drei abhäng. Parametern.

162. **Projektive Punktreihen und Ebenenbüschel an den Erzeugenden.** I. *Ähnliche* Punktreihen auf den Erzeugenden des hyperbol. Paraboloids bei *Mauduit* (1763) nach Cantor 4, S. 556; *Tinseau* (1780) nach Kötter, Ber. S. 77; *Meier Hirsch*, Aufg. 2 (1807), S. 237; *Giorgini*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 439; *Moebius* (1827) Werke 1, S. 214. *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 280.

II. Projekt. Punktreihen auf den Erzeugenden § 63, 10 und Ebenenbüschel an ihnen § 82, 11; § 83, 11 im vollen Umfange erhalten von *Steiner* (1832), Werke 1, S. 363—373, teilweise auch von *Chasles*, Aperçu (1837) Note IX.

163. **Aufgeschriebene Sechsseite.** Die Sätze über das *auf einem Hyperboloid liegende Sechsseit* § 63, 13; § 160, 1—9; *Hesse* J. f. Math. 24 (1842), S. 40=Werke S. 58., vgl. *J. D. Dandelin*, Ann. de math. 15 (1824/5), S. 387; *Plücker*, System (1846), S. 129; N. Geom. (1868), S. 119; *Hesse*, Werke S. 651; 676; *O. Hermes*, J. f. Math. 56 (1858), S. 210; *F. Gräfe*, J. f. Math. 93 (1882), S. 87.

164. **Gleichseitige Kegel und Hyperboloide.** I. Daß ein Kegel zwei Tripel rechtwinkliger Erzeugender haben kann, bemerkt *Ampère* (1826) nach Kötter, Ber. S. 71. Den vollen Begriff der *gleichseitigen* und *dual gleichseitigen Kegel* § 71, 10; § 93, 4; 5 entwickelt *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 323; 324; auch bemerkt er die entsprechenden *Rotations*kegel ($x^2+y^2-2z^2=0$, § 64, (9); $2x^2+2y^2-z^2=0$).

II. Das gleichseitige Hyperboloid § 64, 4; § 116, 9 wird ausführlich behandelt von *H. Vogt*, J. f. Math. 86 (1879), S. 301; *Schröter*, Oberfl. S. 195.

III. Der tiefere Grund dafür, daß es beim allgemeinen Hyperboloid kein Tripel von senkrechten Erzeugenden gibt, beim gleichseitigen unendlich viele, liegt in der Theorie der gleichseitig hyperbolischen Schnitte § 116, 8. 9.

165. **Orthogonale Hyperboloide und Kegel.** I. Die *charakteristische Eigenschaft* § 64, 5 des „besonders einfachen" *einschaligen Hyperboloides* und *Kegels* hebt *Steiner*, J. f. Math. 2 (1827), S. 292 = Werke 1, S. 162; Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 394; 385 hervor auch *Chasles*, J. de math. (1) 1 (1836), S. 331; der Name „*orthogonal*" § 64, 5 von *H. Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 41 und Oberfl. S. 184; 195. Die analyt. Bed. § 64, (16) von *Schoenfließ*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 269. Die Auffassung der charakt. Eigenschaft als Beziehung zum imag. Kugelkreis § 100, 7 und die allg. Bed. § 100, (29) bei *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 195. Wenn der Pol der Geraden $S_1 S_2$ § 100, (24) in bezug auf den Kugelkreis auf der Kurve (2) liegt, liegt auch der Pol der Geraden $S_3 S_4$ auf ihr nach *Sturm*, Jahrb. der Fortschr. 1878, S. 414. Deshalb geben die sechs Seiten des Vierecks nur drei Bedingungen § 100, (27).

II. Das *zweischalige* orthogonale Hyperboloid § 64, 5, letzter Absatz, bei *R. Sturm*, Jahrb. d. Fortschr. d. Math. 10 (1878), S. 416.

III. Die *dual orthogonalen* Hyperboloide und Kegel § 82, 16 nach *H. Schröter*, Oberfl. S. 71.

IV. Die *Erzeugung* des orthog. Hyperboloides durch *kongruente Ebenenbüschel* § 100, 8 entspricht derjenigen des Kreises durch kongr. Strahlbüschel

§ 38, 8; der *Spezialfall* § 64, 7, wo entsqrechende Ebenen beider Büschel *senkrecht* sind, dem Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in § 38, 8. Diese *spezielle* Erzeugung § 64, 7 gibt für den Kegel *Hachette*, Corr. polyt. 1 (1806), S. 179, für das Hyperboloid *Binet*, Corr. polyt. 2 (1810), S. 71; *Steiner* (1832) Werke 1, S. 385. 394; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 282; *Plücker*, System (1846), S. 112. *Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 42; Oberfl. S. 188.

Die allgemeine Erzeugung § 100, 8 gibt nach dem Vorgange von *W. Fiedler*, *F. Ruth*, Wien. Ber. 80 (1879), S. 257; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 385 f.; *Schoenflies* Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), S. 233; Geom. der Bewegung (1886), S. 107.

V. Die Erzeugung durch einen Punkt, dessen *Abstände von zwei windschiefen Geraden ein konstantes Verhältnis* haben, § 100, 9 gibt *Chasles*, J. de math. (1) 1 (1836), S. 331; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 266 f. die weiteren Beziehungen § 100, 10—11 von *Schoenflies*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 245; 269; 24 (1879), S. 62 und *Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 28; 46; *H. Milinowski*, J. f. Math. 85 (1878), S. 88.

166. **Reziproke Polaren und konjugierte Gerade.** I. Der Begriff der *reziproken Polaren bei der Fläche 2. O.* entwickelt sich im Sinne von § 68, 15, V bei *G. Monge*, Géométrie descriptive (1798) in Ostwalds Klassikern Nr. 117, S. 65, sowie Feuilles d'analyse (1801) nach Kötter, Ber. S. 48. Der Name „droites polaires" bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 590; „reziproke Polaren" bei *Hesse*, Vorl. Raum, S. 133. Die Hauptsätze § 68, 15; 16; 27 bei *Hesse*, a. a. O. S. 133; 150 f. An § 68, 27 schließt sich noch der Satz, daß die beiden gemeinsamen Transversalen (I § 60, 6) von zwei Paar reziproken Polaren wieder reziproke Polaren sind, von *F. Klein*; *A. Cayley*, Quart. J. 15 (1877), S. 124; *Rosanes*, Math. Ann. 23 (1884), S. 416.

II. Der Begriff der reziproken Polaren *beim linearen Komplex* (Nullsystem) § 86, 9 tritt bei *Moebius* (1833) Werke 1, S. 507 auf.

III. Beide Begriffe I und II ordnen sich dem Begriff von „Linie" und „Gegenlinie" bei der *allg. Reziprozität* unter nach *Moebius* (1833) Werke 1, S. 498 und entsprechen den beiden *involutorischen* Reziprozitäten § 78, 14.

IV. Neben beiden führt *von Staudt*, G. d. L. (1847), S. 191 den Begriff der „*konjugierten Geraden*" § 68, 31, III; § 86, 11 ein.

V. Dort § 68, 31, IV; § 68, 21 erhält man als Ort der Geraden, die zu sich selbst konjugiert sind, den Tangentenkomplex, und als Ort der Geraden, die ihre eignen reziproken Polaren sind, die Regelscharen; hier § 86, 10; 11 beidemal den Komplex selbst.

167. **Konjugierte Tangenten.** Begriff und Eigenschaften der konjugierten Tangenten § 68, 17—20 nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 44 ff.; *v. Staudt*, Halbm. S. 38.

168. **Hauptachsengleichungen in Linienkoordinaten.** I. Die Gleichungen § 70, (23); (41) nach *Plücker*, N. Geom. S. 256; *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 143.

II. Auf die Darstellung § 71, (16); (19) der *Kegel* und *Kegelschnitte* in Linienkoord. weist *Plücker*, a. a. O. S. 259 hin; vgl. *Clebsch-Lindemann*, a. a. O. S. 150. Die erste Darstellung der Raumkurven in diesem Sinne bei *Cayley*, Quart. J. 3 (1860), S. 225.

169. **Reziprokalkegel und orthogonales Polarbündel.** I. *Reziproke sphärische Dreiecke* bei *Vieta* (1593) u. *Snellius* (1627) nach Cantor 2, S. 605; 707.

Die zusammen gehörigen *Gleichungen reziproker Kegel* § 71, (1) und (22) gibt *Steiner* (1827) Werke 1, S. 117; ihre ausführliche Theorie *Chasles*, Cônes (1830), S. 8; die Beziehung der Fokallinien und Kreisschnitte § 71, 9 *Chasles*, ebd. S. 12.

II. Der allgemeinere Begriff ist das *orthogonale Polarbündel* § 84, 6, bei dem jedem Strahl des Bündels die zu ihm senkrechte Ebene entspricht, *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 210; Halbm. S. 36; *Reye*, G. d. L. 2, S. 97.

170. **Parallelepipedon, durch drei Erzeugende bestimmt.** I. Das Parallelepipedon beim *Hyperboloid* § 74, 5 und sein konstantes Volumen § 92, (24) bei *Hachette*, J. f. Math. 1 (1826), S. 345; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 277; vgl. *H. Vogt*, J. f. Math. 86 (1879), S. 297; *G. Bauer*, Münch. Ber. 1880, S. 637; *H. Schröter*, Münch. Ber. 1881, S. 288; *A. Schumann*, Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), S. 136. Das *rechtwinkl.* Parallelep. § 92, 6, dessen Ecken auf der Mongeschen Kugel liegen, bei *Schröter*, Oberfl. S. 199 f.

II. Das Parallelepip. beim *Paraboloid* § 74, 9 und § 92, (29) nach *Magnus*, Aufg. 2 S. 279; vgl. *Moebius*, Werke 1, S. 215.

171. **Gerade an drei Geraden gleitend.** I. Die Erzeugung des *Hyperboloides* § 74, 6; 7 zuerst bei *Monge*, Géom. descript. (1799), S. 130; *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 160; *Hachette*, J. f. Math. 1 (1826), S. 340; *Binet*, J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 321; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 140. Das Koordinatensystem § 74, 7 und die mittlere Gl. § 74, (22) bei *Steiner* (1827), Werke 1, S. 150; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 277. Ein allgemeines Koordinatensystem benutzt *Hesse*, Raum S. 113. Die Gl. § 74, (22) ist ein Spezialfall einer allgemeineren Form § 147, 12.

II. Die Erzeugung des *Paraboloides* § 74, 11 von *Frézier* (1738) nach Cantor 3, S. 793; *Braikenridge* (1759) nach Cantor 4, S. 556; 1079. Das Koordinatensystem § 74, 10; 11 nach *Magnus* a. a. O. S. 279.

III. Die Bestimmung des Ortes einer Geraden, die an drei Ger. gleitet, fällt unter die allgemeinere Aufgabe, *den Ort der gemeinsamen Strahlen von drei linearen Komplexen zu bestimmen* § 147, 10. Die natürliche Ableitung der Gleichung § 147, (30); (28) aus § 147, (23) ist zuerst von *Plücker* (1865), Abhandl. S. 466, 505; N. Geom. (1868), S. 121 ff. gegeben, andere Ableitungen geben *Gordan*, Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868), S. 59; *Cayley*, Math. Ann. 4 (1871), S. 558; *Pasch*, J. f. Math. 75 (1873), S. 131 ff.; *Doehlemann*, Arch. Math. Phys. (2) 17 (1899), S. 166; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 142.

172. **Komplexgleichung der allg. Fläche 2. O.** Die allg. Gl. § 78, (28); § 144, (2) bei *Plücker*, N. Geom. (1869), S. 257; vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 102; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 142. Die Auffassung als *geränderte Determinante* § 144, (3) bei *Hesse*, Raum S. 179; *Baltzer*, Geom. S. 497; *Clebsch-Lindemann*, a. a. O. S. 143.

173. **Lineare Komplexe der Erzeugenden.** I. Von den *drei lin. Komplexen* § 82, (22) geht *Plücker*, N. Geom. S. 129, Formel (45) zu dem Hyperboloid § 82, (19) über (seiner Bez. — $\sigma, \varrho, \eta, r, s, 1$; k_1, k_2, k_3 entspricht hier $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$; $-\frac{\varepsilon bc}{a}, -\frac{\varepsilon ca}{b}, \frac{\varepsilon ab}{c}$); die Bemerkung über den *Sinn der Windung* § 82, 9 bei *Plücker*, ebd. S. 130. Der Sinn einer Regelschar bei *v. Staudt*, Beitr. S. 39 ff. Das Verfahren § 82, 6 nach *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 144.

II. Es findet seine umfassendere Bedeutung in der Aufstellung der sechs lin. Komplexe § 147, (17) oder (18) nach *Gordan*, Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868),

S. 59 und der Theorie der Determinante § 147, (4) nach *Voss*, Math. Ann. 10 (1876), S. 143; 13 (1878), S. 320; vgl. *Baltzer*, Det. S. 184; *Staude*, Arch. Math. Phys. (3) 9 (1903), S. 230.

III. Es vollendet sich schließlich in der Aufstellung *aller linearen Komplexe*, denen eine Regelschar angehört § 159, 7 nach *Plücker*, Neue Geom. (1868), S. 113; *P. Gordan*, Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868), S. 59.

IV. Der Begriff der Involution zweier linearen Komplexe § 159, 8 von *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), S. 201.

174. Allgemeine Gleichung und Polarsystem des linearen Komplexes (Nullsystem). Die *allgem. Gleichung* des linearen Komplexes in der aufgelösten Form § 86, (17) bei *Moebius* (1833), Werke 1, S. 494, in Linienkoordinaten § 86, (1); (2) bei *Plücker*, Abhandl. (1865), S. 464; 478 und Neue Geom. S. 26f.

Das *Polarsystem* des lin. Kompl. § 86, 6; 8—11, welches *Plücker*, N. G. S. 28f. behandelt, erscheint bei *Moebius*, Werke 1 S. 494 als involutorischer Sonderfall der allg. Korrelation des Raumes § 78, 14, in gleichem Sinne auch bei *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 191, wo es als „*Nullsystem*" bezeichnet wird. *Moebius* hat für Pol, Polarebene, reziproke Polaren die Ausdrücke „Gegenpunkt, Gegenebene, Gegenlinie". Die Komplexlinien erscheinen bei ihm auf Grund des Satzes § 86, 10 als „Doppellinien", Werke 1 (1833), S. 508; vgl. 3 (1837), S. 118. Die Sätze § 86, 12, I; II finden sich bei ihm, Werke 1, S. 509, XX und XIX. Er folgert aus ihnen noch unter XXI, daß zwei Paare reziproker Polaren hyperboloidisch liegen.

175. Mittelpunkt, Durchmesser, Hauptachse und Hauptebene des Komplexes. Der *Mittelpunkt* § 87, 1 als Pol der unendl. fernen Ebene und ein *Durchmesser* § 87, 2 als eine durch diesen Pol gehende Gerade, wie beim Paraboloid § 78, 1.

Die *Hauptachsenrichtung* und *Hauptachse* § 87, 1; 4 führt *Moebius* (1833), Werke 1, S. 501; 506 ein („Hauptlinie"); *Durchmesser* § 87, 2 und *Hauptebenen* („Hauptschnitte") § 87, 4 bei *Plücker*, N. Geom. (1868), S. 32; 33; Satz § 87, 3 inhaltlich schon bei *Moebius*, Werke S. 507, XIV.

176. Projektion reziproker Polaren beim Komplex. Der Satz § 87, 9 vermittelt in der *graphischen Statik* die Beziehung zwischen Fachwerk und Kräfteplan nach *L. Cremona*, Le figure reciproche nella statica grafica, Milano, 1872; *F. Schur*, Math. Ann. 48 (1896), S. 191; Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), S. 48 und *A. Föppl*, Vorles. techn. Mechanik 2 (2. Aufl. 1903), S. 153f.

177. Fokalachsen der Flächen 2. O. Wie die *Brennpunkte* der Kegelschnitte solche *Punkte* sind, an denen die zugehörige Involution harmonischer *Polaren* eine rechtwinklige ist (Anm. 2, II), so sind die *Fokalachsen* der Flächen 2. O. solche *Gerade*, an denen die zugehörige Involution harmonischer *Polarebenen* eine rechtwinklige ist. Die letztere Eigenschaft erkannte für die Brennlinien des Kegels § 119, 11 *Chasles*, Cônes (1830), S. 11; vgl. *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 212; *Schröter*, Oberfl. S. 52; für die Tangenten der Fokalkegelschnitte der Flächen 2. O. § 122, 10 *Plücker*, System (1846), S. 333; für die Erzeugenden aller konfokalen Flächen § 122, 10 vorbereitet bei *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 137 = Werke 7, S. 7; über die allg. Theorie vgl. *Reye*, G. d. L. 2, S. 230.

Das Auftreten der Fokalachsen bei der Erzeugung des orthog. Hyperboloids § 100, 11 bemerkt *H. Schröter*, Berl. Monatsber. 1877, S. 594; J. f. Math. 85 (1878), S. 67.

Die Fokalachsen entsprechen den Brennpunkten im Sinne von § 13, 8, II; den Komplex der Geraden, durch die, entsprechend § 13, 8, I, zwei senkrechte Tangentialebenen an die Fläche 2. O. gehen, betrachtet *Painvin*, Bull scienc. math. 2 (1871), S. 371.

178. **Tangentialebene als schneidende Ebene.** Daß die Tangentialebene die Fläche 2. O. in einem Geradenpaar schneidet, § 106, 6, bemerkt *Dupin*, Dével. (1813), S. 51; *Cauchy*, Appl. (1826), S. 209f.; *Steiner* (1832) Werke 1, S. 371. Überhaupt hat die Schnittkurve einer Fläche mit einer Ebene einen Doppelpunkt im Berührungspunkt nach *Plücker*, Abh. S. 113.

Die Ableitung der Gl. der Fläche in Ebenenkoordinaten aus dieser Eigenschaft § 107, (7) bei *Hesse*, Raum S. 398.

179. **Allgemeine Darstellung der ebenen Schnitte.** I. Ebene Schnitte der Flächen 2. O. überhaupt betrachtete *Fermat* nach Cantor 2, S. 818; *Kästner* (1758) und *Jacquier* (1735) nach Cantor 4, S. 457 und 601; *Dandelin* nach Dingeldey S. 13.

II. Die Methode der Einführung eines ebenen Koord.systems in der schneidenden Ebene § 108, 1; 2 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 49; 50; dann in verbesserter Form bei *Cauchy*, Appl. 1, S. 263; *Hesse*, Raum S. 388 ff., *Henrici*, J. f. Math. 64 (1865), S. 187.

180. **Parallele Schnitte der Flächen 2. O.** I. Die *Ähnlichkeit und ähnliche Lage paralleler Schnitte* § 110, 6; § 112, 10; § 113, 8 wird in unvollkommener Weise bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 30 angedeutet und von *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 155 bewiesen, auch bei *Klügel* 3 (1808) S. 306; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 224; s. *Baltzer*, Geom. S. 490. Dabei gilt nach *R. Müller*, Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), S. 342 der weitere Begriff der Ähnlichkeit § 14, 10. Auch bei den Parabeln § 113, 8 genügt zur ähnl. Lage die gleiche *Richtung* der Hauptachsen, während der *Sinn* der Hauptachse (beim Durchgang der Parabel durch ein Parallellinienpaar § 74, 2 oder eine Doppellinie) umschlagen kann.

II. Der *Ort der Mittelpunkte* ebener Schnitte § 111, 4 für Rotationsflächen bei *Waring* (1762) nach Cantor 4, S. 522; allg. *Baltzer*, Geom. S. 515; s. Anm. 50.

III. Die Bemerkung § 113, 8, daß die in s *quadratische* Gleichung (§ 107, (8)):

$$-A^u = (A_{11}u^2 + \cdots + 2A_{12}uv) + 2(A_{14}u + \cdots + A_{34}w)s + A_{44}s^2 = 0$$

die *Diskriminante:*

$$(A_{11}u^2 + \cdots + 2A_{12}uv)A_{44} - (A_{14}u + \cdots + A_{34}w)^2$$
$$= \mathrm{A}_{44}u^2 + \cdots + 2\mathrm{A}_{56}vw + \cdots = A(\alpha_{11}u^2 + \cdots + 2\alpha_{23}vw + \cdots) \text{ (I Anm. 1, III(11))}$$
$$= -AA_{44}^u \text{ (§ 111, (19))}$$

hat, die nach § 113, (1) *verschwindet*, dürfte neu sein. Sie bedeutet bei den eigentl. Flächen ($A \neq 0$) oder Kegeln ($A = 0$), daß unter einem System paralleler parabolischer Schnitte nur *einer* vorkommen kann, wo die Parabel in ein Parallellinienpaar oder eine Doppellinie zerfällt.

181. **Hauptkrümmungsmittelpunkte.** I. Der § 110, 8 benutzte Satz lautet: Bestimmt man in einem Punkte $P = x, y, z$ der Fläche $f(x, y, z) = 0$

die *positive* Normale durch die Richtungskosinus:

$$\frac{f_1}{F}, \frac{f_2}{F}, \frac{f_3}{F}; \; F = +\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten von f verstanden, so sind die Hauptkrümmungsradien, als *relative* Entfernungen $\varrho_1 = PM_1$ und $\varrho_2 = PM_2$ der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 von P auf der positiven Normale, die Wurzeln der in ϱ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \frac{F}{\varrho} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} + \frac{F}{\varrho} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} + \frac{F}{\varrho} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Cauchy, Applic. (1826), S. 344; *Baltzer*, Determ. S. 155. Mit $2f = g$ geht hieraus die Gleichung § 110, (22) hervor.

II. Die Unterscheidung *positiv* und *negativ gekr.* Flächen zuerst bei *Meusnier* Par. mém. prés. 10 (1776), S. 491 ff. nach Baltzer, Geom. S. 457. Das *konstante* Vorzeichen der Krümmung bei den Fl. *2. O.* § 115, 1 nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 195; 205, während bei Fl. höherer Ordnung Gebiete von pos. u. neg. Kr. durch die *Demarcationslinie* getrennt sind, *Dupin*, a, a. O. S. 195.

III. Den Zusammenhang zwischen Hauptkrümmungsradien und Hauptachsen eines ebenen Schnittes § 110, 8 begründet *Dupin*, Dével., S. 29; 206, indem er mittels einer affinen Transformation den gerade betrachteten Punkte der Fläche zu einem Scheitelpunkt macht.

IV. Die Darstellung durch ellipt. Koord. und die Polarbeziehung § 121, 11 von *G. Salmon* nach Salmon-Fiedler, Raum 1, S. 312; *R. Townsend*, Camb. Dubl. J. 5 (1850), S. 177.

182. **Klassifikation der ebenen Schnittkurven der Fläche 2. O.** I. Ansätze zu einer vollst. Klassif. der ebenen Schnitte bei *Cauchy*, Appl. S. 263 ff.; *Hesse*, Raum S. 388 ff. Die hier gegebene Darstellung erreicht auf *elementarem* Wege die Herstellung *aller kanonischen Gleichungen* § 114, (3), deren Vergleich mit § 26, (2) zugleich die kurze Bezeichnung der geränderten Determinanten durch den obern Index u rechtfertigen dürfte, sowie der Tabelle § 114, (20) *aller möglichen Schnittkurven* bei Annahme gem. rechtw. Koordinaten.

II. In Tetraederkoordinaten § 153, 11 wird die Klassifikation der ebenen Schnitte umfassend behandelt von *Gundelfinger* in *Hesse*, Raum S. 467. Die Tabelle § 153, (22) vertritt *zwei* Tabellen, insofern ihre Kolonnen- und Zeilenüberschriften nach § 155, (41) und § 156, (38) in den *Summen* der Hauptunterdeterminanten dargestellt werden können (s. Anm. 76, VII).

III. Der Aufbau der Tabelle § 114, (20) stützt sich auf die allgemeinen Tabellen § 156, (38) und § 157, (25).

183. **Besondere ebene Schnitte.** I. Als Schnitte *verschiedener Rotationskegel,* senkrecht zu einer Kante geführt, wurden die drei *„Kegelschnitte“* (s. Anm. 1) von *Archimedes* erhalten nach Tropfke 2, S. 432, als Schnitte *eines und desselben elliptischen* Kegels § 115, 9 bei *Apollonius* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 437.

II. Daß die Schnitte des *hyp. Parab.* § 115, 8 niemals geschlossene Kurven 2. O. sein können, hebt hervor, *Hachette,* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433.

III. Die Beziehung der *parabolischen Schnitte* § 74, 2 und § 115, 4; 5 zum Asymptotenkegel bei *Steiner,* Werke 1, S. 445 Anm.; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 247. Das Vorkommen von *Parallellinienpaaren* bei *Cauchy,* Appl. (1826), S. 271; *Steiner,* Werke 1, S. 151; 371; *v. Staudt,* G. d. L. S. 214.

184. **Gleichseitig hyperbolische Schnitte.** Die ebene Schnittkurve § 110, (11) der Fläche 2. O. hat *ein gegebenes Achsenverhältnis* $\frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} = m : - n$, wenn die Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung § 109, (11) die (rational gemachte) Bedingung erfüllen:

$$(m\lambda_1 + n\lambda_2)(m\lambda_2 + n\lambda_1) = 0 \quad \text{oder} \quad (m-n)^2\lambda_1\lambda_2 + mn(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 0$$

oder nach § 109, (25):

$$(m-n)^2(u^2 + v^2 + w^2)A_{44}^u - mn(A_{44}'^u)^2 = 0\,.$$

Diese stellt, in Verbindung mit $s = 0$, einen *Kegel 4. Klasse* dar, den *Leitkegel der Schnitte vom Achsenverhältnis* $m : - n$, auf den *Steiner,* Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 445, Aufgabe 31, hinweist. Für $m = n$ zerfällt er in den doppelt zählenden Kegel 2. Kl. § 116, (11) den Leitkegel der *gleichseitig hyperbolischen Schnitte* (*Steiner,* a. a. O. Aufgabe 30). Für $m = - n$ zerfällt er in vier Strahlen (vier Ebenenbüschel) $\Theta = 0$ (§ 109, (16)). Von den Ebenen dieser vier Büschel kommen aber nur die 6 Verbindungsebenen der vier Strahlen als *Kreisschnitte* in Betracht aus dem Anm. 150, VI dargelegten Grunde. Für $m = 0$ oder $n = 0$ kommt er auf den Asymptotenkegel § 111, (19), den Leitkegel der *parabolischen Schnitte* (Steiner a. a. O. S. 445, Anm.) zurück.

Über die *gleichseitig hyperbol. Schnitte* s. *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), S. 418; *Beyer,* Diss. Breslau 1868; *H. Schröter,* Oberfl. (1880), S. 75; 195; 218; *O. Rupp,* Wien, Ak. Ber., math. naturw. Kl. 86, 2 (1882), S. 909 ff.; *Gillet,* Mathésis (2) 2 (1892), S. 153; 180; 223; *M. Krewer,* Arch. Math. Phys. (2), 12 (1894), S. 208; *G. D. E. Weyer,* ebd. 14 (1896), S. 139; *B. Hoppe,* ebd. 14, S. 436; *W. Rulf,* Monatsh. f. Math. 7 (1896), S. 93; *K. Schober,* ebd. S. 111; genauere Angaben bei *W. Bath,* Diss. Rostock 1904; vgl. auch *Steiner* (1826), Werke 1, S. 13.

185. **Ebener Schnitt senkrecht zu einem Fokalkegelschnitt.** Daß ein durch einen Punkt P_0 eines Fokalkegelschnittes senkrecht zu diesem gelegter Schnitt in P_0 einen Brennpunkt hat, bemerkt für den *Kegel* § 119, 11, II *Chasles,* Recherches (1829), S. 9; Cônes (1830), S. 13; *Plücker,* System (1846), S. 299; für die *eigentl.* Flächen § 127, 10; § 128, 8 *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (28); die Schlußweise § 127, 10 bei *Plücker,* System (1846), S. 290; 295; die allg. Auffassung § 127, 12 bei *SalmonFiedler,* Raum S. 263.

186. **Gemeinsame Tangenten zweier konfokaler Flächen und Fokalstrahlen.** Die Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier konf. Fl. § 122, (8) gibt *Liouville,* J. de math. (1) 11 (1846), S. 112; 12 (1847), S. 423; vgl. *Gundelfinger* in Hesse, Raum, S. 496.

Die gemeinsamen Transversalen der Fokalkegelschnitte heißen bei *Mac Cullagh* (1843), Works S. 303, *bifocal right lines.*

Ihre Konstruktion § 134, 1; § 137, 1 für § 132, Fig. 203; § 136, Fig. 211 bei *Staude,* Fokaleigenschaften (1896), S. 183.

187. **Senkrechter Schnitt der scheinbaren Umrisse.** Der Satz § 122, 6, II für zwei beliebige Flächen τ_1 und τ_2 bei *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (33); für eine Fläche τ_1 und einen Fokalkegelschnitt $\tau_2 = \beta, \gamma$ bei *Chasles*, ebd. art. (13); für die beiden Fokalkegelschnitte § 122, 6, III bei *Chasles*, Nouv. Mém. Acad. Brux. 5 (1829), nach Aperçu, a. a. O. art. (14).

188. **Fokaleigenschaften der konjugierten Fokalkegelschnitte.** Der Ausdruck *„focales conjuguées"* § 131, 1; § 135, 1 bei *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (7) Anm. Die *Fokaleigenschaften* der Fokalkegelschnitte § 131, 5—7; § 135, 4 gibt *Ch. Dupin*, Dével. (1813), S. 280; Corr. polyt. 1 (1807), S. 218; 2 (1813), S. 424; vgl. *Dandelin*, Brux. Nouv. mém. acad. 2 (1822), S. 171; 3 (1826), S. 1; Ostwalds Klassiker, Nr. 117, S. 206; *Jacobi* (1834), Werke 7, S. 8; *Chasles*, Par. C. R. 16 (1843), S. 1108; *Plücker*, System (1846), S. 264; *Hesse*, Raum, S. 358; *Baltzer*, Geom. S. 528; *Steiner-Geiser*, Kegelschn. (1875) S. 175; *Schröter*. Oberfl. S. 603; 605.

189. **Gleichungen 3. und 4. Grades.** I. Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der *kubischen Gleichung:*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

so genügen die drei Werte:

$$y_1 = x_2 + x_3, \quad y_2 = x_3 + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2$$

der unsymmetrischen Funktion $y_1 = x_2 + x_3$ der Wurzeln ihrerseits der Gleichung (§ 137, (12)):

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 + q)y + (pq - r) = 0;$$

nach dem allg. Satz über unsymmetr. Funktionen der Wurzeln von *Lagrange* (1771), *J. A. Serret*, Höh. Algebra, deutsch von *G. Wertheim* 1 (2. Aufl. 1878), S. 328; *Encyklopädie* der math. W. I, 1, S. 468, art. 16 (*K. Th. Vahlen*); die Gleichung § 137, (12) selbst von *Binet*, J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 52.

II. Die Bestimmung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der *biquadrat. Gleichung:*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

führt auf die *kubische Resolvente* (§ 134, 6):

$$y^6 + Py^4 + Qy^2 + R = 0,$$

deren Koeffizienten:

$$P = -3p^2 + 8q, \quad Q = 3p^4 - 16p^2q + 16pr + 16q^2 - 64s,$$
$$R = -(p^3 - 4pq + 8r)^2,$$

und deren Wurzeln die sechs Werte

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1 - x_4, \quad y_2 = x_3 + x_1 - x_2 - x_4, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$y_4 = -x_2 - x_3 + x_1 + x_4, \quad y_5 = -x_3 - x_1 + x_2 + x_4, \quad y_6 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

der unsymmetr. Funktion y_1 sind; Methode von *Lagrange*, *Serret-Wertheim* a. a. O. 2 (1879), S. 396; *Encyklopädie* I, 1, S. 502 (*O. Hölder*).

190. **Die biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen.** Das Verfahren § 134, 2; 9, *erst* die *Längen* der gebr. Fokaldistanzen aus einer Gl. 4 Grades § 134, (14) und *dann* die Koordinaten x_0, y_0 der *Knickpunkte* aus den linearen Gl. § 134, (12) zu bestimmen, entspricht dem Verfahren des Hauptachsenproblems, wo ebenfalls *erst* die *Hauptachsenkoeff.* aus der kub. Gl. § 88, (17) und *dann* die *Richtungskosinus* der Hauptachsen aus § 88, (15) bestimmt werden. Die Resolvente § 134, (18) der Gl. § 134, (14) ist die Definitions-

gleichung der ellipt. Koordinaten § 120, (10), wie auch in der Darstellung § 134, (28′) zum Ausdruck kommt. Das entsprechende gilt für das Verfahren § 137, 2; 4.

191. **Umbeschriebene Vierseite.** I. Die erste der beiden Möglichkeiten des Satzes § 145, 2 findet *C. J. Brianchon*, Mém. lign. du 2 ordre (1817), S. 14; *Poncelet*, Traité (1822), Art. 153; beide Möglichkeiten erkennt *Th. Weddle*, Cambr. Dubl. J. 8 (1853), S. 106; vgl. *G. Bruno*, Torin. Atti 17 (1882), S. 35; *A. Mannheim*, Soc. Math. Fr. Bull. 25 (1897), S. 78. Die allgemeinere Aufgabe, wann n Punkte einer Fl. 2. O. Berührungspunkte eines geschl. Tangentenpolygons sein können, bei *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), S. 39; 26 (1886), S. 231; *Zeuthen*, ebd. S. 247.

II. Den Ort der Tangenten, welche zwei feste Tangenten schneiden § 145, 4 behandelt *J. Cardinaal*, Nieuw Arch. 10 (1883), S. 131.

192. **Quadratische Komplexe der Erzeugenden.** Während es *keinen linearen* Komplex gibt, dem *gleichzeitig beide* Scharen der Erzeugenden angehören § 159, 7, I, gibt es neben den *speziellen* quadrat. Komplexen § 146, (3) im allg. *einen quadrat.* Komplex, der beide Scharen enthält, nach *F. Schur*, Math. Ann. 21 (1883), S. 516; s. *W. Düker*, Dissert. Rostock 1910.

193. **Determinante $n$ten Grades.** I. Die *Inversionszahl* $\mathfrak{a}$ *einer Permutation* $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ der n Zahlen $12 \dots n$ ist die Summe der Anzahlen kleinerer, die auf jede der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ folgen; z. B. $\alpha = 15342$, $\mathfrak{a} = 0 + 3 + 1 + 1 + 0 = 5$; $\alpha = 14523$, $\mathfrak{a} = 4$. Die *Permutation* heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ihre Inv.zahl ger. od. unger. ist. *Baltzer*, Det. (1875), S. 1.

II. *Definition der Determinante $n$ten Grades:*

$$(1)\quad A = |a_{lm}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n},$$

wo sich die Summe entweder, bei fester Permutation $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ (in der Regel $\alpha = 12 \dots n$), über alle $n!$ Permutationen $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ oder, bei fester Permutation β (in der Regel $\beta = 12 \dots n$), über alle $n!$ Permutationen α erstreckt, und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Invers.zahlen von α und β sind. Beispiele $n = 2, 3, 4$, s. I Anm. 1, I, (1); II, (1); III, (1); *Baltzer*, Det., S. 5.

III. *Adjungierte Unterdeterminanten.* Sind $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n$ und $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_n$ zwei Permutationen mit den Invers.zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so sind:

$$(2)\quad p_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_k} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_k} \\ & \dots & & \\ a_{\alpha_k\beta_1} & a_{\alpha_k\beta_2} & \dots & a_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix}, \quad q_{\bar\alpha\bar\beta} = (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_{k+1}\beta_n} \\ & \dots & \\ a_{\alpha_n\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}$$

zwei *adjungierte Unterdeterminanten* $k$ten ($k = 1, 2, \ldots,$ oder $n - 1$) und $n - k$ten Grades. Den $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ Kombinationen $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$ und $\binom{n}{k}$ Kombinationen $\beta = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k$ entsprechen $\binom{n}{k}^2$ Unterdet. $p_{\alpha\beta}$ und zu jeder solchen gehört eine bestimmte $q_{\bar\alpha\bar\beta}$; z. B für $n = 4$ mit $\alpha = 314$, $\bar\alpha = 2$; $\beta = 124$, $\bar\beta = 3$ oder $\alpha = 23$, $\bar\alpha = 14$; $\beta = 24$, $\bar\beta = 31$:

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ und } a_{23} \text{ oder } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{43} & a_{41} \end{vmatrix}.$$

Der Faktor $(-1)^{a+b}$ wird immer $+1$, wenn man die Kombination α, $\bar\alpha$ und β, $\bar\beta$ so wählt, daß die Permutationen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ und $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \beta_{k+1} \ldots \beta_n$ beide gerade sind, wie I Anm. 1, III, (3); (10).

IV. *Entwicklung nach Unterdeterminanten.* Die Determinante (1) ist:

$$(3) \qquad A = \sum p_{\alpha\beta} q_{\bar\alpha\bar\beta},$$

wo sich die Summe entweder, bei fest bleibender Kombination α, über alle $\binom{n}{k}$ Kombinationen β oder, bei fest bleibender Kombination β, über alle $\binom{n}{k}$ Kombinationen α erstreckt, und der Faktor $q_{\bar\alpha\bar\beta}$ in jedem Gliede die adjungierte Unterdet. von $p_{\alpha\beta}$ ist. Ist im ersten Falle $\bar\alpha$ nicht genau die *„komplementäre Kombination"* zu α, die α zu einer vollen Permutation ergänzt, so ist die Summe in (3) nicht A, sondern 0; und entsprechend im zweiten Falle; *Baltzer*, Det. S. 30, Beispiele s. I Anm. 1, II, (6); III, (17); (19) und im vorl. Text § 43, (17); § 107, (8); (12); ferner für § 140, (12) ausgeführt:

$$A^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_2' \\ u_3 & u_3' \end{vmatrix} + \cdots$$

und die ersten Faktoren der 6 Glieder nach I Anm. 1, III, (19) entwickelt (§ 140, (16)):

$$A^{uu'} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{\bar k \bar l} q_k q_l;$$

und entsprechend § 140, (33); (36); (42); § 142, (40).

V. *Determinanten aus Unterdeterminanten.* Bedeutet A_{lm} die (adjungierte) Unterdeterminante des Elementes a_{lm}, so ist in der Be-

zeichnung von (2):

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A_{\alpha_1\beta_1} & A_{\alpha_1\beta_2} & \dots & A_{\alpha_1\beta_k} \\ A_{\alpha_2\beta_1} & A_{\alpha_2\beta_2} & \dots & A_{\alpha_2\beta_k} \\ & \dots & & \\ A_{\alpha_k\beta_1} & A_{\alpha_k\beta_2} & \dots & A_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} A^{k-1} \begin{vmatrix} a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_{k+1}\beta_n} \\ & \dots & \\ a_{\alpha_n\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix};$$

und insbesondere für $k = n$ im Sinne von (1):

$$(5)\qquad |A_{lm}| = A^{n-1};$$

Baltzer, Det. 58; Beispiele s. I Anm. 1, II, (4); (5); III, (7)—(9); im vorlieg. Text § 107, (19); § 142, (20); § 148, (4).

VI. Die *Multiplikationstheoreme* I Anm. 1, V gelten entsprechend für die Det. $n$ten Grades, § 140, 3; 5; 10; § 147, 3; 6.

VII. *Differentialquotienten.* In (2) ist $q_{\bar\alpha\bar\beta}$ auch als partieller Diff.-quot. darstellbar:

$$(6)\qquad q_{\bar\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^k A}{\partial a_{\alpha_1\beta_1}\,\partial a_{\alpha_2\beta_2}\dots\partial a_{\alpha_k\beta_k}},$$

s. § 147, 6; nach *Baltzer*, Det. S. 26.

194. **Erzeugung durch reziproke Bündel.** Die Erz. der Fläche 2. O. durch rezipr. Bündel § 158, 11 gibt *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 9 (1847), S. 193; vgl. *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 29; *H. Schröter*, J. f. Math. 62 (1863), S. 215; Oberfl. S. 452; *Reye*, G. d. L. 2, S. 37; vgl. *G. v. Escherich*, Wien. Ber. 85 (1882), S. 893. Die analyt. Darst. bei *W. Fiedler*, Darstell. Geom. 3 (1888), S. 533; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 190. Durch „*gleichwinklige*" rezipr. Bündel, entsprechend § 38, 7, werden nach *Schoenflies*, J. f. Math. 99 (1885), S. 195, gewisse Rotationsflächen 2. O. erzeugt.

Sachverzeichnis.

Die Zahlen *ohne* Klammern, § 3, 2, bedeuten Artikel, die *mit* Klammern, § 3, (2), Formeln des betreffenden Paragraphen.